

Les singularités du chaos : plis et fronces dans des systèmes couplés simples

Jérémy Oden, Serge Bielawski, & Marc Lefranc

Laboratoire PhLAM, UMR CNRS 8523, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
marc.lefranc@univ-lille1.fr

Résumé. Une dynamique chaotique étire l'espace des états dans certaines directions tout en le repliant sur lui-même, ce qui rend non inversible la dynamique asymptotique. On peut donc la caractériser en termes de singularités, telles que par exemple le point critique de la suite logistique (qui replie l'intervalle sur lui-même). Dans les systèmes hyperchaotiques avec deux directions instables, ces singularités sont de manière générique des fronces, qui résultent de la rencontre de lignes de pli. Nous illustrons ici cette idée importante dans un cas simple, celui de deux systèmes chaotiques faiblement couplés.

Abstract. A chaotic dynamics stretches state space in some directions while folding it over itself, which makes the asymptotic dynamics non invertible. Thus it can be characterized in terms of singularities, of which the critical point of the logistic map (which folds an interval onto itself) is an example. In hyperchaotic systems with two unstable directions, these singularities are generically cusps, occurring where fold lines meet. We illustrate this important idea in the simple case where two chaotic systems are weakly coupled.

1 Introduction

Déterministe mais imprédictible, une dynamique chaotique s'explique par l'action conjointe dans l'espace des phases de deux mécanismes géométriques complémentaires : étirement et contraction, qui résulte le plus souvent d'un repliement [1,2]. L'étirement sépare inexorablement des trajectoires voisines suivant la direction instable, rendant l'évolution rapidement imprédictible, tandis que suivant la direction stable, la contraction rapproche des états initialement éloignés, maintenant ainsi la dynamique dans une région finie de l'espace des états.

La contraction fait que malgré l'instabilité de la dynamique, certaines orbites convergent l'une vers l'autre et deviennent indiscernables. Cela suggère que la dynamique asymptotique d'un système chaotique peut être caractérisée en termes de *singularités*, ou *catastrophes* [2], qui sont les outils mathématiques adaptés pour caractériser la non-inversibilité d'applications différentiables [3]. Cette idée devient naturelle et rigoureuse si on considère que le flot dans l'espace des phases induit une dynamique singulière dans la surface invariante qu'est une variété instable, en la repliant indéfiniment sur elle-même à chaque itération d'une application de premier retour dans une section de Poincaré (fig. 1) [2].

Lorsqu'un attracteur chaotique possède une seule direction instable, les singularités rencontrées sont alors du type le plus simple, le *pli*. C'est cette singularité qui est à l'origine du comportement chaotique d'applications d'un intervalle dans lui-même, telles que la célèbre suite logistique. Dans le cas des systèmes hyperchaotiques, qui présentent deux directions instables, il faut alors considérer les applications singulières d'une surface dans elle-même [2]. On montre mathématiquement que de manière générique, on observe alors des singularités d'ordre supérieur, à savoir des *fronces*, localisées au point de rencontre de lignes de pli [3].

Afin d'illustrer de manière simple la présence de singularités fronces dans des systèmes hyperchaotiques, nous nous sommes intéressés à des systèmes obtenus en couplant faiblement deux systèmes fortement dissipatifs à une seule direction instable, dont la dynamique est bien décrite par une application d'un intervalle dans lui-même. En deça de la synchronisation, on garde deux directions instables et il est facile de construire un plan de section constituant une bonne approximation de la variété instable. On met alors aisément en évidence la présence de singularités fronces dans la dynamique.

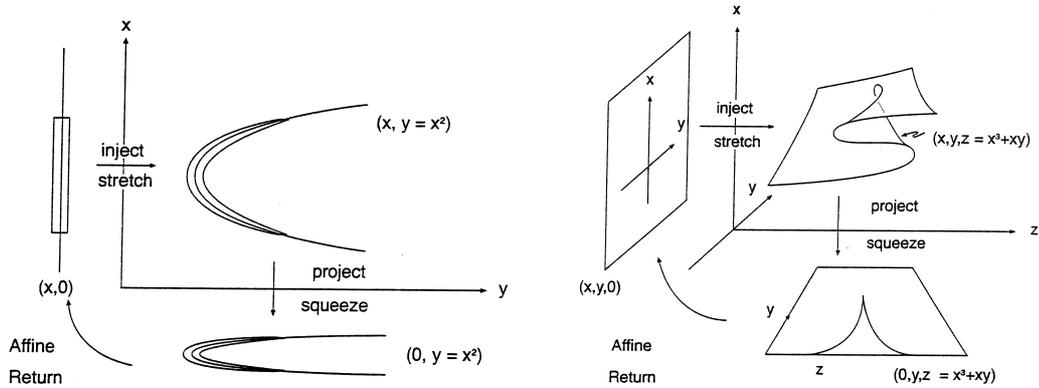


Fig. 1. Lorsqu'un système possède une seule direction stable, l'intersection de la variété instable d'un ensemble invariant (attracteur, point fixe ou orbite périodique) avec une section de Poincaré est une hypersurface de cette section. Considérons une série de sections de Poincaré qui découpent l'attracteur en tranches. Au fur et à mesure que l'on passe de section en section en suivant les trajectoires, la variété instable se déforme et se déplace dans la section avant de revenir sur sa position de départ, repliée sur elle-même pour compenser l'étirement. (a) Dans le cas d'une seule direction instable, la variété instable est une courbe à une dimension qui se déplace dans le plan, est étirée, repliée et réinjectée sur elle-même. Cela crée génériquement des singularités de type *pli*. (b) Quand il y a deux directions instables, la variété instable est une surface à deux dimensions qui évolue dans un espace à trois dimensions, est étirée, repliée et réinjectée sur elle-même. Cela crée de manière générique des singularités de type *fronce*, qui se situent au point de rencontre de deux lignes de pli (d'après Gilmore et Lefranc [2]).

Nous nous intéresserons tout d'abord au couplage de deux suites logistiques, associées chacune à une singularité de type pli. Nous montrerons analytiquement que de manière remarquable, le double pli laisse la place à une fronce pour un couplage arbitrairement petit, ce qui illustre la stabilité structurelle de cette dernière singularité dans un système hyperchaotique. Afin de démontrer la pertinence expérimentale de ce phénomène, nous décrirons ensuite l'interaction de deux résonateurs à diode [4,5] reliés par une liaison capacitive extrêmement faible. Nous verrons qu'une section de Poincaré du système couplé met clairement en évidence une fronce semblable à celle observée pour la double suite logistique couplée. Enfin, nous mettrons encore une fois en évidence l'apparition de fronces dans des simulations numériques de deux systèmes de Rössler couplés. Ces résultats constituent une première étape vers une classification topologique des systèmes chaotiques en termes de singularités [2].

2 Couplage de deux suites logistiques

Nous considérons ici le système itératif dans le plan constitué de deux suites logistiques agissant suivant les directions x et y , couplées l'une à l'autre par un petit terme d'amplitude ϵ :

$$x_{n+1} = a - x_n^2 - \epsilon y_n = f(x_n, y_n) \tag{1a}$$

$$y_{n+1} = a - y_n^2 - \epsilon x_n = g(x_n, y_n) \tag{1b}$$

Les figures 2a et 2b montrent les points du plan successivement visités par les itérations de (1), respectivement sans et avec couplage.

On sait le rôle que joue dans la dynamique de la suite logistique $x_{n+1} = a - x_n^2$ le point critique où l'application $x \rightarrow a - x^2$ est non inversible, c'est-à-dire le point singulier $x = 0$ où $\partial x_{n+1} / \partial x_n = 0$. En particulier, une partition de l'intervalle en régions situées à gauche et à droite du point critique fournit un codage symbolique naturel de la dynamique [1,2]. En ce qui concerne l'application du plan dans le

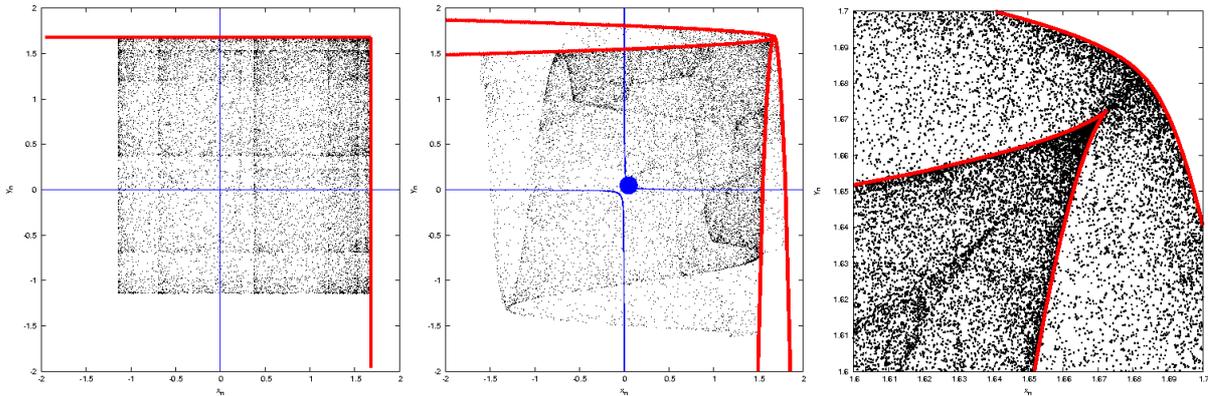


Fig. 2. Itérations de (1) pour $a = 1.68$ et (a) $\epsilon = 0$, (b),(c) $\epsilon = 0.1$. La figure (c) est un agrandissement de (b) centré autour de l'image de la fronce. Les lignes fines et bleues sont les lignes de singularités, les lignes épaisses et rouges sont leurs images. La fronce est située au point indiqué sur la ligne de pli supérieure de la figure (b), son image est le point de rebroussement visible en (b) et en (c).

plan définie par (1), elle perd son inversibilité aux points où s'annule le Jacobien

$$d = \det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2x_n & -\epsilon \\ -\epsilon & -2y_n \end{pmatrix} = 4x_n y_n - \epsilon^2 \quad (2)$$

L'ensemble des points singuliers où $\det J = 0$ est appelé une ligne de pli. Une telle ligne sépare des points ayant même image par l'application (1). La structure topologique des lignes de pli est très différente selon que les suites sont couplées ou non. Quand $\epsilon = 0$, les points singuliers sont disposés selon les lignes $x = 0$ et $y = 0$ (correspondant aux singularités des deux suites logistiques isolées), qui se coupent à l'origine. Ces deux lignes divisent le plan en quatre régions [fig. 2(a)]. Lorsque la constante de couplage ϵ est non nulle, on obtient deux lignes de plis paramétrées d'équation $y = \epsilon^2/4x$, qui n'ont maintenant aucune intersection et découpent donc le plan en trois régions [fig. 2(b)].

Ce changement brutal est dû à l'apparition quand $\epsilon \neq 0$ d'une singularité d'ordre supérieur, une *fronce*. On détecte cette dernière à la présence d'un point de rebroussement sur l'image de la ligne de pli en haut à droite, clairement visible sur la figure 2(c), qui indique que la restriction de l'application (1) à la ligne de pli de droite est elle-même singulière. Cette singularité dans la singularité constitue la signature de la fronce.

Les singularités d'une application différentiable $f : M \rightarrow N$ sont en effet organisées de manière hiérarchique [3]. L'espace M comporte typiquement un ensemble singulier de points où la différentielle df n'est pas de rang maximal. On considère alors la restriction de f à cet ensemble singulier, qui peut elle-même comporter des singularités d'ordre supérieur. Considérant alors la restriction à ces nouvelles singularités, on itère la construction jusqu'à ce qu'on se ramène à des singularités ponctuelles, de dimension 0, qui sont les singularités d'ordre le plus élevé du système. Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une application du plan dans le plan, qui présente typiquement des lignes de pli, où la différentielle est de rang 1 (le déterminant de la matrice Jacobienne est nul). De manière générique, les images de certaines lignes de pli se replient sur elle-mêmes, créant un point de rebroussement. Ce dernier est l'image d'un point singulier isolé situé sur la ligne de pli, un point fronce. Une fronce est une singularité générique pour les applications du plan dans le plan, et surtout *structurellement stable* : on ne peut la faire disparaître par une petite perturbation de l'application, de la même manière que l'existence d'un point de dérivée nulle pour une fonction de l'intervalle est robuste aux perturbations.

Techniquement, on localise la position du point fronce en exigeant que la différentielle de (1) soit nulle pour un déplacement le long de la ligne de pli $y = \epsilon^2/4x$. Cela revient à demander que le vecteur $t = (x, -\epsilon^2/4x)$ tangent à cette dernière soit dans le noyau de la matrice Jacobienne donnée en (2),

évaluée sur la ligne de pli. On a donc l'équation :

$$J.t = \begin{pmatrix} -2x & -\epsilon \\ -\epsilon & -\epsilon^2/2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\epsilon^2/4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

dont la solution est $x = \epsilon/2$, ce qui indique un point fronce localisé en $(\epsilon/2, \epsilon/2)$, et dont l'image est un point de rebroussement se trouvant en $(a - 3\epsilon^2/4, a - 3\epsilon^2/4)$.

Au delà de ces détails techniques, l'élément essentiel qu'il convient de retenir est que la singularité fronce est présente pour tout ϵ non nul, et donc pour des couplages arbitrairement faibles. Cela est en parfait accord avec l'idée évoquée à la section 1 selon laquelle un système hyperchaotique à deux directions instables est associé à une application singulière du plan dans le plan (décrivant la dynamique dans l'espace instable), une telle application présentant génériquement des singularités de type fronce [3].

3 Résonateurs à diode couplés

Afin de montrer que les propriétés mises en évidence dans un système modèle persistent dans un dispositif expérimental, nous nous sommes intéressés au système hyperchaotique constitué de deux résonateurs à diode [4] couplés par une très faible liaison capacitive, dont le schéma est donné à la figure 3. Il s'agit d'un dispositif très simple, mais qui présente une très grande richesse dynamique [5]. Dans nos expériences, une même tension sinusoïdale de fréquence 370 kHz est imposée à l'entrée des deux résonateurs. En sortie, on observe des régimes soit totalement décorrélés (pas de couplage), soit complètement synchronisés et donc avec une seule direction instable (couplage fort), soit enfin partiellement corrélés et hyperchaotiques. C'est bien évidemment la structure de ces derniers qui nous intéresse ici. Chaque résonateur à diode de la figure 3 est un système fortement dissipatif, dont la dynamique est très bien représentée par une application de premier retour [fig. 3(b)]. On s'attend donc à retrouver les structures de singularités mises en évidence dans les suites logistiques couplées de la section 2.

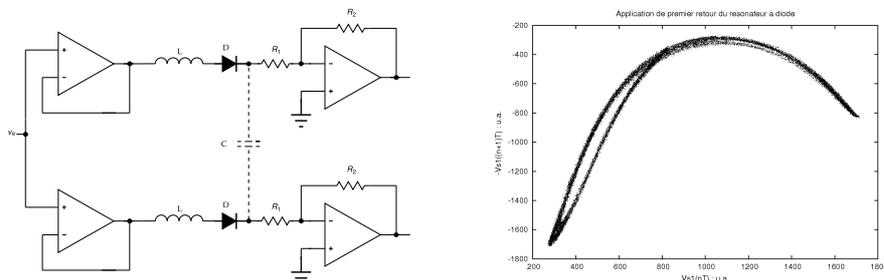


Fig. 3. (a) Circuit électronique composé de deux résonateurs à diode reliés par une faible liaison capacitive (qu'on peut estimer à une fraction de picroFarad). $R_2 = 1k\Omega$, $R_1 = 100\Omega$, $L = 2.2mH$. Les amplificateurs opérationnels LF356N n'interviennent pas dans la dynamique (ils évitent d'introduire un couplage supplémentaire à l'entrée, et convertissent un courant en tension à la sortie). Les diodes utilisées sont des 1N4007. (b) Application de premier retour stroboscopique d'un seul résonateur, obtenue en échantillonnant la tension de sortie à la fréquence de modulation, et en traçant la valeur d'un échantillon en fonction de celle du précédent.

C'est effectivement ce qu'on observe, comme le montre clairement la figure 4, qui représente des sections de Poincaré stroboscopiques, dont les coordonnées sont les deux tensions de sortie échantillonnées à la fréquence de modulation. La figure 4(a) montre bien qu'en l'absence de couplage, les distributions de probabilité des deux résonateurs sont totalement indépendantes (les images de lignes de pli sont verticales ou horizontales). Dès que l'on introduit un très faible couplage, la distribution de probabilité jointe se modifie significativement et laisse apparaître une structure globale où des signatures de fronces sont clairement visibles sous la forme de points de rebroussement, points de tangence entre des images de pli.

On observe clairement au moins deux points de rebroussement sur la figure 4(b) : celui en haut à droite est l'image du point fronce situé approximativement au milieu de la figure, celui en bas à gauche est l'image du précédent. Telles les caustiques d'un ensemble de rayons lumineux qui brillent car la lumière s'y concentre, les images de la fronce et des lignes de pli se détachent des points voisins par une intensité

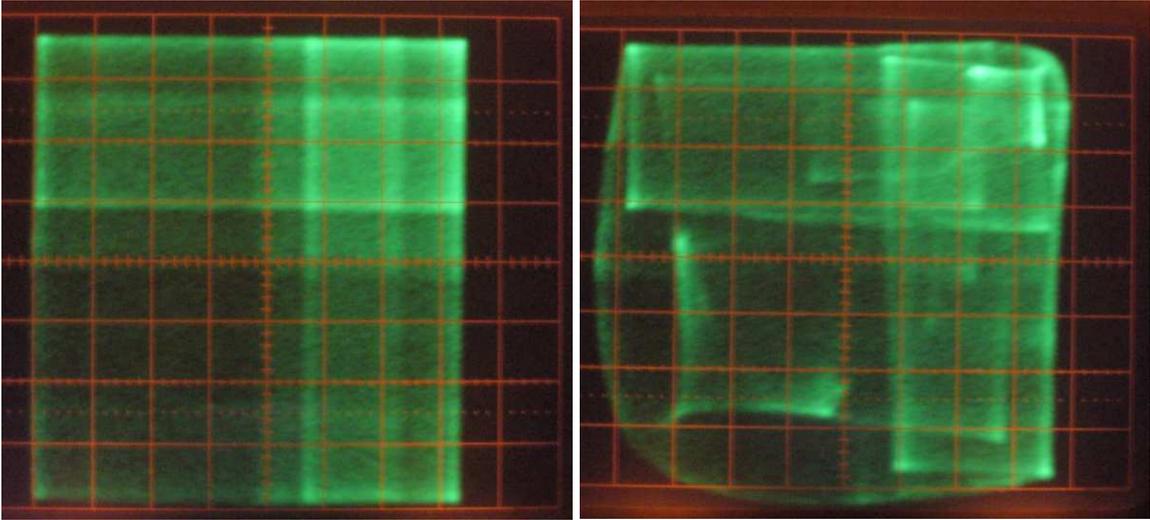


Fig. 4. Sections de Poincaré stroboscopiques d'un système de deux résonateurs à diode, dont les coordonnées sont les deux tensions de sortie échantillonnées à la fréquence de modulation. (a) Cas non couplé; (b) cas couplé. On distingue nettement l'apparition de l'image de la fronce en haut à droite et de son image en bas à gauche.

nettement supérieure. En effet, ces singularités focalisent les orbites des points de leurs voisinages et les concentrent autour de leurs images, induisant des pics de densité de probabilité, par le même mécanisme qui mène à la formation de l'arc-en-ciel, permettant ainsi de les visualiser facilement sur un oscilloscope.

4 Systèmes de Rössler couplés

Le système de Rössler [6] est certainement avec le système de Lorenz le système d'équations différentielles chaotique le plus utilisé de la littérature. Il présente une dynamique très dissipative, qui peut être facilement décrite par une application de l'intervalle dans lui-même semblable à celles que nous avons rencontrées pour les suites logistiques et les résonateurs à diode couplés. Nous considérons ici le couplage de deux systèmes de Rössler par un terme linéaire faisant intervenir les variables x et z , et décrit par les équations différentielles suivantes ($a = 0.42$, $b = 2$, $c = 4$) :

$$\dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \quad (4a)$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \quad (4b)$$

$$\dot{z}_1 = b - cz_1 + x_1z_1 + \epsilon[(x_1 - x_2) + (z_1 - z_2)] \quad (4c)$$

$$\dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) \quad (4d)$$

$$\dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \quad (4e)$$

$$\dot{z}_2 = b - cz_2 + x_2z_2 + \epsilon[(x_2 - x_1) + (z_2 - z_1)]. \quad (4f)$$

Ici encore, nous observons que l'activation du couplage induit une structure présentant des singularités fronces robustes, comme nous l'avons prédit analytiquement pour les suites logistiques couplées, et observé expérimentalement dans des résonateurs à diode couplés (fig. 5).

5 Conclusion

Le fait qu'un système hyperchaotique à deux directions instables soit associé à une dynamique irréversible dans la variété instable fait qu'il peut être caractérisé en termes de singularités d'une application du plan dans le plan. On sait mathématiquement que ces applications peuvent présenter de

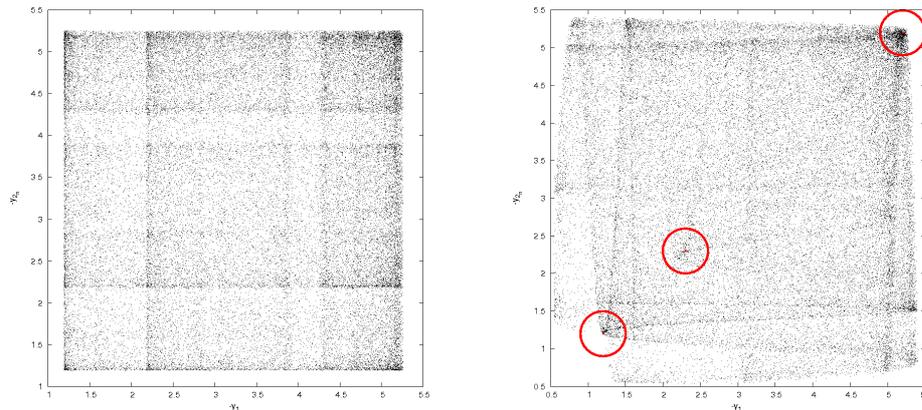


Fig. 5. Sections de Poincaré de coordonnées (y_1, y_2) montrant les intersections avec l'hyperplan $x = x_c$, où $x_c = (c - \sqrt{c^2 - 4ab})/2$ est la coordonnée du point fixe central du système non couplé. (a) Cas non couplé, $\epsilon = 0$, (b) Cas couplé, $\epsilon = 0.025$.

manière robuste des singularités de type fronce, et que ces dernières doivent donc jouer un rôle important dans la compréhension des flots hyperchaotiques de dimension 4. Bien que correspondant à un point isolé, une fronce organise la structure globale de l'espace des phases.

Dans ce travail, nous avons montré analytiquement qu'une fronce existait de manière stable dans le système constitué de deux suites logistiques couplées, même pour des valeurs arbitrairement faibles du couplage. Nous avons ensuite étudié expérimentalement le couplage de deux résonateurs à diode et effectué des simulations numériques de deux systèmes de Rössler couplés. Dans les deux cas, la dynamique peut être décrite assez précisément par une application de l'intervalle dans lui-même et on s'attend donc à ce que les conclusions obtenues dans le cas des suites logistiques couplées restent valables. C'est effectivement ce qu'on observe avec la mise en évidence claire de singularités de type fronce dans les sections de Poincaré de ces deux systèmes.

Cela confirme la conjecture que la structure des systèmes chaotiques de dimension supérieure ne pourra être complètement élucidée sans entreprendre une classification de leurs singularités sous-jacentes, et souligne l'importance de la théorie des singularités et des catastrophes pour l'étude du chaos déterministe. On s'attend en effet à ce que dans les cas où le nombre de directions instables est supérieur à deux, on puisse rencontrer de manière stable des singularités d'ordre supérieur, telles que la queue d'aronde, les différents ombilics ou... le papillon.

Références

1. E. OTT, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
2. R. GILMORE AND M. LEFRANC, *The Topology of Chaos* (Wiley, New York, 2002). R. GILMORE AND C. LETELLIER, *The Symmetry of Chaos*, (Oxford University Press USA, 2007). R. GILMORE, C. LETELLIER AND M. LEFRANC, Chaos Topology, *Scholarpedia* **3**(7), 4592 (2008) (http://www.scholarpedia.org/article/Chaos_topology)
3. V. ARNOLD, A. VARCHENKO, AND S. M GUSEIN-ZADE, *Singularités des applications différentiables* (Edition Mir, Moscou, 1986). R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse* (InterÉditions, Paris, 1972). R. GILMORE, *Catastrophe theory for scientists and engineers* (Dover, 1993).
4. P. LINSAY, Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1349–52 (1981). J. TESTA, J. PEREZ AND C. JEFFRIES, Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 714–717 (1982)
5. R. VAN BUSKIRK AND C. JEFFRIES, Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators, *Phys. Rev. A* **31**, 3332–3357 (1985)
6. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A* **57**, 397–398 (1976).