

Transition de phases hors-d'équilibre dans le Laser à Electrons Libres

P. De Buyl¹, R. Bachelard², M.-E. Couprie², G. De Ninno³, & D. Fanelli⁴

¹ Interdisciplinary Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles (U.L.B.), Campus Plaine – CP 231, Blvd du Triomphe, B-1050 Brussels, Belgium

² Synchrotron SOLEIL, L'Orme des Merisiers, Saint-Aubin - BP 48, F-91192 Gif-sur-Yvette cedex, France

³ Phys. Dept., Nova Goriva Univ., Nova Gorica (Slovenia)
Sincrotrone Trieste, 34012 Trieste, Italy

⁴ Centro interdipartimentale per lo Studio delle Dinamiche Complesse (CSDC) and INFN and Dipartimento di Energetica "Sergio Stecco", Università di Firenze, via s. Marta 3, 50139 Firenze, Italia

pdebuyl @ulb.ac.be

Résumé. Les Lasers à Electrons Libres (LEL) sont des sources de lumière puissantes dans les gammes X à UV. La dynamique d'un LEL dans le régime *Self-Amplified Spontaneous Emission* montre des régimes de fort gain et de faible gain dans lesquels la valeur de l'intensité atteinte ne correspond pas à celle prédite par l'équilibre de Boltzmann. Le LEL est décrit par les interactions onde-particules entre les électrons et l'onde lumineuse générée. La dynamique présente des Etats Quasi-Stationnaires : ce sont des stades intermédiaires dans lesquels le système se retrouve bloqué. Ils sont dûs à la nature de longue portée de l'interaction. Une description du LEL par l'équation de Vlasov, dans la limite d'un grand nombre d'électrons, nous permet d'utiliser deux outils : la théorie de Lynden-Bell, basée sur une maximisation de l'entropie et des simulations numériques de l'équation de Vlasov. Dans cet article, nous interprétons les régimes du LEL en fonction des prédictions de la théorie de Lynden-Bell. Nous trouvons deux solutions correspondant aux deux régimes du LEL, qui constituent des états quasi-stationnaires de la dynamique. L'issue d'une condition initiale est donnée par une analyse simulatoire de ces solutions.

Abstract. Free Electrons Lasers (FEL) are powerful light source, in the X to UV range. The dynamics, in the *Self-Amplified Spontaneous Emission*, shows high or low gain regimes in which the obtained laser intensity does not reach that predicted by Boltzmann equilibrium. The FEL is described by wave-particles interactions between the electrons and the generated light-wave. The system finds itself trapped in Quasi-Stationary States : these are intermediate stages in which the system stays for a long time ; they are caused by the long-range nature of the interaction. A description of the FEL via a Vlasov equation permits the use of two tools : Lynden-Bell's theory, based on a maximisation of the entropy et numerical simulations of Vlasov's equation. In this article, we interpret the FEL dynamical regimes thanks to the predictions of Lynden-Bell's theory. We find two solutions corresponding to the two regimes of the FEL, which can be seen as Quasi-Stationary States of the dynamics. The outcome of an initial condition is given by a simulational analysis of the two solutions.

1 Introduction

Parmi les différentes sources de lumière pour explorer la matière, les Lasers à Electrons Libres (LEL) sont des outils particulièrement intéressants. Ils forment en effet des sources X-UV puissantes à grande cohérence spectrale et temporelle [1], et sont à même de pouvoir, à terme, filmer des dynamiques atomiques [2]. L'émission laser est obtenue en injectant un paquet d'électrons ultra-relativistes dans un onduleur, c'est-à-dire une série d'aimants alternés qui donne une trajectoire sinusoidale aux particules chargées : celles-ci produisent alors une émission synchrotron qui, grâce à un mécanisme d'instabilité, va devenir cohérente et permettre la production d'une onde laser puissante. Dans la configuration dite de *Self-Amplified Spontaneous Emission* [3], l'onde lumineuse est amplifiée de plusieurs ordres de grandeur (régime de fort gain), à partir d'un simple bruit électronique, avant d'atteindre une saturation. L'onde oscille alors sur des temps très longs, mais autour d'une valeur moyenne différente de celle prédite par l'équilibre de Boltzmann.

Des travaux récents ont souligné l'importance de la longue portée de l'interaction : après un premier régime transitoire, ces systèmes se retrouvent génériquement piégés dans des états métastables nommés *Etats Quasi-Stationnaires* (EQS), pour des temps divergents avec le nombre de corps en interaction [5] : telle est la nature du régime saturé du LEL. Ces systèmes ont aussi la propriété de garder dans l'EQS la mémoire de l'état initial du système, mémoire en grande partie perdue lorsque l'équilibre thermodynamique est finalement atteint : la phénoménologie des EQS n'en est que plus riche, et a notamment conduit à prédire l'existence de transitions de phase du premier et second ordre *hors d'équilibre*, ainsi que d'un point tri-critique pour de tels systèmes [4].

Dans cet article, nous caractérisons la transition de phase dans le LEL, à l'aide de deux approches, l'une analytique et l'autre numérique. Les états métastables saturés du LEL sont associés à une entropie hors d'équilibre, dite de Lynden-Bell ; cela nous permet de distinguer le régime de fort gain d'un régime à faible gain, en fonction de l'agrégation initiale du paquet d'électrons et de son énergie. Puis nous confrontons cette approche aux résultats de simulations d'un code Vlasov qui permettent d'interpréter les différents régimes dynamiques.

2 Contexte théorique

2.1 Dynamique

L'interaction d'un paquet d'électrons ultra-relativistes avec une onde électro-magnétique au sein d'un champ magnétique externe, ainsi qu'elle a lieu dans un Laser à Electrons Libres, est fidèlement reproduite par le hamiltonien suivant [6,5] :

$$H = \iint d\theta dp f_{\theta,p} \frac{p^2}{2} - i \iint d\theta dp f_{\theta,p} (ae^{i\theta} - a^* e^{-i\theta}), \quad (1)$$

où a représente l'amplitude complexe de l'onde et $f_{\theta,p}$ la distribution des particules dans l'espace des phases (θ est la position longitudinale normalisée des particules, p leur moment normalisé). Dans un LEL, lorsqu'un paquet d'électrons à faible dispersion en énergie est injecté à l'énergie résonante, un mécanisme d'instabilité permet aux particules de s'organiser collectivement et ces dernières émettent de manière cohérente : on observe alors une forte croissance de l'onde (même à partir d'un niveau de bruit), avant d'atteindre un régime saturé métastable, typique des systèmes à interactions à longue portée [7]. L'intensité oscille alors autour d'une valeur moyenne \bar{I} . Par contre, lorsque la dispersion en énergie du paquet est trop élevée, les électrons ne sont pas capables de s'organiser collectivement, et l'intensité de l'onde oscille à un niveau très faible. La transition entre ces deux régimes métastables dépend non seulement de la dispersion en énergie du paquet d'électrons, mais aussi de sa taille (longitudinale) initiale. Ceci traduit le fait que les EQS dépendent d'une part de l'énergie du système, mais aussi des autres caractéristiques macroscopiques initiales du système, contrairement à l'équilibre thermodynamique. Cet aspect des interactions à longue portée rend le diagramme de transition de phase hors d'équilibre d'autant plus complexe, puisqu'il dépendra non seulement de l'énergie du système, mais aussi d'autres caractéristiques des conditions initiales [4].

Par la suite, nous nous concentrons sur des conditions initiales particulières : l'onde est initialement à un niveau de bruit, tandis que le paquet d'électrons est homogènement distribué ("water-bag" (WB)) dans le rectangle de l'espace des phases $(\theta, p) \in [-\alpha; \alpha] \times [-\Delta p; \Delta p]$. Le système est alors initialement caractérisé par l'agrégation initiale du paquet d'électrons $b_0 = \iint d\theta dp f_0 e^{-i\theta} = \sin \alpha / \alpha$, ainsi que son énergie cinétique $U = \iint d\theta dp f_0 p^2 / 2 = \Delta p^2 / 6$. Dans le cadre du LEL, une transition existe entre le régime de fort gain et celui, lorsque le paquet d'électrons est excessivement chauffé, où le gain est très faible [8] : dans ce dernier cas, la cohérence de l'émission ne se développe pas, et l'amplification de l'onde n'a pas lieu. L'onde se met à osciller à un niveau très faible.

2.2 Entropie de Lynden-Bell

Afin de prédire le résultat de l'évolution sans collision de systèmes gravitationnels, régie par une équation de Vlasov, Lynden-Bell a développé une théorie basée sur la maximisation d'une entropie de

type fermionique [9]. Cette méthode fournit d'excellentes prédictions pour le système Hamiltonian Mean-Field [4], ainsi que dans la prédiction de l'intensité saturée du LEL [5,10,11].

Nous utilisons ici cette théorie afin de comprendre les différents régimes du LEL : fort gain et faible gain. L'entropie de Lynden-Bell peut, lorsque la distribution initiale de particules est de type WB ($f = 0$ ou f_0), être écrite de la façon suivante [9,5] :

$$s(\bar{f}) = - \int dp d\theta \left[\frac{\bar{f}}{f_0} \ln \frac{f}{f_0} + \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0}\right) \ln \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0}\right) \right] \quad (2)$$

ce qui se traduit, lorsqu'on rajoute les contraintes sur la conservation de la masse, l'énergie U et la quantité de mouvement, par le système suivant :

$$\begin{aligned} f_0 \frac{x}{\sqrt{\beta}} \int d\theta \zeta F_0(\zeta x) &= 1 \\ f_0 \frac{x}{\sqrt{\beta}} \int d\theta \sin \theta \zeta F_0(\zeta x) &= A^3 \\ f_0 \frac{x}{2\beta^{1.5}} \int \zeta F_2(\zeta x) &= U + \frac{3}{2} A^4 \end{aligned} \quad (3)$$

où $x = \exp(-2A\beta \sin \theta)$, $F_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}} dv}{1+y e^{-\frac{v^2}{2}}}$ et $F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv}{1+y e^{-\frac{v^2}{2}}}$. β et x sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux quantités citées ci-dessus. Le système d'équations est résolu numériquement par la méthode de Newton-Raphson. La valeur obtenue pour $\bar{I} = A^2$ est une estimation de l'intensité du laser à saturation et $f_{\theta,p}$ est alors donné en fonction de β et x :

$$f(\theta, p) = f_0 \frac{1}{1 + x e^{\beta(p^2/2 + 2A \sin \theta + A^2 p + A^4/2)}}. \quad (4)$$

On obtient comme prédiction de l'évolution d'une condition initiale de type WB deux solutions de (3) : LB0 à intensité nulle et LBA à intensité non-nulle. Le choix entre LB0 et LBA se fait de façon dynamique, et est expliqué dans la section 2.3.

2.3 Simulations de Vlasov

On peut décrire la dynamique du système (1) par un système d'équations de Vlasov-ondes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -p \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2(A_x \cos \theta - A_y \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial A_x}{\partial t} &= -\delta A_y + \int d\theta dp f \cos \theta \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} &= \delta A_x + \int d\theta dp f \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

Ce système peut être résolu numériquement sur une grille de calcul représentant la fonction $f_{\theta,p}$. Nous utilisons la méthode semi-Lagrangienne [12], en effectuant l'interpolation par splines cubiques [13], pour intégrer numériquement le système (5). L'approche de Vlasov pour la dynamique élimine certains effets liés au nombre fini de particules tels que la granularité, ou les fluctuations liées à la génération de distributions aléatoires [5,14].

Nous allons nous servir de différentes conditions initiales : la condition initiale WB, telle que décrite à la section 2.1, et les solutions LB0 et LBA de l'approche de Lynden-Bell. Cette dernière étape permet de statuer sur la stabilité de ces solutions : dans les situations où LB0 est stable, la simulation est "bloquée" dans cet état ; lorsque LB0 est instable, la dynamique amène le système à proximité de la solution LBA, qui est stable pour toutes les valeurs des paramètres b_0 et U . Pour $b_0 \lesssim 0.5$, la condition initiale WB et LB0 (lorsqu'elle est instable) donnent lieu à la même valeur de l'intensité en saturation \bar{I} (voir Fig. 1). Il est alors possible de choisir entre LB0 et LBA, l'intensité à saturation étant donnée par la solution LBA.

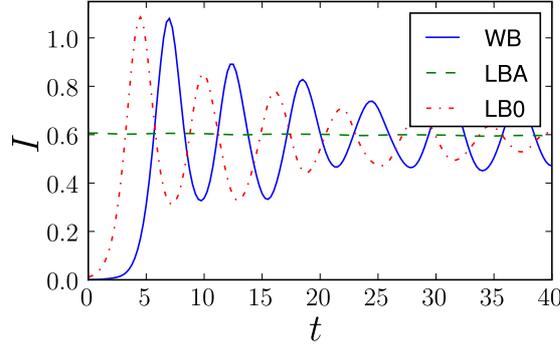


Fig. 1. L'intensité I en fonction du temps, pour les trois conditions initiales WB, LB0 et LBA, pour $b_0 = 0.05, \epsilon = 0.10$

3 Résultats

Pour de faibles valeurs de l'agrégation ($b_0 \lesssim 0.1$), les simulations se comportent comme suit : en variant l'énergie, le régime passe brusquement de valeurs de \bar{I} de l'ordre de 1 à des valeurs proches de 0. Pour des valeurs plus élevées, la transition entre les régimes est moins marquée.

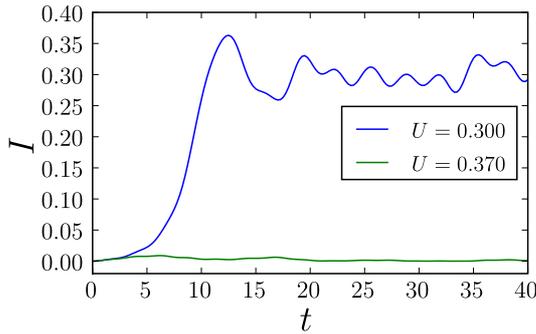


Fig. 2. L'évolution de I pour deux simulations : $b_0 = 0.05$ et $U = 0.3$ et 0.37

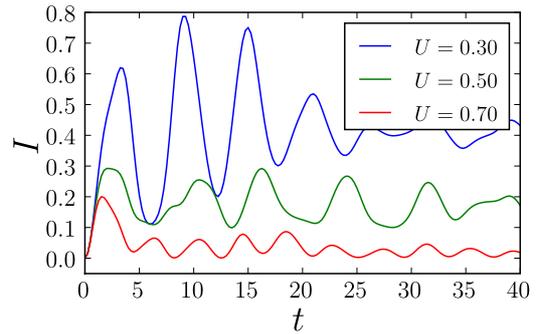


Fig. 3. L'évolution de I pour deux simulations : $b_0 = 0.50$ et $U = 0.3, 0.50$ and 0.70

La valeur de saturation \bar{I} atteinte, lorsque la condition initiale se déstabilise, est comparée avec les solutions LB0 et LBA (Fig. 1). Nous avons pour cette condition initiale ($b_0 = 0.05$ et $U = 0.1$) confirmation que :

- La valeur de \bar{I} prédite par la théorie de Lynden-Bell est proche de celle atteinte dans la simulation WB.
- La stabilité de LB0 permet de déterminer si une condition initiale WB donne lieu à $\bar{I} \approx 0$ ou au contraire $\bar{I} > 0$.

La dynamique du LEL évolue vers la solution LB0 tant que LB0 est stable. Dans le cas contraire, le LEL approche la solution LBA. Cette hypothèse est accréditée par l'observation de l'évolution de s , l'entropie de Lynden-Bell, dans les simulations reportées en Figs. 4 et 5.

4 Conclusion

Nous avons caractérisé la transition de phase hors d'équilibre présente dans le LEL via la méthode de Lynden-Bell couplée à des simulations numériques de l'équation de Vlasov. Nous avons mis en évidence l'importance du concept des EQS qui sont susceptibles de bloquer l'évolution du LEL vers

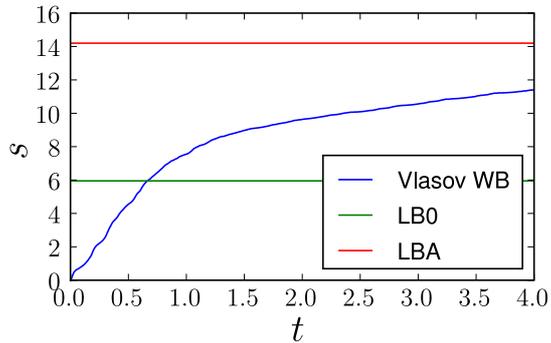


Fig. 4. Evolution de s dans la situation où LB0 est instable. $b_0 = 0.2$ et $U = 0.1$. Les valeurs de s_{LB0} et s_{LBA} sont indiquées pour référence.

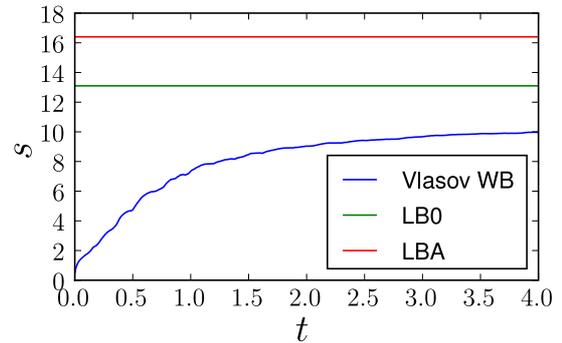


Fig. 5. Evolution de s dans la situation où LB0 est stable. $b_0 = 0.2$ et $U = 0.5$. Les valeurs de s_{LB0} et s_{LBA} sont indiquées pour référence.

l'équilibre, et interprétons cette évolution en terme de nos prédictions. Nous avons également constaté que le système, à partir d'une condition initiale WB se rapproche des solutions prédites par la théorie de Lynden-Bell. Concluons que l'observation expérimentale d'une transition de phase hors-d'équilibre, d'états quasi-stationnaires, et a fortiori d'un point tri-critique hors d'équilibre tel que rencontré dans le modèle Hamiltonian Mean-Field, reste un des défis actuels : dans ce contexte, le Laser à Electrons Libres est sans doute un des meilleurs candidats pour observer ces spécificités des interactions à longue portée.

Références

1. T. SHINTAKE *et al.*, *Nature Photonics*, **2**, 555 (2008).
2. C. PELLEGRINI, *Nature*, **455**, 297 (2008).
3. R. BONIFACIO, C. PELLEGRINI & L. NARDUCCI, *Opt. Commun.*, **50**, 373 (1984) — R. BRINKMANN, in Proceedings of the FEL Conference (2006).
4. A. ANTONIAZZI, D. FANELLI, S. RUFFO & Y. Y. YAMAGUCHI, *Physical Review Letters*, **99**, 040601 (2007).
5. J. BARRÉ, T. DAUXOIS, G. DE NINNO, D. FANELLI & S. RUFFO, *Physical Review E*, **69**, 045501(R) (2004).
6. BONIFACIO *et al.*, *Riv. Nuovo Cimento*, **13**, 1 (1990).
7. T. DAUXOIS *et al.* (Eds.), Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions, *Lecture Notes in Physics*, **602**, Springer, (2002) — A. CAMPA *et al.* (Eds.), Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions : Theory and Experiments, *AIP Conference Proceedings*, **970** (2008).
8. M.-C. FIRPO & Y. ELSKENS, *Physical Review Letters*, **84**, 3318 (2000).
9. D. LYNDEN-BELL, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **136**, 101 (1967).
10. F. CURBIS, A. ANTONIAZZI, G. DE NINNO & D. FANELLI, *European Physical Journal B*, **59**, 527 (2007).
11. P. DE BUYL, D. FANELLI, R. BACHELARD & G. DE NINNO, arXiv :0902.0712v1 (2009).
12. E. SONNENDRÜCKER, J. ROCHE, P. BERTRAND & A. GHIZZO. The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of Vlasov Equations, *Technical Report*, **3393**, INRIA, Mars 1998.
13. W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING & B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2nd edition, (1992).
14. A. ANTONIAZZI, F. CALIFANO, D. FANELLI & S. RUFFO, *Physical Review Letters*, **98**, 150602 (2007).

