

Instabilité convective en milieu inhomogène : la réponse impulsionnelle dans le sillage sous-critique d'un cylindre.

C. Marais¹, R. Godoy-Diana¹, D. Barkley² & J.E. Wesfreid¹

¹ PMMH, Equipe Instabilités, Contrôle et Turbulence
CNRS ESPCI, Univ. Paris 6 et Paris 7.

² Mathematics Institute, University of Warwick
marais@pmmh.espci.fr

Abstract. We study experimentally the impulse response of a cylinder wake below the critical Reynolds number of the Bénard-von Kármán instability. In this subcritical regime, a localized inhomogeneous region of convective instability exists which determines an initial perturbation to be transiently amplified. The aim of this work is to quantify the evolution of this convective instability using 2D particle image velocimetry in a hydrodynamic tunnel experiment. The velocity fields allow us to describe the evolution of the wave packet in terms of two control parameters : the Reynolds number and the strength of the imposed perturbation. Then we could characterize the wave packet's behavior function of these parameters. The temporal evolution of the energy exhibits a transient algebraic growth at short times followed by an exponential decay.

1 Introduction

L'écoulement derrière un cylindre est le prototype le plus classique pour l'étude des instabilités hydrodynamiques dans des écoulements décollés. En effet, le cas académique de sillage bidimensionnel peut être utilisé comme modèle de base pour des situations aussi variées que l'écoulement derrière un câble, autour d'une aile d'avion ou de piliers de ponts. Lorsque le nombre de Reynolds atteint une certaine valeur critique ($Re_c \approx 47$ dans le cas d'un cylindre infiniment long, [3]), il apparait dans le sillage du cylindre une double-allée de tourbillons alternés émis à une fréquence caractéristique globale : la fameuse allée de Bénard-Von Karman. Cette apparition est due à la transition de l'instabilité d'un état initialement convectif vers un état absolu. Une instabilité est dite convective si elle croit tout en étant advectée avec l'écoulement (elle décroît donc pour toute position fixe), et absolue si elle croit sur place (Fig. 1). La vitesse du front de propagation de l'instabilité peut servir de critère pour distinguer une instabilité convective d'une instabilité absolue, celle-ci étant nulle dans le cas absolu [4]. Dans le régime sous-critique ($Re < Re_c$) nous pouvons observer une amplification transitoire de toute perturbation initiale (Fig. 1 (droite)). Très peu d'études expérimentales portent sur ce régime, et la croissance transitoire n'a pas été correctement mise en évidence faute de mesures quantitatives. Nous cherchons donc à analyser ce phénomène afin d'en obtenir ses comportements clé. Après description du montage expérimental, nous nous intéressons tout d'abord à l'évolution du paquet d'ondes instable. La décroissance vers zéro des vitesses de groupe et de front arrière du paquet quand le seuil d'instabilité globale est approché confirme la transition vers une instabilité absolue. De plus, l'évolution du maximum de la perturbation, de sa position dans l'espace et dans le temps en fonction de nos paramètres de contrôle : force de perturbation et écart au seuil, nous permet de caractériser le comportement sous critique du paquet. Ensuite, afin de quantifier le phénomène de croissance transitoire dû à l'inhomogénéité du milieu, nous analysons l'évolution temporelle de l'énergie de perturbation. Celle-ci présente une croissance algébrique transitoire aux temps courts suivie d'une décroissance exponentielle aux temps longs.

2 Montage Expérimental

Un cylindre de diamètre 5 mm est placé dans un tunnel hydrodynamique de section 100mm x 100mm (Fig. 2 gauche). En utilisant la vitesse d'écoulement entrante dans le tunnel U_0 (nous avons choisi

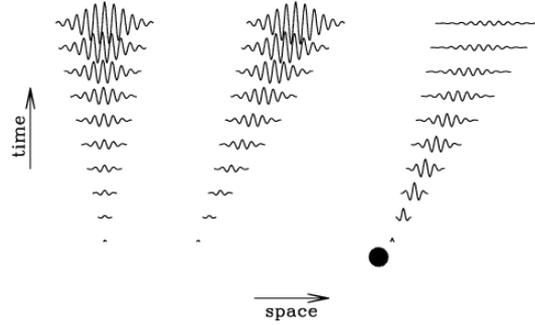


Fig. 1. Schéma des instabilités absolue et convective : nous imposons une perturbation infinitésimale, localisée dans l'espace. A gauche, la perturbation croît sur place : l'instabilité est dite absolue. Au milieu, à une position fixée, la perturbation décroît : l'instabilité est dite convective. A droite, en milieu inhomogène, pour des écoulements à géométrie complexe, nous pouvons aussi observer des régions locales d'instabilité convective entourées par des régions de stabilité : la perturbation commence initialement par croître et est simultanément advectée avec l'écoulement jusque dans une région de stabilité dans laquelle la perturbation décroît [1].

la valeur maximale du profil de la vitesse entrante) et la viscosité du fluide ν , le nombre de Reynolds est défini par : $Re = \frac{U_0 * D}{\nu}$. Le nombre de Reynolds critique pour nos expériences est $Re_c \approx 64$, ce qui est supérieur au cas idéal 2D. Cette différence est majoritairement due aux effets de confinement. Nous ajustons le nombre de Reynolds du sillage en contrôlant la vitesse d'écoulement dans le tunnel U_0 . Afin de pouvoir comparer nos résultats avec n'importe quelle autre situation, nous avons défini le nombre de Reynolds réduit $\epsilon = (Re - Re_c)/Re_c$, qui correspond à l'écart au seuil d'instabilité globale. Dans nos expériences, ϵ varie de -0.30 à -0.04. Pour cet interval de nombre de Reynolds, l'écoulement reste strictement bi-dimensionnel. Ainsi, nous avons choisi de travailler dans le plan à mi-hauteur du cylindre pour faire nos mesures. La hauteur du cylindre est de 98 mm, et couvre donc la quasi-totalité de la hauteur de la section test du tunnel. Nous avons utilisé un système de coordonnées cartésien, dont l'origine est le centre du cylindre, avec l'axe des x pointant dans la direction de l'écoulement et l'axe des z parallèle à l'axe du cylindre (donc vertical). L'axe du cylindre peut être mis en rotation par un moteur pas à pas, que l'on contrôle via un module électronique à micro-pas programmable. L'impulsion est un mouvement très bref de rotation du cylindre autour de son axe, avec une amplitude finie choisie, pendant un temps τ . Ainsi, nous pouvons varier la perturbation via la vitesse angulaire et/ou l'amplitude du mouvement du cylindre à partir de sa position initiale. Dans nos expériences, nous utilisons trois amplitudes de perturbations, la plus faible étant donnée par la plus petite perturbation nous donnant une réponse observable dans le sillage : $V_{yp}/U_0 = 75, 100$ et 125 (Fig. 2 droite). Ce choix de perturbations nous permet d'obtenir un temps de perturbation adimensionné constant : $t/\tau_{adv} \approx 0.2$, où $\tau_{adv} = d/U_0$ est le temps de convection construit avec la vitesse d'entrée dans le tunnel et le diamètre du cylindre d . Une observation qualitative de l'évolution du paquet d'ondes généré par la perturbation peut être obtenue par visualisation des lignes d'émissions (Fig. 3 gauche). Nous injectons du colorant (la fluorescéine) à l'aide de tubes capillaires. Plusieurs filets de colorant régulièrement espacés le long de la largeur du tunnel arrivent donc sur le cylindre, de part et d'autre de celui-ci et se déforment à cause du paquet d'ondes instable (voir aussi [2]). Pour faire nos mesures, nous utilisons la méthode de Vélocimétrie par Image de Particules à deux dimensions (PIV 2D) dans le même plan horizontal à mi-hauteur du cylindre (Fig. 3 droite). L'acquisition PIV et le post traitement ont été réalisés par l'intermédiaire du système LaVision, avec une caméra Phantom 1600*1200 permettant d'enregistrer jusqu'à 1000 images par seconde et un laser continu. L'intervalle de temps (δt) entre deux images successives a été fixé à 20 ms. Nous avons ensuite utilisé le logiciel Matlab et la boîte à outils PIVMat pour traiter et analyser les données.

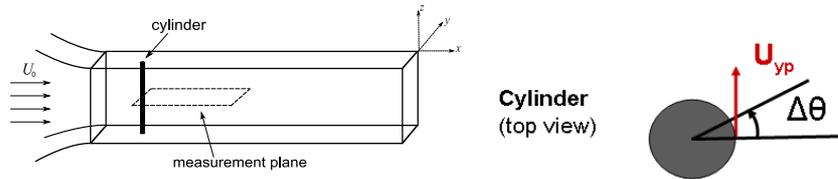


Fig. 2. Schema du montage expérimental dans le tunnel hydrodynamique (gauche) et vue schématique du dessus du cylindre avec la définition de la perturbation (droite).

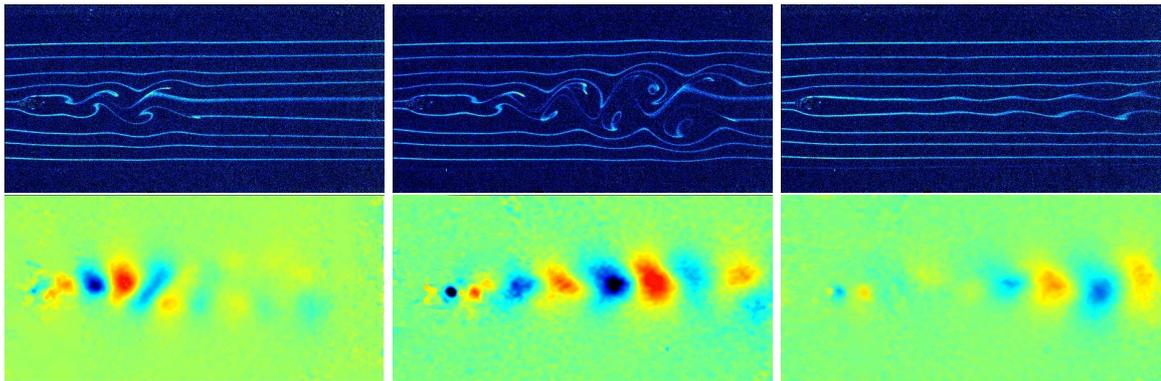


Fig. 3. Visualisation de la réponse impulsionnelle : (haut) Visualisation avec de la fluoresceine des lignes d'émission (bas) Champ instantané de la vitesse transverse avec la PIV.

3 Evolution du paquet d'ondes instable

La quantité la plus appropriée pour étudier l'évolution du paquet d'onde convectif produit par la perturbation initiale est la vitesse transverse V_y . En effet, celle-ci est nulle sur l'ensemble de l'axe de symétrie $y = 0$ lorsque l'écoulement n'est pas perturbé. Ainsi, pour chaque image de champ de vitesse d'une série temporelle, nous avons sélectionné les profils de V_y le long de l'axe des x , sur l'axe de symétrie du sillage $y = 0$. En empilant ces profils successifs, un diagramme spatio-temporel peut être construit. Nous avons aussi représenté le diagramme spatio-temporel associé aux enveloppes successives des profils de V_y le long de l'axe des x ¹, afin de visualiser l'évolution de l'ensemble du paquet d'ondes. La nature convective du sillage est mise clairement en évidence sur les diagrammes spatiotemporels. Un exemple est donné dans la figure 4 (haut gauche et milieu). Ces deux diagrammes nous permettent de définir la vitesse de phase V_p comme la vitesse de translation de chaque vortex dans le paquet d'ondes, et la vitesse de groupe comme la vitesse de l'ensemble du paquet. Nous avons aussi défini les vitesses de front (avant et arrière), ce qui nous permet d'obtenir une meilleure représentation de l'évolution de la forme globale du paquet d'ondes plutôt que la seule vitesse de groupe. Nous avons défini la position de ces fronts aux points d'inflexion de l'enveloppe de V_y ² (Fig. 4 haut droite). Nous pouvons noter que la vitesse du front avant " V_g^+ " est équivalente à la vitesse de phase, puisque le front est déterminé par le premier vortex détaché du cylindre. Nous examinons le comportement de ces différentes vitesses quand $\epsilon \rightarrow 0$ (c'est-à-dire quand $Re \rightarrow Re_c$). Nous nous attendons à ce que les vitesses de groupe et de front arrière se propagent de plus en plus lentement lorsque le seuil d'instabilité global est approché puisque l'instabilité devient absolue au seuil, et que par définition V_g et " V_g^+ " doivent être nulles dans ce cas. L'angle de ces vitesses avec la verticale, c'est-à-dire avec l'axe du temps, devrait donc diminuer.

¹ L'enveloppe des profils de V_y est obtenue en prenant la valeur absolue de la transformée de Hilbert de V_y .

² Pour chaque temps, nous appliquons un fit sur chaque partie (croissante et décroissante) du profil de l'enveloppe avec une fonction en tangente hyperbolique. Les points d'inflexion de cette enveloppe nous donnent alors la position des fronts.

D'après la figure 4 (bas gauche) la vitesse de phase, normalisée par la vitesse dans le tunnel, semble légèrement décroître quand le nombre de Reynolds réduit ϵ approche la valeur zéro. La valeur de V_p/U_0 pour $\epsilon \rightarrow 0$ se compare bien avec la valeur de ≈ 0.88 reportée dans la littérature [5] pour le régime supercritique ($\epsilon > 0$). Il est donc raisonnable de supposer que la vitesse de phase tend vers cette valeur constante quand nous approchons le seuil. D'après la figure 4 (bas milieu), nous observons une décroissance de la vitesse de groupe qui tend vers zéro quand ϵ approche le seuil. De même sur la figure 4 (bas droite), la vitesse du front arrière décroît vers la valeur zéro. Ce comportement des deux vitesses confirme donc la transition vers une instabilité absolue.

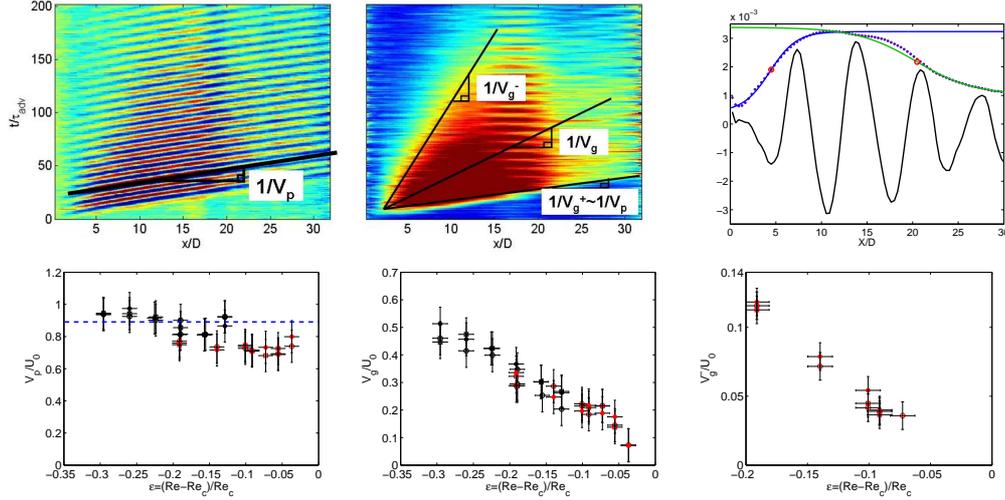


Fig. 4. (haut) Diagrammes spatiotemporels avec les différentes vitesses étudiées (droite et milieu) puis Détermination de la position des fronts à un temps fixé (gauche). L'échelle de couleur représente (gauche) l'amplitude $V_y(x, t)$, (milieu) l'amplitude de l'enveloppe de $V_y(x, t)$. (bas) Evolution des vitesses de phase (gauche), de groupe (milieu), et de front arrière (droite), en fonction du nombre de Reynolds réduit ϵ . La ligne en pointillée correspond à la valeur de V_p/U_0 pour le sillage de Bénard-von Kàrmàn ($Re > Re_c$). Les points expérimentaux sont représentés comme suit : \bullet : petite perturbation, \circ : moyenne perturbation, \square : forte perturbation.

De plus, nous avons repéré sur chaque diagramme spatio-temporel le maximum de l'amplitude V_y de l'instabilité que l'on note A_{max} , avec sa position en temps T_{max} et sa position dans l'espace X_{max} correspondantes comme illustré sur la figure 5 (haut gauche)). Toutes les quantités sont adimensionnées. Nous pouvons observer que plus l'on se rapproche du seuil d'instabilité globale ($\epsilon \rightarrow 0$), plus A_{max} croît, tandis que X_{max} diminue (le maximum de l'instabilité se rapproche donc du cylindre) et T_{max} reste constant. De plus, pour une valeur donnée de ϵ , plus la force de perturbation est importante, plus la réponse A_{max} augmente, et sa position X_{max} décroît. Le temps T_{max} reste indépendant de la force de perturbation (Fig. 5).

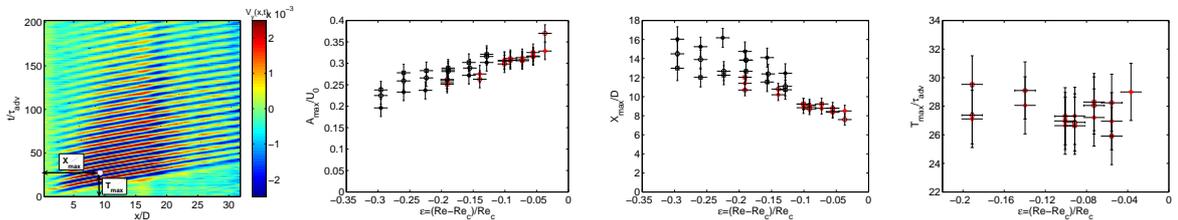


Fig. 5. (Respectivement de gauche à droite : Définition du maximum de l'instabilité sur le diagramme spatio-temporel puis evolution du maximum de la perturbation, de sa position dans l'espace et de sa position dans le temps, en fonction du nombre de Reynolds réduit ϵ .

4 Croissance transitoire

Dans chaque type de diagramme spatiotemporel, en plus du caractère convectif de l'instabilité clairement mis en évidence, nous pouvons remarquer la décroissance de l'instabilité aux temps longs. Cette propriété est due à l'inhomogénéité de la géométrie de l'écoulement : la région localisée derrière le cylindre dans laquelle l'instabilité est convective est entourée en amont et en aval par des régions de stabilité. Ainsi, la perturbation localisée croît initialement, dû aux caractéristiques locales de l'écoulement près du cylindre, et est simultanément advectée en aval dans une région de stabilité dans laquelle la perturbation décroît [1]. Nous observons une réponse transitoire due à cette instabilité convective locale : la croissance transitoire. Pour approfondir notre approche du phénomène de croissance transitoire, nous avons réalisé une étude de l'énergie qui nous permet de la mettre en évidence. Nous définissons l'énergie à partir de nos mesures comme suit :

$$E(t) = \int \int_{\Delta} [v_y^2 + v_x^2] dx dy = \int \int_{\Delta} [(V_y - V_{ybase})^2 + (V_x - V_{xbase})^2] dx dy \quad (1)$$

Nous ne pouvons pas accéder à l'énergie réelle de la perturbation à cause de notre fenêtre d'observation fixe, qui ne nous permet pas de calculer la contribution à l'énergie des vortex situés en dehors. Une façon de comparer tout de même l'énergie associée aux différentes expériences, avec des valeurs différentes de ϵ est de limiter l'aire d'intégration en aval à la position à laquelle le maximum de l'instabilité est atteint. Ainsi, l'aire d'intégration Δ choisie est un rectangle contenu dans notre plan de mesure, qui évite les couches limites des bords du tunnel, et limité en amont par le cylindre et en aval par la position X_{max} (Fig. 6). Nous adimensionnons l'énergie par sa valeur E_0 avant l'impulsion. Nous avons déterminé cette valeur en extrapolant à zéro les courbes de l'évolution temporelle de l'énergie. La valeur obtenue est la même quelque soit l'expérience. Elle est donc indépendante de ϵ et vaut $0.76 \times 10^{-9} m^4/s^2$. L'évolution temporelle de l'énergie montre deux comportements différents en fonction du temps : aux temps courts, nous observons une croissance transitoire algébrique, tandis qu'aux temps longs l'énergie décroît vers sa valeur non perturbée initiale (Fig. 7 gauche). Le comportement aux temps longs correspond à la décroissance exponentielle d'un mode normal dans une région stable, ce qui est un problème bien connu. Il est intéressant de représenter sur un même graphe les courbes du logarithme de l'énergie en fonction du temps pour chaque expérience, afin de visualiser l'évolution du taux de décroissance avec ϵ . En effet, aux temps longs, le taux de décroissance est donné par la pente de ces courbes. Ainsi nous pouvons clairement observer que lorsque nous approchons le seuil de l'instabilité globale $\epsilon = 0$, le taux de décroissance diminue en tendant vers la valeur zéro (Fig. 7 droite). En effet, c'est la définition même du seuil de l'instabilité globale, qui impose un taux de décroissance nul quand le seuil est atteint. Maintenant nous nous concentrons sur le comportement de l'énergie aux temps courts, qui lui n'est pas trivial. Dans notre expérience, c'est l'inhomogénéité du milieu qui entraîne la non-normalité de l'opérateur de stabilité associé, et donc aussi la non-orthogonalité des modes globaux correspondants. Or la superposition de ces modes globaux décroissants peut entraîner une amplification transitoire de l'énergie de perturbation aux temps courts. C'est donc ce que nous observons. Pour essayer de caractériser cette croissance, nous avons repéré sur chaque courbe d'énergie le maximum de l'énergie E_{max} et le temps pour lequel ce maximum est atteint τ_{max} . Nous obtenons pour ces quantités, en fonction de ϵ les graphes suivants (Fig. 8) : le maximum E_{max} croît avec ϵ tandis que le temps τ_{max} reste constant.

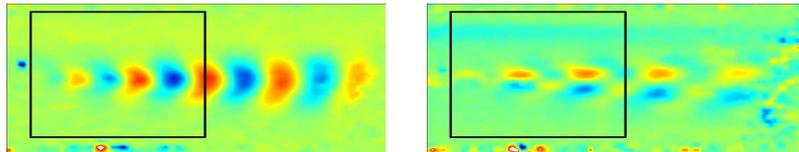


Fig. 6. Illustration de l'aire d'intégration utilisée pour le calcul de l'énergie, sur les champs de vitesses instantanés V_y (gauche) et V_x (droite) à un temps donné après l'impulsion.

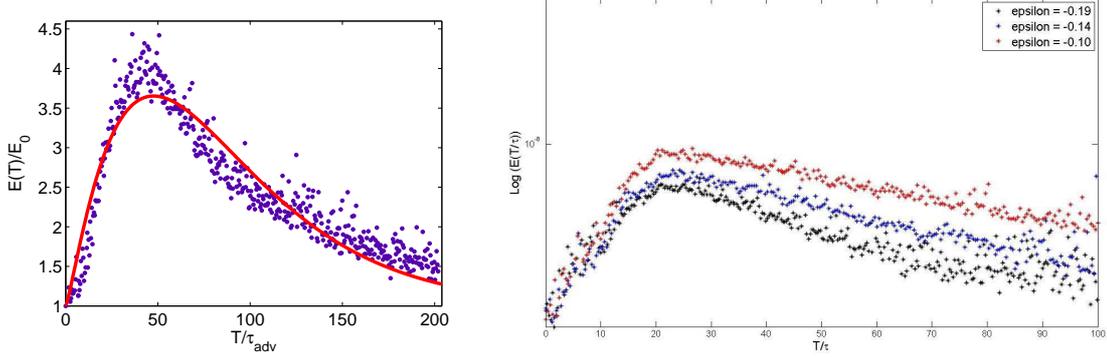


Fig. 7. (gauche) Evolution de l'énergie en fonction du temps. La courbe rouge représente le fit : $a * t * \exp(-bt)$, qui rend bien compte de la croissance transitoire aux temps courts et de la décroissance exponentielle aux temps longs. (droite) Evolution du logarithme de l'énergie en fonction du temps, pour trois valeurs différentes du nombre de Reynolds réduit ϵ . Au fur et à mesure que nous approchons le seuil d'instabilité globale ($\epsilon = 0$), la pente aux temps longs (ie le taux de décroissance de l'instabilité) diminue vers la valeur zéro.

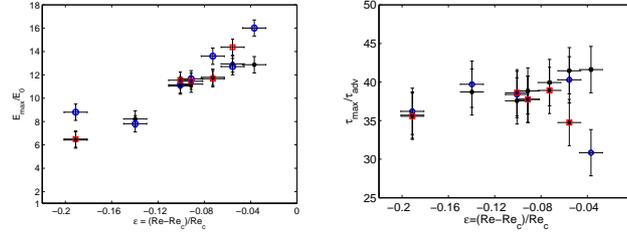


Fig. 8. (gauche) Evolution du maximum de l'énergie et (droite) évolution du temps correspondant, en fonction du nombre de Reynolds réduit ϵ . Les points expérimentaux sont représentés comme suit : \bullet : petite perturbation, \circ : moyenne perturbation, \square : forte perturbation.

5 Conclusions

Cette étude expérimentale nous a permis de caractériser quantitativement la croissance transitoire des paquets d'ondes convectivement instable dans le sillage d'un cylindre en régime sous-critique. L'évolution temporelle de l'énergie montre clairement une croissance transitoire algébrique aux temps courts, suivie d'une décroissance exponentielle aux temps longs. Bien que la croissance transitoire soit souvent associée à une transition vers la turbulence, ce n'est pas le cas ici. Le comportement des vitesses de fronts et de groupe est cohérent avec une transition d'une instabilité convective à absolue au seuil d'instabilité globale, car elles diminuent et tendent vers zéro au seuil. Enfin, il existe dans le sillage un maximum d'instabilité bien défini. La valeur de ce maximum ainsi que sa position en aval du cylindre dépendent du nombre de Reynolds et de la force de perturbation, tandis que sa position en temps reste constante.

Références

1. H. M. BLACKBURN, D. BARKLEY & S. J. SHERWIN, Convective instability and transient growth in flow over a backward-facing step, *Journal of Fluid Mechanics*, **603** (2008).
2. P. LE GAL & V. CROQUETTE, Visualization of the space-time impulse response of the subcritical wake of a cylinder, *Physical Review E*, **62**, (2000).
3. M. PROVANSAL *et al.*, Bénard-von kármán instability : transient and forced regimes, *J. Phys. Lett.*, **45**, (1987).
4. W. VAN SAARLOOS, Front propagation into unstable states, *Physical Reports*, **29**, (2003).
5. C. H. K. WILLIAMSON, Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, **206**, (1989).