

Sédimentation de particules en présence de convection thermique. Application à la séparation métal-silicate dans l'océan de magma terrestre initial

Guillaume Lavorel & Michael Le Bars

IRPHE - UMR 6594 Technopôle de Château-Gombert
49, rue Joliot Curie - B.P. 146 13384 Marseille Cedex 13, France
lavorel@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. L'étude de la sédimentation de particules dans un fluide en convection est d'un grand intérêt pour la compréhension de certains processus intervenant dans les systèmes géophysiques, comme la dynamique de la séparation métal-silicate dans l'océan de magma apparu durant la formation de la Terre. Dans cette perspective, nous avons mis au point une expérience permettant de quantifier au cours du temps la vitesse de sédimentation de billes denses dans un fluide en convection ainsi que la fraction solide en suspension en fonction de la vigueur de la convection (caractérisée par le nombre de Rayleigh Ra) et l'intensité de la stratification (caractérisée par le rapport $\frac{\Delta\rho}{\rho}$). Nous observons systématiquement deux phases : (i) une sédimentation initiale, rapide où l'inertie du mélange initial est prépondérante ; (ii) un régime final où l'évolution de la fraction solide en suspension au cours du temps est correctement décrite par une équation de convection-diffusion, obtenue en introduisant un flux diffusif de particules dû à la turbulence. Nous pouvons alors obtenir des lois d'échelle des grandeurs physiques en fonction de Ra et $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, en accord avec les résultats expérimentaux.

Abstract. The sedimentation of particles from a convecting fluid is a process of great interest in geophysics, as for instance to understand the dynamics of metal-silicate separation in a terrestrial magma ocean during the Earth's formation. Our work is based on an experimental approach which permits to quantify the settling velocity of the particles in a convecting fluid and the solid fraction of particles in suspension, as a function of the vigor of the convection (characterized by the Rayleigh number Ra) and the intensity of the buoyancy (characterized by the ratio $\frac{\Delta\rho}{\rho}$). We systematically observed two stages : (i) a rapid initial settling, where the inertia of the initial stirring is predominant ; (ii) a final regime where the evolution of the solid fraction in suspension through time is correctly described by a diffusion-convection equation, where we have introduced a diffusive flux of particles due to the turbulent convection. We define scaling laws for the physical parameters as a function of Ra and $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, in agreement with the experimental results.

1 Introduction.

L'étude de la sédimentation de particules dans un fluide mis en mouvement sous l'effet de la convection présente un intérêt majeur, notamment en géophysique. Par exemple, une description des mécanismes mis en jeu est fondamentale pour mieux comprendre la dynamique de la séparation métal-silicate dans l'océan de magma apparu pendant la formation de la Terre. Durant cette période, des impacts de planétésimaux sur la proto-Terre ont engendré l'augmentation de la température de plusieurs milliers de degrés, formant alors, par fusion de l'enveloppe terrestre, des océans de magma constitué de silicate et de gouttelettes de fer. Un des objectifs de notre étude est de comprendre dans quelle mesure la convection thermique, présente dans l'océan de magma terrestre initial, a pu influencer la sédimentation des gouttelettes métalliques. Nos résultats peuvent aussi s'appliquer à la cristallisation des chambres magmatiques. Ici, il s'agit d'étudier l'influence de la convection thermo-chimique sur la cristallisation, en particulier de savoir si elle permet de maintenir les cristaux en suspension jusqu'à la solidification complète de l'alliage. De tels problèmes faisant intervenir la convection et la sédimentation apparaissent également dans de nombreux autres systèmes naturels, par exemple la dispersion des particules polluantes dans l'atmosphère.

Notre travail, de nature expérimentale, a pour but de compléter et relier les résultats de trois articles précédents. Premièrement, dans le papier [6], Martin et Nokes ont étudié expérimentalement la sédimentation de billes de polystyrène dans une cuve d'eau en convection turbulente. Ils ont démontré que le nombre de particules N en suspension décroît exponentiellement en fonction du temps : $N = N_0 \exp(-\frac{v_s t}{H})$, où H est la hauteur de la cuve, N_0 le nombre de particules en suspension à l'instant initial, v_s la vitesse de Stokes définie par $v_s = \frac{2}{9} \frac{\Delta \rho g R^2}{\eta}$, $\Delta \rho$ la différence de masse volumique entre les particules et le fluide, g l'accélération de la pesanteur, R le rayon moyen des billes et η la viscosité dynamique du fluide. Leur étude suggère que la convection n'a aucune influence sur la sédimentation. Solomatov *et al.* [8] se sont ensuite concentrés sur le mécanisme de réentraînement des billes par la convection à partir d'un lit de particules. En fonction du rapport entre la contrainte de cisaillement due à la convection et la poussée d'Archimède sur la particule, ils démontrent (i) qu'il existe une valeur critique discriminant le régime sans mouvement dans le lit de particules du régime d'entraînement des particules et (ii) qu'il est possible de quantifier la fraction volumique de particules en suspension une fois l'état statistiquement stationnaire atteint. Enfin, Hoink *et al.* [4] ont étudié numériquement le problème et distingué deux cas : le "temperature-dominated case" (T-dominated), où les gouttelettes sont advectées par l'écoulement, et le "droplet-dominated case" (C-dominated), où les mouvements de convection ne sont pas suffisamment vigoureux pour maintenir les particules en suspension. Selon leur diagramme de phase, la distinction entre les deux régimes dépend (i) du nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\alpha_T g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$, où α_T est le coefficient de dilatation thermique du fluide, ν la viscosité cinématique, κ la diffusivité thermique du fluide et ΔT la différence de température entre le bas et le haut de la cuve et (ii) du nombre de flottabilité $B = \frac{\Delta \rho}{\rho \alpha_T \Delta T}$. Ces trois études traitent du même problème mais il n'existe pas de contexte général qui permet de les unifier, ce que nous allons faire dans ce papier.

2 Dispositif expérimental.

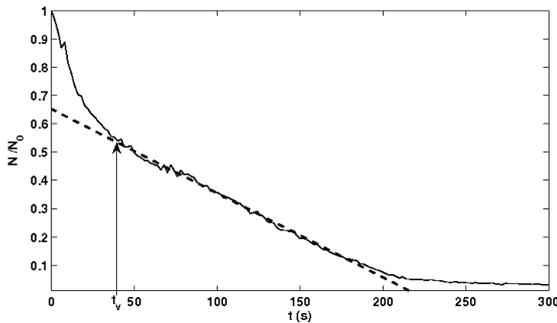


Fig. 1. Proportion de particules par rapport au nombre de particules initial N_0 en fonction du temps, sans convection. t_v correspond au temps visqueux de dissipation du mélange initial. Après t_v , la sédimentation suit une loi de Stokes décrite par $N(t) = N_{t_v} (1 + \frac{v_s}{H}(t - t_v))$ (droite en traits pointillés).

tendance à rester à la surface, à cause de la tension superficielle existant à l'interface eau/air. Enfin, les particules de PMMA sont légèrement poreuses et peuvent s'entourer d'un film d'air, changeant leur densité apparente entre deux expériences. Afin de minimiser ces désagréments, nous avons choisi de laisser les particules à demeure dans l'eau salée de façon à les saturer. Pour distribuer initialement les particules, nous agitons la solution avec un système de deux aimants, un à l'intérieur et un à l'extérieur de la cuve. Nous suivons ensuite l'évolution statistique des particules en suspension avec une camera. Un traitement numérique des images permet de quantifier le nombre de particules en suspension. Notre système est caractérisé par quatre nombres sans dimension : le nombre de Rayleigh défini précédemment, l'intensité de

Notre dispositif est constitué d'une cuve (dimensions $20 \times 4 \times 20$ cm) chauffée par le dessous et refroidie par le dessus grâce à deux plaques de cuivre dont la température est régulée. Les particules qui sédimentent sont des billes de PMMA de rayon R égal à $(300 \pm 50) \mu\text{m}$ et de densité ρ_p égale à (1.188 ± 0.001) . Le fluide utilisé est de l'eau dans laquelle a été dissout du sel NaCl à différentes concentrations de façon à augmenter la densité ρ (jusqu'à 1.200). La cuve est éclairée par son côté court par un plan lumineux rendant les particules clairement visibles. Initialement, les particules sont distribuées uniformément dans toute la cuve. Pour se faire, nous avons essayé deux méthodes. La première consiste à introduire les particules par le haut, ce qui rompt l'équilibre de la convection thermique. En outre, les particules ont

la flottabilité chimique est quant à elle caractérisée par le rapport $\frac{\Delta\rho}{\rho}$. Ensuite, le rapport d'aspect R/H caractérise la taille relative des particules par rapport à la taille typique du système. Enfin, le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ compare la diffusion de la quantité de mouvement à la diffusion thermique. Nous avons choisi ces nombres typiques pour décrire le système parce qu'ils présentent l'avantage de pouvoir être modifiés expérimentalement de façon indépendante, contrairement au nombre B défini en introduction.

3 Observations et modélisation.

Nous avons d'abord étudié le comportement statistique des billes en l'absence de convection. Lors de la décroissance du nombre de particules N en suspension en fonction du temps t , nous avons systématiquement observé deux phases (Fig. 1). La première correspond à la sédimentation en présence des mouvements liés au mélange initial nécessaire pour mettre les billes en suspension. Elle disparaît au bout d'un temps visqueux correspondant au temps mis par le mélange initial pour s'atténuer par dissipation. Cette phase est très sensible aux caractéristiques du mélange, en particulier à la longueur caractéristique sur laquelle il est effectué. Nous avons donc pris soin d'effectuer le mélange toujours de la même façon. Après t_v , les particules sédimentent à la vitesse de Stokes v_s , créant ainsi un front de sédimentation. Une simple loi de conservation du nombre de particules total au cours du temps permet de retrouver une loi de décroissance linéaire :

$$N(t + dt) = N(t) - A\phi v_s dt \quad (1)$$

où A désigne l'aire de la base de la cuve et ϕ est la concentration volumique de particules dans le fluide. La distribution de particules dans le front étant quasi-uniforme et constante dans le temps, ϕ est égale à $\frac{N_{t_v}}{AH}$ où $N_{t_v} = N(t = t_v)$ est le nombre de particules présentes en suspension au moment où la sédimentation de Stokes devient prépondérante sur l'inertie du mélange initial. La résolution de l'équation 1 donne

$$N(t) = N_{t_v} \left(1 + \frac{v_s}{H}(t_v - t) \right) \quad (2)$$

Sur la figure 1, nous montrons la décroissance observée expérimentalement ainsi que le résultat de l'ajustement par l'équation 2 en prenant t_v et v_s comme inconnues. Nous retrouvons systématiquement une valeur de v_s en accord avec la formule de Stokes, avec une erreur relative moyenne de 17 % provenant sans doute de la dispersion sur la taille des billes.

En présence de convection, nous observons aussi un mécanisme en deux étapes. Cependant, la transition entre les deux régimes ne s'effectue plus à l'instant où les structures initiales ont été dissipées par la viscosité mais plutôt au retour des mouvements convectifs tués par le mélange initial. Ce temps caractéristique correspond au temps thermique typique $t_{th} = \frac{H^2}{\pi\kappa} \left(\frac{Ra_c}{Ra} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 10 s$.

A partir de t_{th} , le comportement statistique des billes en suspension dépend fortement de $\Delta\rho$ et ΔT (Fig. 2). Plus la convection est vigoureuse, plus la fraction volumique finale de particules en suspension est importante. Plus $\Delta\rho$ augmente, plus la fraction volumique diminue. Ces observations ne sont pas en accord avec la simple décroissance exponentielle prédite par Martin et Nokes [6] (Fig. 3).

En se plaçant par la pensée dans le référentiel d'une particule, le champ de vitesse de l'écoulement de convection turbulente apparaît isotrope et a tendance à disperser les particules. Il paraît alors possible de modéliser ce phénomène comme un processus classique de diffusion [3], à l'exception des couches limites thermiques où les mouvements convectifs sont absents. L'équation de conservation pour les particules, après moyennage selon les directions horizontales x et y , s'écrit alors :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - v_s \frac{\partial\phi}{\partial z} - D \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

valable une fois que la convection turbulente est rétablie (i.e. après t_{th}). Après intégration de l'équation 3 entre δ_{th} et $H - \delta_{th}$ (correspondant à la partie convective du fluide), nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial N}{\partial t} - v_s(\phi(H - \delta_{th}) - \phi(\delta_{th})) - D \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{H-\delta_{th}} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{\delta_{th}} \right] = 0 \quad (4)$$

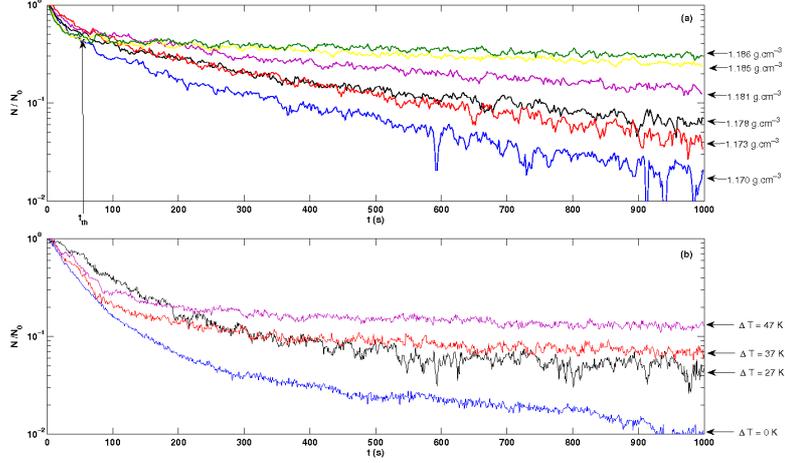


Fig. 2. Proportion de particules par rapport au nombre de particules initial N_0 en fonction du temps : (a) avec convection ($Ra = 3 \cdot 10^9$) et pour différentes densités de fluide (indiquées sur la droite de la figure) et (b) avec convection et pour différents ΔT (indiquées sur la droite de la figure) et avec une valeur constante de $\rho = 1.157$. Initialement, toutes les courbes sont superposées à cause de l’inertie du mélange. Après le temps thermique t_{th} correspondant à la réapparition des mouvements de convection, l’évolution de $\frac{N}{N_0}$ dépend de $\frac{\Delta\rho}{\rho}$.

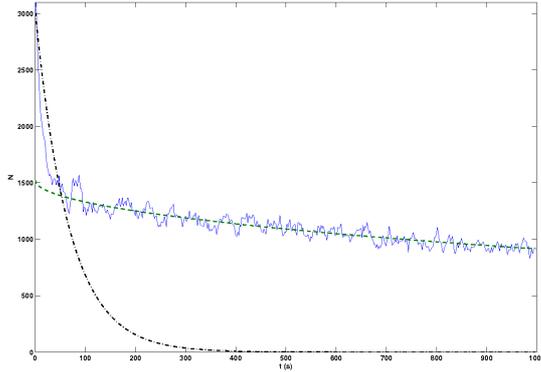


Fig. 3. Nombre de particules en suspension, N , en fonction du temps et en présence de convection ($Ra = 6 \cdot 10^9$). La courbe pointillée représente le fit des données par notre modèle, valable pour $t > t_{th}$. Les données sont mieux fittées par notre modèle que par une simple décroissance exponentielle (en trait discontinu).

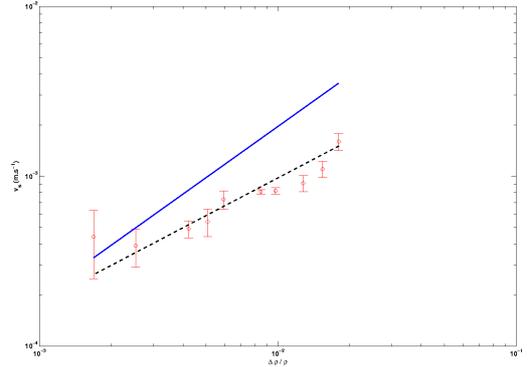


Fig. 4. Vitesse de Stokes en fonction de $\frac{\Delta\rho}{\rho}$. Les données expérimentales sont correctement ajustées lorsqu’on considère une viscosité effective de $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (droite en traits discontinus). En trait continu, le calcul de v_s fait avec une viscosité cinématique de $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

En accord avec l’étude de Belinsky *et al.* [1], le flux de particules à l’interface entre la couche limite thermique du haut et la partie convective est nul. De plus, si la convection est suffisamment forte pour que la concentration dans le fluide soit uniforme, $\phi(\delta_{th}) = \frac{N}{H}$. L’équation 4 s’écrit alors :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{v_s N}{H} = -D \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{\delta_{th}} \quad (5)$$

Il reste à évaluer le terme de droite de l’équation 5. Il s’agit en fait du flux diffusif à l’interface couche limite thermique du bas/couche convective. L’hypothèse que nous avons faite est de considérer que ce flux diffusif, qui correspond en réalité à un nombre de particules réentraînées par unité de temps, est constant après le temps thermique t_{th} . Nous le noterons R_{conv} . Lorsque l’état statistiquement stationnaire est

atteint, $N = N_{eq} = \text{constante}$ et $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$, donc $R_{conv} = \frac{v_s N_{eq}}{H}$. L'équation 5 s'écrit alors :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{v_s N}{H} = R_{conv} = \frac{v_s N_{eq}}{H} \quad (6)$$

La résolution habituelle de cette équation différentielle donne :

$$N(t) = (N_{t_{th}} - N_{eq}) \exp\left(-\frac{v_s}{H}(t - t_{th})\right) + N_{eq} \quad (7)$$

avec $N_{t_{th}} = N(t = t_{th})$. Cette expression simple nous permet de décrire l'ensemble de nos données, à condition d'ajuster N_{eq} et v_s en fonction de Ra et $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ (cf. par exemple figure 3). Sur la figure 4, nous avons porté v_s obtenue par cet ajustement en fonction de $\frac{\Delta\rho}{\rho}$. Nous constatons que les données expérimentales sont linéaires en $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, comme attendu selon l'expression de la vitesse de Stokes. En revanche, la pente obtenue est plus faible que la pente théorique calculée avec une viscosité cinématique ν de $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et correspond à une viscosité apparente de $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, pouvant s'expliquer par le fait qu'aux nombres de Rayleigh auxquels nous travaillons (entre 10^8 et 10^{10}), la turbulence est pleinement développée et la viscosité pertinente dans le calcul de v_s n'est plus la viscosité cinématique mais la viscosité turbulente, notée ν_t (cf. [2]).

Il reste maintenant à quantifier N_{eq} . Afin cependant de présenter un résultat indépendant de la taille du système, nous cherchons plutôt une loi d'échelle concernant la fraction volumique de billes en suspension à l'équilibre $\xi_{eq} = \frac{V_b}{V_{obs}} N_{eq}$, où $V_b = \frac{4}{3}\pi R^3$ est le volume d'une bille et V_{obs} le volume d'observation. D'un point de vue énergétique, l'état statistiquement stationnaire est atteint lorsque l'on peut extraire par friction visqueuse une énergie suffisante pour équilibrer l'énergie potentielle de pesanteur contenue dans les particules en suspension. Ce transfert d'énergie présente une certaine quantité de pertes, traduit par un coefficient d'efficacité ϵ . Cet équilibre se traduit mathématiquement par :

$$\epsilon \iiint_{\text{all fluid volume } V} \vec{v}_c \cdot \eta \nabla^2 \vec{v}_c dV = \iiint_{\text{all particles}} \vec{v}_s \cdot \Delta\rho \vec{g} dV \quad (8)$$

soit en ordre de grandeur $\epsilon v_c \eta \frac{v_c}{l^2} V_{obs} = v_s \Delta\rho g \xi_{eq} V_{obs}$ où v_c , la vitesse convective, s'exprime comme $v_c = \frac{\pi\kappa}{H} \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $l = \delta_{th} = H \left(\frac{Ra_c}{Ra}\right)^{\frac{1}{3}}$ est la longueur typique thermique. Après calculs, nous obtenons :

$$\xi_{eq} = \epsilon \frac{9\pi^2}{2} \frac{\kappa^2 \nu_t^2}{H^4 g^2 R^2} \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{-2} \quad (9)$$

Sur la figure 5(a), nous portons en échelle log-log, ξ_{eq} mesurée expérimentalement en fonction de $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ ainsi que le meilleur fit correspondant. Un coefficient directeur de -2 , en accord avec l'équation 9, est compatible avec nos données. L'ordonnée à l'origine donnée par le fit est de -18.9 . Cette valeur permet, à l'aide de l'équation (9), de calculer le coefficient d'efficacité ϵ . En utilisant $\nu_t = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, nous déterminons une efficacité de 0.87 %. De la même façon, la figure 5(b) montre la dépendance de ξ_{eq} en fonction de Ra en échelle log-log. Nos données valident la loi d'échelle (9) avec une pente mesurée de 1.35, à comparer avec la pente théorique de $4/3$. De même, l'ordonnée à l'origine permet de calculer ϵ . Nous trouvons dans ce cas une valeur de 4.8 %, plus grande que celle trouvée précédemment. A noter cependant que les incertitudes sur l'efficacité sont grandes, liées à la précision du fit -notamment celui en fonction de Ra qui court sur une gamme réduite-, à la dispersion dans la taille des particules et à la précision sur les mesures de températures et de densités. Pour comparaison, le facteur d'efficacité a été estimé entre 0.2 et 0.9 % par Solomatov *et al.* [8].

4 Conclusion, application à l'océan de magma terrestre initial

Grâce à nos expériences, nous avons donc réconcilié entre elles les études de Martin et Nokes [6] et de Solomatov *et al.* [8] en proposant un modèle unique, faisant intervenir un terme de ré-entraînement,

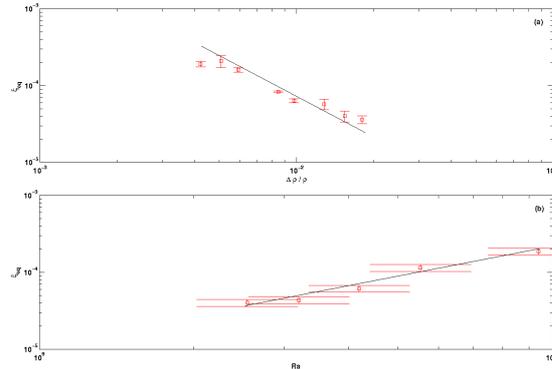


Fig. 5. Fraction volumique en suspension à l'équilibre ξ_{eq} mesurée expérimentalement : (a) en fonction du rapport $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, à $Ra = 3.10^9$. La droite, de pente -2 correspondant à notre loi d'échelle, s'aligne correctement avec les points expérimentaux. (b) en fonction du nombre de Rayleigh Ra , pour une densité de fluide de 1.150. La droite, de pente $4/3$ est en accord avec notre modèle.

décrivant l'évolution temporelle du nombre de particules en suspension. Par ailleurs, à partir de l'équation 3, il est possible de définir un nombre de Peclet $Pe = \frac{v_s H}{D}$ qui permet de séparer deux régimes : quand $Pe \ll Pe_s$, la diffusion turbulente est dominante et les particules ont tendance à rester en suspension, ce qui correspond au cas "T-dominated" introduit par Hoïnk *et al.* [4]. Au contraire les particules sédimentent quand $Pe \gg Pe_s$, ce qui correspond au cas "C-dominated" de Hoïnk *et al.*. Par analogie avec le modèle d'Einstein décrivant le mouvement brownien, nous pouvons calculer D par analyse dimensionnelle : $D = v_c \times H$, où H correspond au libre parcours moyen des mouvements convectifs et $v_c = \frac{\kappa}{\pi H} \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^\beta$. Alors, $Pe_s = \frac{2}{9\pi} B_s Ra_c^\beta \left(\frac{R}{H}\right)^2 Ra_s^{1-\beta}$ avec $\beta = 2/3$ dans le cas considéré numériquement où $Pr = \infty$ (cf. Korenaga et Jordan [5]), en accord avec le diagramme des régimes décrit par Hoïnk *et al.* pour $Pe_s = 3.10^{-3}$. Pour les paramètres typiques d'un océan de magma et en utilisant $\beta = 1/3$, nous confirmons alors que les gouttelettes de fer de diamètre 1 cm [7] sédimentent systématiquement et que la fraction volumique en suspension reste négligeable, inférieure à 10^{-4} %.

Références

1. M. BELINSKY, H. RUBIN, Y. AGNON, E. KIT & J. ATKINSON, Characteristics of resuspension, settling and diffusion of particulate matter in a water column, *Environmental Fluid Mechanics*, **5**, 415–441 (2005).
2. D. BRITO, J. AURNOU & P. CARDIN, Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics, *Phys. Earth Planet. Int.*, **141**, 3–8 (2004).
3. L. DEIKE, *Suspension de particules dans un écoulement turbulent*, Master's thesis, Université de Provence — IUSTI, July 2007.
4. T. HOÏNK, J. SCHMALZL & U. HANSEN, Dynamics of metal-silicate separation in a terrestrial magma ocean, *G³*, **7** (9), September 2006.
5. J. KORENAGA AND T. JORDAN, Effects of vertical boundaries on infinite prandtl number thermal convection, *Geophys. J. Int.*, **147**, 639–659 (2001).
6. D. MARTIN AND R. NOKES, Crystal settling in a vigorously convecting magma chamber, *Nature*, **332**, April (1988).
7. D.C. RUBIE, H. MELOSH, J. REID, C. LIEBSKE & K. RIGHTER, Mechanisms of metal-silicate equilibration in the terrestrial magma ocean, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **205**, 239–255 (2003).
8. V. SOLOMATOV, P. OLSON & D. STEVENSON, Entrainment from a bed of particles by thermal convection, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **120**, 387–393 (1993).