

Instabilité de Rayleigh–Taylor d’un film mince visqueux

Laurent Duchemin & Michael Le Bars

IRPHE – UMR 6594, Technopôle de Château-Gombert
49, rue Joliot Curie - B.P. 146 13384 Marseille Cedex 13
duchemin@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Lorsqu’on applique à un film liquide, en contact avec un solide, une force volumique constante dirigée du fluide vers l’extérieur, l’interface se déstabilise linéairement (instabilité de Rayleigh–Taylor) [2,3], puis on voit apparaître un jet qui peut éventuellement se rompre sous l’effet de la tension de surface (instabilité de Rayleigh–Plateau) [4]. Cette étude numérique concerne le développement non linéaire du jet, dans le cas d’un fluide très visqueux fortement accéléré, et en particulier l’évolution temporelle de la goutte formée à son extrémité.

Abstract. When a liquid film on a solid substrate is subject to a constant body force directed from the fluid to the exterior, the interface undergoes the classical Rayleigh–Taylor instability [2,3], then a thin jet appears, which can eventually break under the effect of surface tension (Rayleigh–Plateau instability) [4]. This numerical study deals with the long-time non-linear evolution of the jet. With the help of an axi-symmetric Navier–Stokes code, which accurately includes free surfaces, we have computed the film destabilization, from the linear regime to the non-linear one.

1 Introduction

L’objectif de ce travail est l’étude approfondie de l’évolution non-linéaire des jets visqueux accélérés. Cette étude présente un intérêt fondamental. En effet, si le pincement de jets peu visqueux est désormais bien compris, il n’existe pas encore d’explication satisfaisante de l’absence de pincement pour des fluides très visqueux comme le miel. En d’autres termes, l’effet de la viscosité sur la déstabilisation des jets n’est pas encore quantifié. Ce sujet présente aussi un intérêt quant à la compréhension de certains écoulements industriels (jets d’encre) et géophysiques. Parmi ces derniers, les cheveux de Pelé sont un exemple intéressant [1]. Ces fibres de lave solidifiée, de plusieurs mètres de long, recueillies près de certains volcans, se forment par expulsion violente de gouttes de laves. Ces gouttes entraînent derrière elles un fil pouvant atteindre un diamètre de quelques centaines de microns avant de se solidifier. La raison pour laquelle ces jets ne se déstabilisent pas pour donner naissance à des gouttes avant la solidification n’est pas connue.

Lorsqu’on applique à un film liquide, en contact avec un solide, une force volumique constante dirigée du fluide vers l’extérieur, l’interface se déstabilise linéairement (instabilité de Rayleigh–Taylor) [2,3], puis on voit apparaître un jet qui peut éventuellement se rompre sous l’effet de la tension de surface (instabilité de Rayleigh–Plateau) [4]. Cette étude numérique concerne le développement du jet aux temps longs. A l’aide d’un code de résolution des équations de Navier–Stokes axi-symétriques [5], prenant en compte la présence d’une surface libre, nous avons simulé la déstabilisation de la surface libre, du régime linéaire au régime fortement non-linéaire. Bien que préliminaires, ces résultats mettent en évidence plusieurs régimes d’évolution du jet, et devraient permettre d’isoler différents types de déstabilisation.

2 Analyse de stabilité linéaire

On considère une couche de fluide d’épaisseur h_0 (prise égale à 1 mm pour tous les calculs présentés), de masse volumique ρ , de viscosité cinématique ν , de tension de surface γ , et soumise à une densité de force volumique g constante. Soient $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ la longueur capillaire et $l_\nu = (\nu^2/g)^{1/3}$ la longueur

visqueuse ; on définit le nombre d'onde k adimensionné par l_c^{-1} , le taux de croissance ω adimensionné par $\sqrt{g/l_c}$, et les grandeurs suivantes :

$$b = \left(\frac{l_c}{l_\nu}\right)^{3/2} \quad \alpha = \frac{h_0}{l_c} \quad S = \sqrt{k^2 + \omega b}$$

Une étude de stabilité linéaire générale (à deux dimensions) donne la relation de dispersion suivante :

$$kb^2(1 - k^2)(k \tanh(\alpha S) - S \tanh(\alpha k)) = \frac{4k^2 S(\omega b + 2k^2)}{\cosh(\alpha k) \cosh(\alpha S)} \\ + k \tanh(\alpha S) \tanh(\alpha k) (4k^2 S^2 + (\omega b + 2k^2)^2) - S (4k^2 + (\omega b + 2k^2)^2)$$

Cette relation nous informe notamment de la coupure systématique pour $k = 1$, c'est-à-dire pour une longueur d'onde égale à la longueur capillaire l_c . En outre, elle permet de mettre en évidence des régimes tout à fait différents pour $k \ll 1$: en diminuant le rapport h_0/l_ν , on passe continûment d'un régime en \sqrt{gk} à un régime en k^2 , ce qui implique qu'il doit exister un régime linéaire en k pour $k \ll 1$.

La figure 1 représente les taux de croissance obtenus grâce au code Navier-Stokes axi-symétrique [5], pour différentes valeurs de ν , γ et g . La relation de dispersion, quant à elle, donne des courbes de croissance en bon accord qualitatif avec les résultats numériques, mais une étude de stabilité axi-symétrique reste à faire pour tester quantitativement la validité du code numérique lors de la croissance exponentielle.

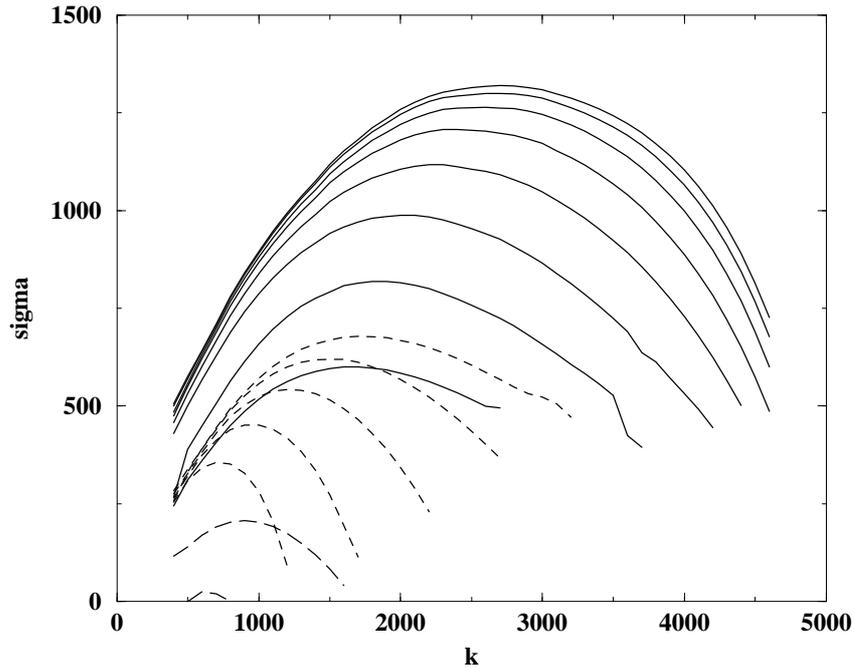


Fig. 1. Taux de croissance de l'instabilité en fonction du nombre d'onde pour différentes valeurs de ν , γ et g : (de haut en bas) **Traits pleins** : $\nu = 10^{-6}, 2 \times 10^{-6}, 4 \times 10^{-6}, 8 \times 10^{-6}, 1.6 \times 10^{-5}, 3.2 \times 10^{-5}, 6.4 \times 10^{-5}, 1.28 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, **Pointillés** : $\gamma = 0.02, 0.04, 0.08, 0.16, 0.32 \text{ N/m}$, **Pointillés longs** : $g = 750, 75, 7.5 \text{ m/s}^2$. Les valeurs des deux paramètres fixés sont parmi : $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$, $\gamma = 0.02 \text{ N/m}$, et $g = 750 \text{ m/s}^2$.

En utilisant systématiquement le nombre d'onde correspondant au taux de croissance maximum obtenu aux temps courts, nous avons effectué des simulations longues, pour différentes valeurs de ν et γ , afin d'observer l'évolution du jet aux temps longs.

3 Evolution du jet

Après la phase de croissance exponentielle, un jet se développe et une goutte apparaît à son extrémité sous l’effet de la tension de surface. La figure 2 représente trois régimes différents observés, pour trois valeurs de la viscosité.

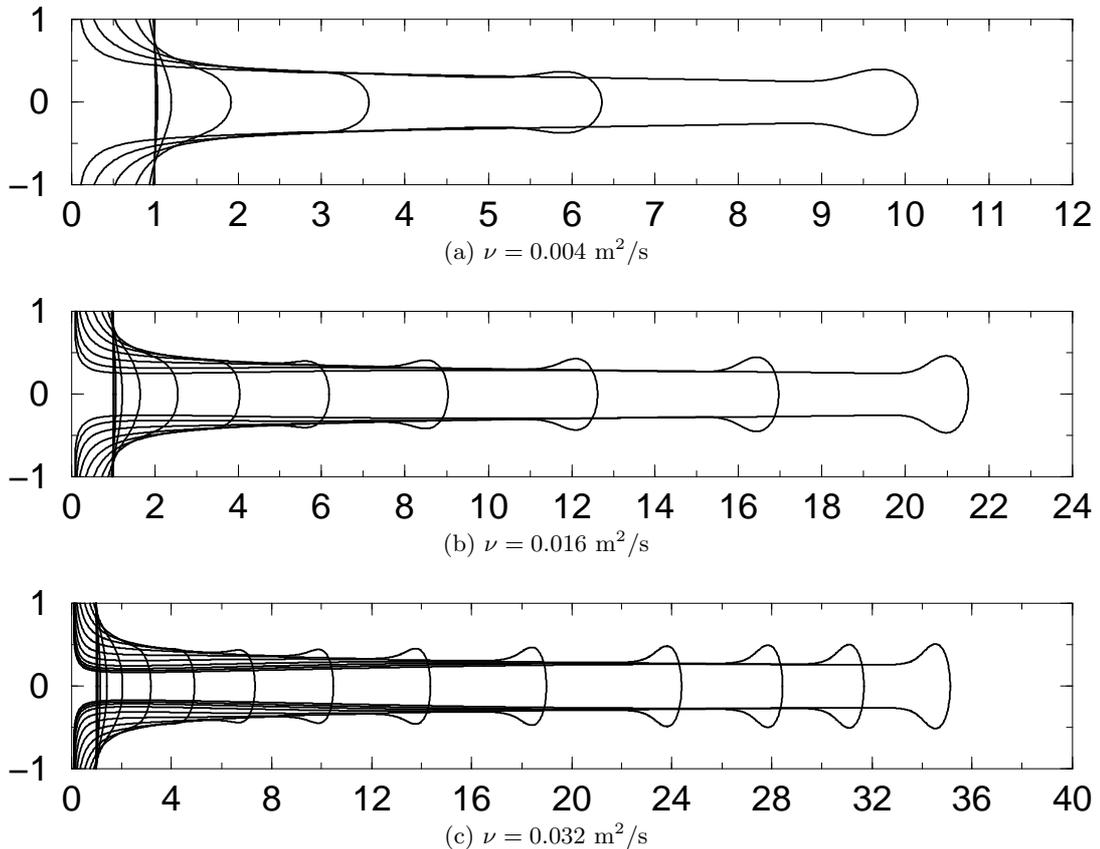


Fig. 2. Profils successifs de la surface libre, pour trois valeurs de la viscosité ν . Par ailleurs, on a choisi $\gamma = 0.02$ N/m et $g = 750$ m/s². Les axes sont gradués en millimètres ; seule la première figure possède la même échelle en abscisse et en ordonnée. Un pas de temps adaptatif a été utilisé ; le temps entre deux profils successifs n’est pas constant.

Le premier régime (figure du haut) semble donner lieu au pincement capillaire au voisinage de la goutte, bien que, pour des raisons de convergence numérique, nous n’ayons pu poursuivre le calcul jusqu’à la singularité. Le troisième régime (figure du bas) présente un amincissement important du jet à sa base, ce qui semble indiquer que le pincement devrait avoir lieu dans cette région. Le régime intermédiaire correspond à un amincissement du jet à la fois à sa base, mais également près de la goutte. Il est donc probable qu’il y ait une transition de type de pincement, lorsqu’on fait varier la viscosité, pour une même épaisseur de fluide initiale.

4 Trajectoire de la goutte

Les seuls effets ralentissant la trajectoire uniformément accélérée de la goutte sont les effets de la tension de surface et de la viscosité. A priori, il n'est pas évident que ces effets ne soient pas comparables à l'inertie aux temps longs.

Si l'on néglige les effets de la viscosité sur la rétraction de la goutte, on montre facilement que la goutte se rétracte par rapport au fluide se trouvant dans son voisinage, avec une vitesse constante égale à $\sqrt{2\gamma/\rho R}$ (où R est le rayon du jet, considéré comme constant). Cet effet ne peut donc être prédominant aux temps longs, puisque la force volumique – s'il n'y avait d'autres effets dissipatifs – devrait transmettre aux particules fluides une vitesse affine en temps ($v \simeq g(t - t_0)$).

L'effet de la viscosité est plus important et vient, en partie, du terme de Trouton des équations des films minces : $(3/R^2)(\partial/\partial z)(\mu R^2(\partial v/\partial z))$ (où μ est la viscosité dynamique et v la vitesse du fluide dans la direction z du jet). Ce terme, présent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction z , est l'expression extensionnelle, pour les jets minces, du terme de viscosité de cisaillement des équations de Navier–Stokes. Il représente donc une résistance à l'étirement et doit avoir un effet non négligeable sur la trajectoire de la goutte. Le second effet lié à la viscosité est le drainage du film de liquide en contact avec le solide. Par cisaillement cette fois, on observe une forte génération de vorticité au contact du solide, qui ralentit la progression du jet.

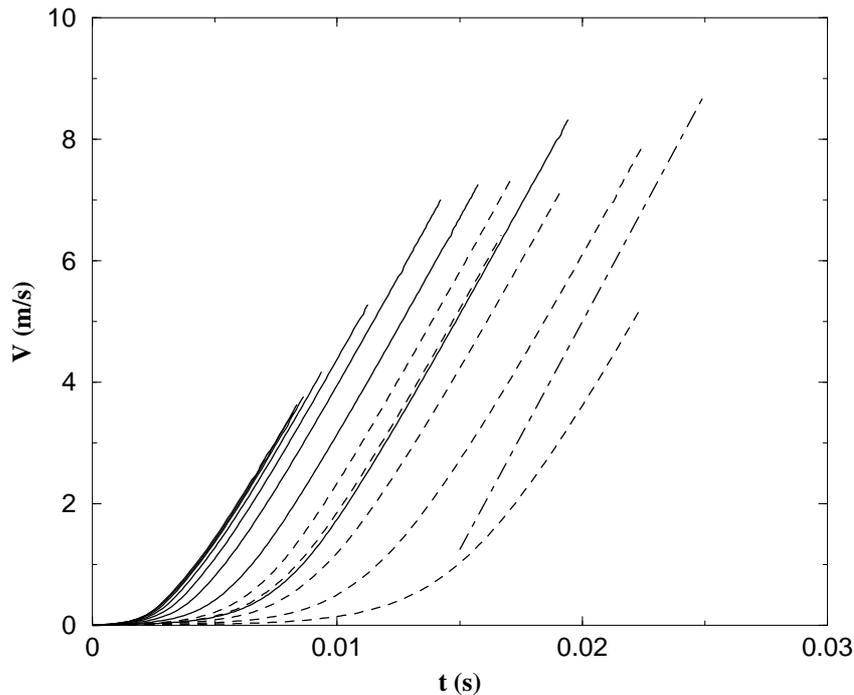


Fig. 3. Vitesse de la goutte (en m/s) en fonction du temps (en s) pour les mêmes valeurs de viscosité et tension de surface que précédemment. Les courbes en traits pleins correspondent aux différentes valeurs de viscosité, les courbes en pointillés aux cinq valeurs de tension de surface (Cf. Fig. 1). On constate que toutes les courbes tendent approximativement vers une pente commune égale à l'accélération donnée par la force volumique g . (droite en pointillés mixtes).

Les résultats numériques montrent néanmoins que l'inertie est clairement dominante aux temps longs. La figure 3 représente la vitesse de la goutte pour différentes valeurs de la viscosité et de la tension de surface. On constate que les courbes convergent toutes, aux temps longs, vers une asymptote d'équation $v = g(t - t_0)$, où g est la densité de force volumique imposée au fluide, et t_0 un temps à partir duquel

l’inertie est dominante et avant lequel la croissance de l’instabilité est exponentielle (Rayleigh–Taylor). Nous ne disposons pas encore de modèle théorique permettant d’évaluer ce temps t_0 , mais l’analyse dimensionnelle et les résultats numériques devraient permettre d’obtenir sa dépendance en ν , γ , g et h_0 .

5 Evolution du rayon de la goutte

L’analyse de la goutte dans le référentiel du fluide avoisinant (Taylor–Culick) permet également de trouver l’évolution du rayon de la goutte au cours du temps. On trouve que ce rayon, si l’on assimile la goutte à une sphère, doit évoluer en $t^{1/3}$, c’est-à-dire que sa masse doit être linéaire en temps. Par ailleurs, il est naturel de comparer le rayon avec la longueur capillaire l_c .

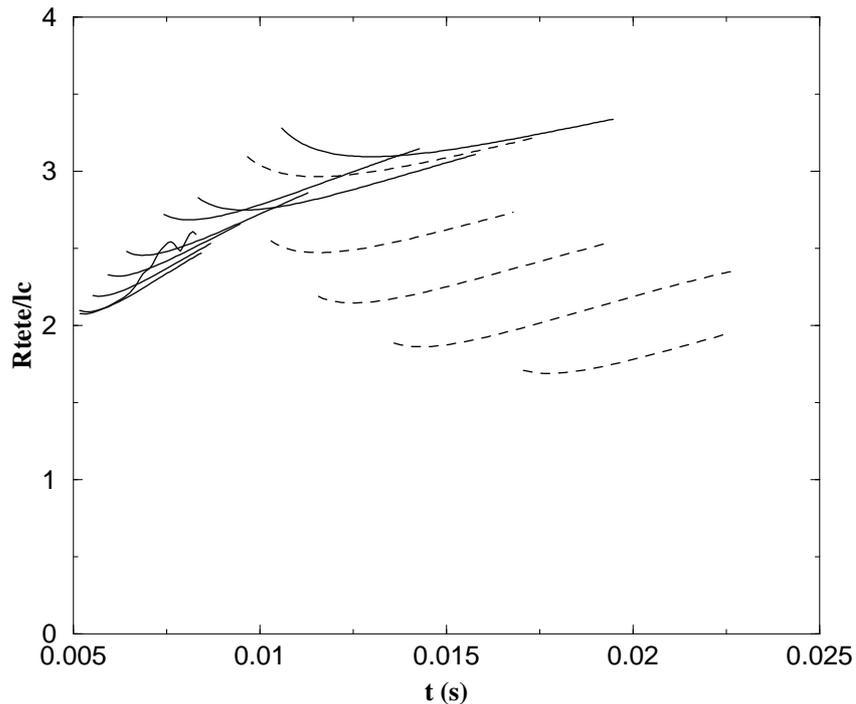


Fig. 4. Rayon de la goutte adimensionné par la longueur capillaire l_c en fonction du temps (en s) pour les mêmes valeurs de viscosité et tension de surface que précédemment (cf. Fig. 1). Les courbes en traits pleins correspondent aux différentes valeurs de viscosité, les courbes en pointillés aux cinq valeurs de tension de surface.

La figure 4 représente le rayon de la goutte, adimensionné par l_c en fonction du temps (en s). On constate que pour toutes les simulations numériques, ce rayon est compris entre 2 et 3 fois la longueur capillaire. Par ailleurs, ce rayon évolue très lentement en comparaison de la position de la goutte, en suivant une loi en $t^{1/3}$ compatible avec la théorie de Taylor–Culick, en considérant en première approximation et sur l’échelle de temps des simulations, que le rayon de la fibre est quasi-constant. Il reste à faire une étude détaillée du rayon au cours du temps, pour savoir notamment si la viscosité joue un rôle dans la rétraction de la goutte ou si le mécanisme de Taylor–Culick est toujours valable pour les grandes valeurs de la viscosité.

6 Perspectives

Cette étude numérique préliminaire ouvre plusieurs champs de réflexion, fondamentaux et appliqués. D’un point de vue fondamentale, l’occurrence du pincement, sa localisation dans l’espace et le temps,

en fonction des paramètres physiques du liquide, reste une question ouverte. En particulier, l'effet de la viscosité sur la déstabilisation des jets n'est pas encore clair, alors même qu'il est parfaitement compris au voisinage de la singularité de pincement. Dans le cadre de cette étude, pour des fluides très visqueux, nous avons pu obtenir des simulations présentant des jets fins et longs, sur de longues durées, sans détachement de gouttes, comme c'est le cas pour un filet de miel.

Pouvoir décrire l'instabilité en fonction des paramètres physiques et géométriques permettra d'obtenir et de quantifier des grandeurs importantes pour l'industrie, telles que la distribution de tailles de gouttes émises. Un autre effet sur la déstabilisation, peu abordé ici, est l'étirement que subit le jet sous l'effet de la force volumique. Cet étirement a probablement un effet déterminant sur la formation de gouttes et fera l'objet d'une étude numérique et théorique approfondie.

Références

1. J. EGGERS & E. VILLERMAUX, Physics of liquid jets, *Rep. Prog. Phys.*, **71**, 036601 (2008).
2. LORD RAYLEIGH, *Scientific Papers II*, Cambridge University Press, (1900).
3. G.I. TAYLOR, The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. I, *Proceedings of the Royal Society A*, **201**, 192 (1950).
4. J. EGGERS, Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows, *Review of Modern Physics*, **69** (3), 865–930 (1997).
5. S. POPINET & S. ZALESKI, Bubble collapse near a solid boundary : a numerical study of the influence of viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, **464**, 137–163, (2002).