



C. Josserand, M. Lefranc & C. Letellier  
Éditeurs

*Poincaré*

---

Comptes-Rendus de la 12<sup>e</sup>  
Rencontre du Non-Linéaire  
Paris 2009

---



Institut Henri Poincaré

Non-Linéaire Publications



## RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE

Institut Henri Poincaré, PARIS

11–13 Mars 2009

Nous remercions vivement Michel Broué, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, pour son aide à l'organisation de ces *Rencontres* ainsi que la Délégation Générale à l'Armement, le Laboratoire Jean le Rond d'Alembert, le Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules (PhLAM), le Complexe de Recherche Interprofessionnel en Aérothermochimie (CORIA) et le CNRS, pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

Amandine AFTALION	CMAP — Polytechnique
Yacine AMAROUCHÈNE	CPMOH — Bordeaux
Jean-René CHAZOTTES	CPhT — Polytechnique
Bérengère DUBRULLE	SPEC/CEA — Saclay
John DUDLEY	FEMTO-ST — Besançon
Jean-Christophe GÉMINARD	Lab. Physique — ENS Lyon
Christophe JOSSERAND	Institut J. le Rond d'Alembert — Paris 6
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Thomas PODGORSKI	LSP — Grenoble
Marc RABAUD	FAST — Orsay
Laurette TUCKERMAN	PMMH — ESPCI, Paris
Massimo VERGASSOLA	Institut Pasteur — Paris

Les *Rencontres annuelles du Non-linéaire* sont organisées par :

Christophe JOSSERAND	Institut J. le Rond d'Alembert — Paris 6
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Christophe LETELLIER	CORIA — Rouen

Le Colloque *Non-linéarités sur la Terre et dans les étoiles* est organisé par :

Bérengère DUBRULLE	SPEC/CEA — Saclay
Jean-Christophe GÉMINARD	Lab. Physique — ENS Lyon
Christophe JOSSERAND	Institut J. le Rond d'Alembert — Paris 6

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

*Non Linéaire Publications*  
Bât. 510, Université de Paris-Sud, 91495 Orsay cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

[rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr](mailto:rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr)



## Table des matières

<b>Analyse de dynamiques spatio-temporelles d'un laser</b> <i>Dalila Amroun Aliane, Luc Pastur, Marc Brunel, Hervé Leblond, François Sanchez, Christophe Letellier</i> .....	1
<b>Sur les modèles de type Kohn-Sham avec fonctionnelles d'échange-corrélation LDA et GGA</b> <i>A. Anantharaman, E. Cancès</i> .....	7
<b>Orbites régulières et transition de phases hors-d'équilibre dans les systèmes avec interactions à longue portée</b> <i>R. Bachelard, C. Chandre, M.-E. Couprie, D. Fanelli, X. Leoncini, S. Ruffo</i> .....	13
<b>Sensibilité d'un front propagatif aux transitions hydrodynamiques</b> <i>Simona Bodea, Alain Pocheau</i> .....	19
<b>Oscillation globale de canaux ioniques</b> <i>G. Boedec, M. Jaeger, F. Homble, M. Leonetti</i> .....	25
<b>Turbulence d'ondes à la surface d'un ferrofluide</b> <i>François Boyer, Eric Falcon</i> .....	29
<b>Dépendance de la nature du forçage sur la statistique de la puissance injectée dans une plaque mise en vibration chaotique</b> <i>Olivier Cadot, Arezki Boudaoud, Cyril Touzé</i> .....	35
<b>Instabilités Magnéto-Inertielles</b> <i>D. Cebron, W. Herreman, M. Le Bars, S. Le Dizès, P. Le Gal, P. Maubert</i> .....	41
<b>Couplages de neurones de type Hindmarsh-Rose : de la synchronisation à l'émergence de propriétés</b> <i>Nathalie Corson, M. A. Aziz Alaoui</i> .....	47
<b>Transition de phases hors-d'équilibre dans le Laser à Electrons Libres</b> <i>P. De Buyl, R. Bachelard, M.-E. Couprie, G. De Ninno, D. Fanelli</i> .....	53
<b>Instabilité de Rayleigh–Taylor d'un film mince visqueux</b> <i>Laurent Duchemin, Michael Le Bars</i> .....	59
<b>Waves and solitons in complex plasmas</b> <i>Céline Durniak, Dmitry Samsonov, Paul Harvey, Sergey Zhdanov, Gregor Morfill</i> .....	65
<b>Echec de la technique de titration du bruit à distinguer un bruit coloré d'un chaos</b> <i>Ubiratan S. Freitas, Luis A. Aguirre &amp; Christophe Letellier</i> .....	71
<b>La variété de courbure du flot comme squelette des attracteurs chaotiques</b> <i>Jean-Marc Ginoux &amp; Christophe Letellier</i> .....	77

<b>Experimental verification of a modified fluctuation-dissipation theorem for a Brownian particle in a non-equilibrium steady state</b> <i>J. R. Gomez-Solano, A. Petrosyan, S. Ciliberto, R. Chetrite,, K. Gawedzki</i> .....	83
<b>Sur les systèmes à évènements discrets non linéaires dans l’algèbre des dioïdes</b> <i>Samir Hamaci, Jean-Louis Boimond</i> .....	89
<b>Emergence de structures optiques extrêmes par amplification fibrée basée sur une pompe partiellement incohérente</b> <i>Kamal Hammami, Christophe Finot, John M. Dudley, Guy Millot</i> .....	95
<b>Effets d’un forçage spatial sur la dynamique des fronts</b> <i>F. Haudin, R. G. Elías, M. G. Clerc,, U. Bortolozzo, S. Residori</i> .....	101
<b>Sédimentation de particules en présence de convection thermique. Application à la séparation métal-silicate dans l’océan de magma terrestre initial</b> <i>Guillaume Lavorel, Michael Le Bars</i> .....	107
<b>Conditions nécessaires de chaos pour le système de Sprott E</b> <i>Jean-Marc Malasoma</i> .....	113
<b>Instabilité convective en milieu inhomogène : la réponse impulsionnelle dans le sillage sous-critique d’un cylindre.</b> <i>C. Marais, R. Godoy-Diana, D. Barkley, J.E. Wesfreid</i> .....	119
<b>Mesure, sans contact, des forces agissant sur les protéines dans les microdomaines membranaires</b> <i>J.-B. Masson, D. Casanova, S. Turkcan, G. Voisinne, M.R. Popoff, M. Vergassola, A. Alexandrou</i>	125
<b>Une horloge circadienne minimale chez l’algue unicellulaire <i>Ostreococcus tauri</i></b> <i>P.-E. Morant, Q. Thommen, F. Corellou, C. Vandermoëre, F.-Y. Bouget, M. Lefranc</i> .....	131
<b>Etude expérimentale des implications des marées dans les systèmes planétaires</b> <i>Cyprien Morize, Michael Le Bars, Patrice Le Gal, Andreas Tilgner</i> .....	137
<b>L’épidémie de chikungunya : modélisation et stabilité</b> <i>D. Moulay, M. Cadivel, M.A. Aziz-Alaoui</i> .....	143
<b>Générateur de chaos opto-électronique à double retard pour les télécommunications optiques sécurisées</b> <i>Mourad Nourine, Michael Peil, Laurent Larger</i> .....	149
<b>Les singularités du chaos : doubles plis et fronces dans des systèmes couplés simples</b> <i>Jérémy Oden, Serge Bielawski, Marc Lefranc</i> .....	155
<b>Simulation numérique des ondes de Faraday</b> <i>Nicolas Périnet, Damir Juric, Laurette Tuckerman</i> .....	161
<b>Directions de croissance des dendrites cristallines : vers une universalité ?</b> <i>Alain Pocheau, Julien Deschamps, Marc Georgelin</i> .....	167
<b>Portraits de phase et matrices de Markov pour l’étude des asynchronismes en ventilation non invasive</b> <i>H. Rabarimanantsoa, U.S. Freitas, R. Naeck, J.-F. Muir, A. Cuvelier, C. Letellier</i> .....	173

<b>Nonlinear acrobatics of viscous filaments</b> <i>Neil M. Ribe, Mehdi Habibi, Yaser Rahmani, Daniel Bonn</i> .....	179
<b>Défauts topologiques (plis) dans les structures cellulaires</b> <b>De la mue du crabe au croisement de plis en géologie</b> <i>N. Rivier</i> .....	185
<b>Ondes non linéaires dans l'expérience de Faraday</b> <i>N. Rojas, M. Argentina, E. Cerda, E. Tirapegui</i> .....	189
<b>Le chaos dans l'activité cardiaque : le déterminisme en question.</b> <i>Elise Roulin, Ubiratan S. Freitas, Christophe Letellier</i> .....	195
<b>Equation de Cahn-Hilliard 1D pour les systèmes à phase modulée</b> <i>Simon Villain-Guillot</i> .....	201
<b>Index</b> .....	207





# Analyse de dynamiques spatio-temporelles d'un laser

Dalila Amroun Aliane<sup>1</sup>, Luc Pastur<sup>2</sup>, Marc Brunel<sup>3</sup>, Hervé Leblond<sup>4</sup>, François Sanchez<sup>4</sup> & Christophe Letellier<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LEQ, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, BP 32, Bab Ezzouar, 16111 Alger

<sup>2</sup> LIMSI-CNRS, Université de Paris Sud, BP 133, Bât 508, 91403 Orsay cedex

<sup>3</sup> CORIA-UMR 6614, Université de Rouen, BP 12, 76801 St-Etienne du Rouvray cedex

<sup>4</sup> POMA, FRE 2988, Université d'Angers, 2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01

amroun\_dalila@yahoo.fr

**Résumé.** La dynamique spatio-temporelle d'un système laser avec diffraction est étudiée. La correspondance entre la structure du portrait de phase et l'organisation relative des défauts topologiques dans les diagrammes spatio-temporels est clairement mise en évidence. Ainsi, une dynamique de type chaos toroïdal est associée à des défauts apparaissant périodiquement (dans l'espace et dans le temps). En revanche, il n'y a plus de périodicité des défauts sur les diagrammes spatio-temporels lorsque le régime est un chaos développé.

**Abstract.** The spatio-temporal dynamics of a laser system with diffraction is investigated. The structure of the phase portrait and the relative organization of the topological defects in spatio-temporal diagrams are found to be strongly related. Thus, a toroidal-chaotic regime is associated with defects occurring periodically (in space and time). Contrary to this, defects are no longer periodically organized when the asymptotic regime corresponds to a developed chaos.

## 1 Introduction

Les dynamiques spatio-temporelles sont souvent étudiées en termes de diagrammes spatio-temporels et d'analyses perturbatives réductives. Toutefois, il est rarement fait référence aux techniques d'analyse de la théorie des systèmes dynamiques développées dans le contexte des évolutions purement temporelles. En hydrodynamique par exemple, l'approche spatio-temporelle est souvent utilisée pour détecter les instabilités et tenter d'interpréter le mécanisme de la turbulence. Ainsi, des équations d'amplitude sont d'abord extraites et des équations universelles (Ginzburg-Landau, Swift-Hohenberg, Kuramoto-Sivashinski...) sont ensuite obtenues afin de décrire des instabilités primaires et secondaires [1], et d'étudier les structures cohérentes [2]. Les lasers sont des systèmes dynamiques connus pour produire une grande variété d'instabilités spatio-temporelles et de chaos. Depuis les travaux de Haken qui établit l'analogie entre les instabilités laser et hydrodynamiques [3], l'étude des dynamiques laser spatio-temporelles (structures cohérentes [4], instabilité d'Eckhaus [5]...) est devenue un domaine de recherche riche et vaste.

Lors d'une précédente étude sur les dynamiques spatio-temporelles dans un tube à décharge, il a été montré que l'apparition d'une nouvelle fréquence dans les diagrammes spatio-temporels est associée à une bifurcation globale sur le tore [6] suivant un scénario mis en évidence par Baptista et Caldas [7]. Plus récemment, l'utilisation d'une dynamique symbolique a permis de mettre en évidence l'intermittence de modes fréquentiels dans une expérience d'écoulement en cavité ouverte [8], c'est-à-dire un système hydrodynamique spatio-temporel.

Dans cette contribution, nous montrons que les changements dans les diagrammes spatio-temporels peuvent être reliés à des modifications bien identifiées de la structure du portrait de phase reconstruit à partir de variables locales. Par conséquent, une certaine compréhension pourrait être obtenue à partir d'une analyse purement temporelle [9,10,11].

## 2 Modèle

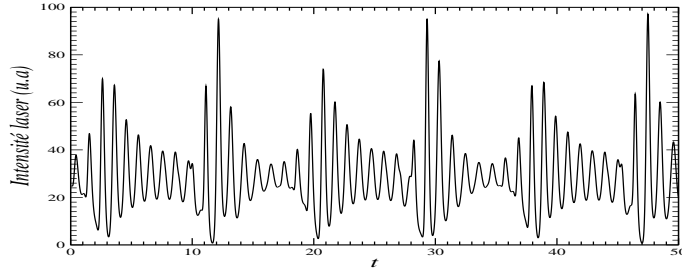
Le système dynamique étudié est un laser monomode à élargissement homogène. Il est décrit par les équations de Maxwell-Bloch normalisées, avec diffraction dans la direction transverse  $x$  [12,9,13] :

$$\begin{cases} \partial_t e = -\sigma(e - p) + iA\partial_x^2 e \\ \partial_t p = -(1 - i\delta)p + ed \\ \partial_t d = -\gamma(d - r + \frac{1}{2}(ep^* + e^*p)) \end{cases} \quad (1)$$

Les quantités  $e$ ,  $p$  et  $d$  sont respectivement obtenues après normalisation du champ électrique  $E$ , de la polarisation macroscopique  $P$  et de l'inversion de population  $D$ . Les paramètres  $\gamma = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$  et  $\sigma = \gamma_{\ell}/2\gamma_{\perp}$  se définissent à partir du taux de relaxation de la polarisation  $\gamma_{\perp}$ , de l'inversion de population  $\gamma_{\parallel}$  et de l'intensité optique  $\gamma_{\ell}$ . Le temps est normalisé par rapport à la durée de vie de la cohérence. Le paramètre  $\delta = (\omega - \omega_a)/\gamma_{\perp}$  représente le désaccord de fréquence entre celle du champ  $\omega$  et celle de la transition atomique résonante  $\omega_a$ .  $A$  est le paramètre de diffraction. Le paramètre  $r$  représente le taux de pompage. L'opérateur différentiel partiel  $\partial/\partial t$  est noté par  $\partial_t$ , et ainsi de suite.

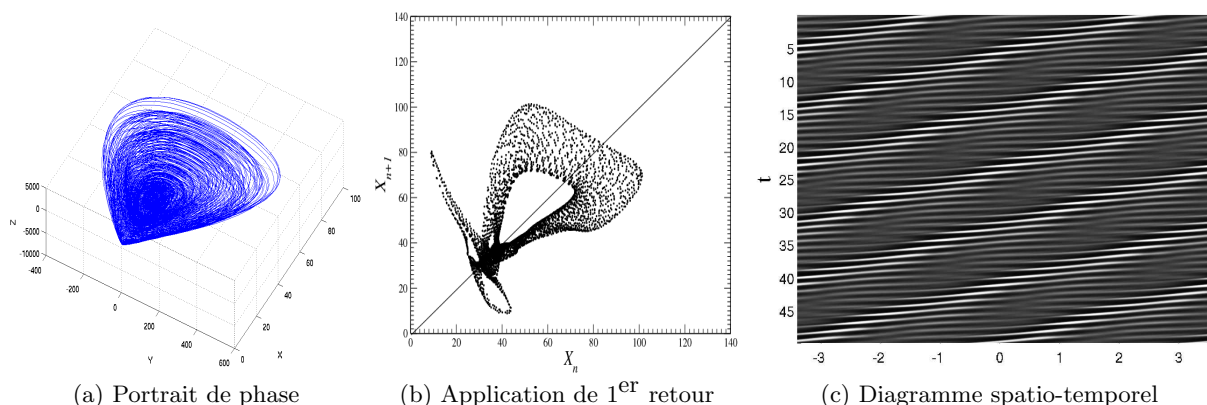
## 3 Résultats numériques et discussions

L'objectif de ce travail est l'étude de l'influence du paramètre de diffraction  $A$ , responsable de la dépendance spatiale du système, sur la dynamique d'un laser monomode, et la mise en évidence du lien entre la structure spatio-temporelle et la dynamique purement temporelle de ce laser. Pour cela, nous avons effectué plusieurs simulations numériques de l'intensité laser dans le temps et l'espace pour différentes valeurs du paramètre  $A$ . Les séries temporelles correspondent à l'intensité laser « mesurée » au point de coordonnée  $x = 0$ .



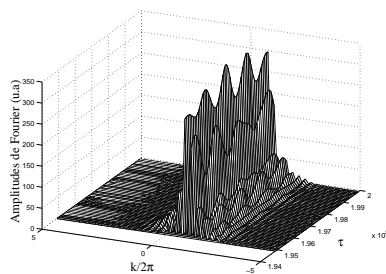
**Fig. 1.** Evolution temporelle de l'intensité laser « mesurée » au point de coordonnée  $x = 0$  pour  $A = 0.1$ . Autres paramètres :  $\sigma = 2$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $r = 30$  et  $\delta = -2$ .

Pour  $A = 0.1$ , l'intensité laser présente une évolution temporelle aperiodique (Fig. 1), ce qui se retrouve sur le portrait de phase reconstruit à partir de l'intensité laser en utilisant un plongement différentiel (coordonnées dérivées) [14]. L'attracteur révèle une structure toroïdale sur laquelle se développe les trajectoires (Fig. 2a). Une section de Poincaré sur l'attracteur, définie dans le plan  $(X = I, Z = \ddot{I})$  par  $Y = \dot{I} = 0$  et  $Y < 0$ , a été calculée (Fig. 2b). L'application de premier retour à cette section confirme que le comportement est structuré sur un tore pourvu d'une certaine épaisseur qui pourrait résulter d'un effet de projection de l'espace de haute dimension : c'est une dynamique de chaos toroïdal faiblement développé. L'aspect faiblement développé pourrait s'expliquer par les frontières de l'attracteur très nettement délimitées : ceci pourrait résulter de la contrainte du tore par une structure instable — qui reste à identifier — comme cela est fréquemment le cas dans les bifurcations sur le tore [15].

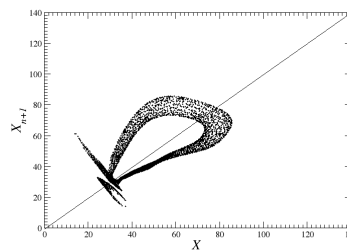


**Fig. 2.** Dynamique du laser spatio-temporel dans le plongement différentiel reconstruit à partir de l'intensité laser pour  $A = 0.1$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

Le diagramme spatio-temporel correspondant à cette dynamique (Fig. 2c) révèle des modulations de phase et d'amplitude importantes. Des glissements de phase de  $\pm 2\pi$ , accompagnés d'une mise à zéro de l'amplitude, se produisent cycliquement au cours du temps. Le processus se reproduit à intervalles de temps et d'espace réguliers, de sorte que le régime de création/annihilation de défauts topologiques [16] est périodique (à la précision de la localisation des défauts près). Par ailleurs, le spectre de Fourier spatial (Fig. 3) révèle la complexité dynamique : plusieurs vecteurs d'onde co-existent, chacun représentant une amplitude de Fourier avec une évolution temporelle chaotique.



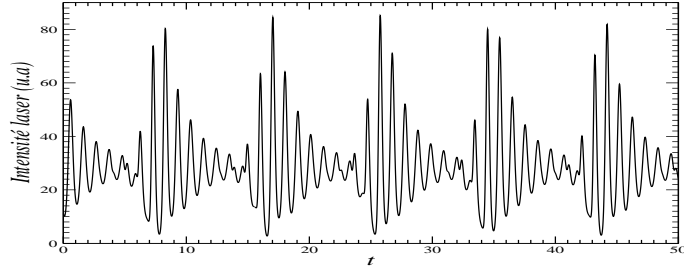
**Fig. 3.** Evolution temporelle des composantes spatiales de Fourier (vecteurs d'onde) pour  $A = 0.1$ .



**Fig. 4.** Application de premier retour à une section de Poincaré pour  $A = 0.1020$ .

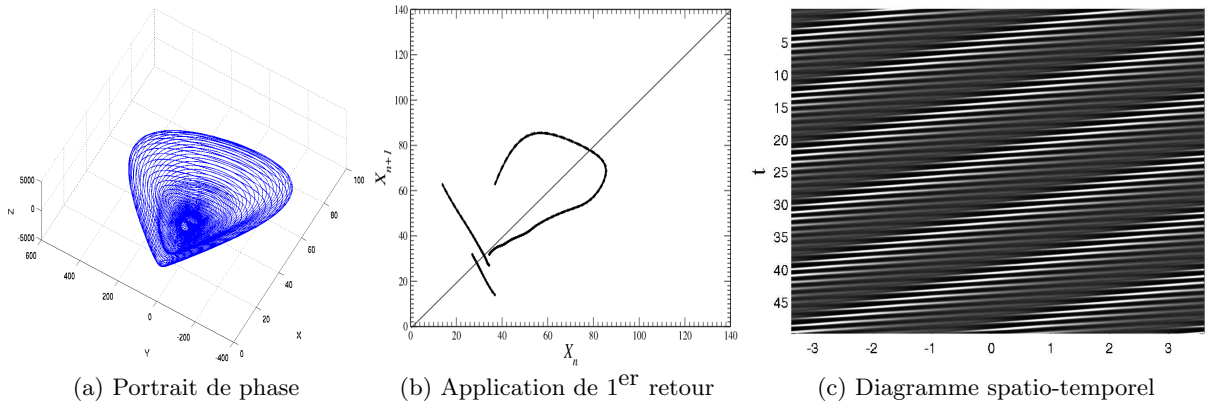
Lorsqu'on augmente le paramètre de diffraction  $A$  à  $0,1020$ , les défauts observés dans le diagramme spatio-temporel (Fig. 2c) ont tendance à disparaître car chaque création est immédiatement suivie d'une annihilation. Ceci se retrouve sur l'application de premier retour (Fig. 4) qui est moins développée que celle pour  $A = 0,1$  (Fig. 2b) et dont l'épaisseur de la structure a diminué, ce qui est la signature d'un comportement chaotique atténué, tendant vers un comportement quasi-périodique du type de celui habituellement rencontré lorsque deux fréquences pilotent la dynamique. En d'autres termes, la dynamique se rapproche de celle d'un tore  $T^2$  qui peut être plongé — en théorie — dans  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $A$  est encore augmenté à  $0,1090$ , la dynamique se modifie comme le révèle l'évolution temporelle de l'intensité laser (Fig. 5). L'épaisseur de l'application de premier retour est réduite de façon à ne laisser qu'une structure uni-dimensionnelle (Fig. 6b). Si cette structure avait été une boucle fermée, nous aurions pu conclure avec certitude à un comportement quasi-périodique. La structure ouverte inhabituelle peut résulter d'un effet de projection puisque le portrait de phase (Fig. 6a) révèle un tore assez complexe avec réinjection de la trajectoire au centre du tore. Une telle configuration ne peut apparaître que dans



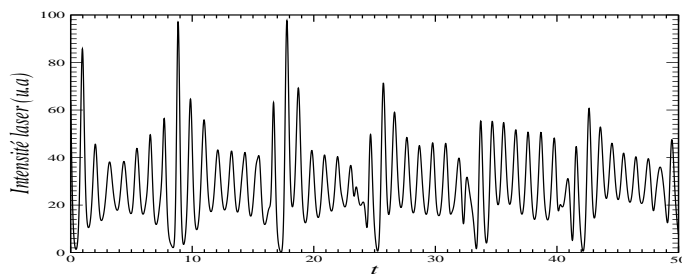
**Fig. 5.** Evolution temporelle de l'intensité laser « mesurée » au point de coordonnée  $x = 0$  pour  $A = 0,109$ . Autres paramètres :  $\sigma = 2$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $r = 30$  et  $\delta = -2$ .

un espace de dimension au moins égale à 4 : la topologie est donc non triviale et définir correctement une section de Poincaré pour un tel objet reste un problème ouvert. La zone centrale non visitée par la trajectoire, apparaissant autour de l'un des points singuliers du système, a guidé notre choix pour la construction de la section de Poincaré. Par ailleurs, les trajectoires changent leur direction d'excursion autour de cette zone, ce qui se répercute sur la section de Poincaré qui ne présente pas d'intersection dans cette région de l'espace des phases, d'où l'ouverture de la boucle. Si nous suivons notre hypothèse de travail selon laquelle les approches temporelle (portrait de phase) et spatio-temporelle doivent fournir des informations cohérentes entre elles, la quasi-périodicité de la dynamique est confirmée par le diagramme spatio-temporel qui est régulier, et sur lequel aucun défaut n'est identifié (Fig. 6c).

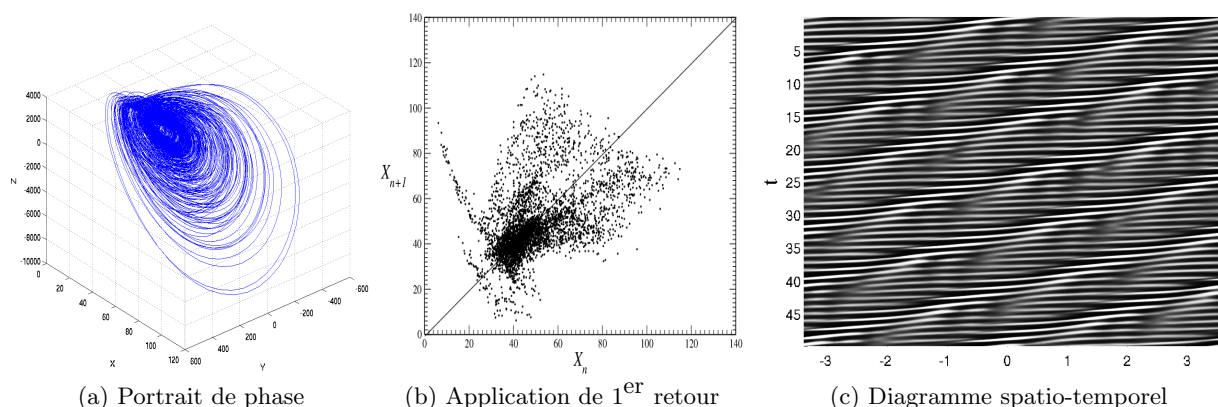


**Fig. 6.** Dynamique du laser spatio-temporel dans le plongement différentiel reconstruit à partir de l'intensité laser pour  $A = 0.109$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

Portant le paramètre  $A$  à une valeur légèrement plus élevée ( $A = 0.10951$ ), l'évolution temporelle de l'intensité laser (Fig. 7) apparaît plus « agitée » que pour les valeurs précédentes. En fait, le tore explose et la nature chaotique du comportement (Fig. 8b), est caractéristique de ce qui arrive après l'explosion d'un tore : une dispersion des points autour de la structure originale du tore qui est comme base du comportement chaotique. L'anomalie — la boucle non fermée — due à la projection de la dynamique persiste : d'une certaine manière, c'est la confirmation que cette anomalie n'est pas de nature dynamique. Le diagramme spatio-temporel correspondant à cette dynamique (Fig. 8c) révèle à nouveau un régime de création/annihilation de défauts topologiques. Le processus, néanmoins, n'est pas ici strictement périodique, puisque certains défauts sont créés avec une légère avance ou un léger retard par rapport à l'intervalle spatio-temporel moyen, sans ordre apparent. Ceci confirme donc le lien étroit entre l'augmentation de la complexité du régime dynamique et l'apparition des défauts sur les diagrammes  $x - t$ .



**Fig. 7.** Evolution temporelle de l'intensité du laser « mesurée » au point de coordonnée  $x = 0$  pour  $A = 0,10951$ . Autres paramètres :  $\sigma = 2$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $r = 30$  et  $\delta = -2$ .



**Fig. 8.** Dynamique du laser spatio-temporel dans le plongement différentiel reconstruit à partir de l'intensité laser pour  $A = 0.10951$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

L'évolution de la dynamique ici décrite se résumerait donc à une transition d'une dynamique de plus en plus contrainte par une structure instable, qui finit par entrer en collision avec le tore. Ainsi, le chaos, d'abord faiblement développé, s'atténue de plus en plus jusqu'à ce que l'épaisseur du tore soit complètement réduite (Fig. 6b) pour ne laisser place qu'à un tore de type  $T^2$  plongé dans un espace de dimension 4. Par la suite, la collision avec l'objet instable entraîne l'explosion du tore (Fig. 8b), ce qui laisse place à un comportement chaotique relativement développé. Ce scénario présente une signature évidente, tant selon l'approche purement temporelle (portraits de phase) que selon l'approche spatio-temporelle. Notons par ailleurs qu'un tel scénario — le pendant haute-dimension de ce qui est habituellement observé sur les systèmes de Duffing et Van der Pol [15] — a également été observé sur une chaîne annulaire d'oscillateurs de Rössler.

Nous avons voulu comprendre l'effet de l'extension spatiale du système sur le scénario de transition identifié pour  $L = 7$ , où  $L = 2 x_m$  représente la taille de l'extension spatiale ( $x$  varie de  $-x_m$  à  $+x_m$  et  $x_m = 3,5$ ). Pour cela, nous avons considéré un système dix fois plus étendu, à savoir  $L = 70$ . Pour  $A = 0.109$ , correspondant à un régime quasi-périodique à  $L = 7$ , le régime à  $L = 70$  s'apparente plutôt à celui du tore explosé. En fait, une rampe de valeurs croissantes de  $A$  n'a pas permis de reproduire le scénario de transition mis en évidence pour  $L = 7$ . Notamment, le régime quasi-périodique n'a pas été retrouvé. Cela pose la question de l'effet des conditions aux limites, périodiques ici, sur la sélection des nombres d'onde permis et de son lien avec les propriétés de synchronisation entre les oscillateurs élémentaires du système. Le relâchement de cette contrainte, lorsque la taille du système augmente, semble être à l'origine d'une complexité croissante dans la dynamique temporelle locale.

## 4 Conclusion

Nous avons étudié la dynamique spatio-temporelle d'un laser monomode avec diffraction en combinant les portraits de phase et les diagrammes spatio-temporels. Nous avons mis en évidence le lien étroit entre la structure de ces portraits de phase et la dynamique des défauts topologiques dans les diagrammes spatio-temporels. La complexité des évolutions purement temporelles est associée à celle de la dynamique des défauts apparaissant dans l'espace et dans le temps. Ainsi, un régime quasi-périodique sur un tore  $T^2$  est associé à des diagrammes spatio-temporels sans défaut, alors qu'une dynamique chaotique toroïdale (faiblement développée) correspond à des défauts apparaissant périodiquement dans l'espace et dans le temps. Un comportement chaotique bien développé correspond à des défauts se développant de manière irrégulière dans les diagrammes  $x - t$ . Les changements dans les diagrammes spatio-temporels sont donc étroitement liés à des bifurcations sur les portraits de phase reconstruits à partir de séries temporelles locales d'intensité laser. Dans le cas présent, le scénario correspond à une version « haute dimension » du scénario habituellement rencontré sur les systèmes de basse dimension tels que les systèmes de Duffing et Van der Pol.

## Références

1. M. C. CROSS & P. C. HOHENBERG, Pattern formation outside of equilibrium, *Review of Modern Physics*, **65**, 851-1112 (1993).
2. L. PASTUR, M-T. WESTRA & W. VAN DE WATER, Sources and sinks in 1D travelling waves, *Physica D*, **174**, 71-83 (2003).
3. H. HAKEN, Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Physics Letters A*, **53** (1), 77-78 (1975).
4. H. LEBLOND, M. BRUNEL, D. AMROUN & F. SANCHEZ, Sources and sinks of travelling waves in a single-mode laser, *Journal of Optics A*, **7**, 1-7 (2005).
5. J. PLUMECOQ, C. SZWAJ, D. DEROZIER, M. LEFRANC & S. BIELAWSKI, Eckhaus instability induced by nonuniformities in a laser, *Physics Review A*, **64**, 061801(R) (2001).
6. C. LETELLIER, A. DINKLAGE, H. EL-NAGGAR, C. WILKE & G. BONHOMME, Experimental evidence for a torus breakdown through a global bifurcation in a glow discharge plasma, *Physics Review E*, **63**, 042702 (2001).
7. M. N. BAPTISTA & I. L. CALDAS, Dynamics of the two frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit, *Physics Review E*, **58**, 4413-4420 (1998).
8. F. LUSSEYRAN, L. PASTUR & C. LETELLIER, Dynamical analysis of an intermittency in an open cavity flow, *Physics of Fluids*, **20**, 114101 (2008)
9. D. AMROUN, *Dynamiques spatio-temporelles d'un laser monomode. Influence des effets spatiaux et des interactions dipôle-dipôle*, Thèse de Doctorat, Université de Rouen (juillet 2004).
10. D. AMROUN, C. LETELLIER, L. PASTUR, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Spatio-temporal dynamics versus temporal analysis : What can we learn ?, *First International Seminar on Fluid Dynamics and Materials Processing FDMP'2007*, Alger, 2-4 juin (2007).
11. D. AMROUN ALIANE, L. PASTUR, C. LETELLIER, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, A link between spatio-temporal and temporal dynamics of a laser, *Dynamics Days Europe 2008*, Delft, 25-29 août (2008).
12. P. K. JAKOBSEN, J. V. MOLONEY, A. C. NEWELL & R. INDIK, Space-time dynamics of wide-gain-section lasers, *Physics Review A*, **45**, 8129-8137 (1992).
13. D. AMROUN, M. BRUNEL, C. LETELLIER, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers, *Physica D*, **203**, 185-197 (2005).
14. N. H. PACKARD, J. P. CRUTCHFIELD, J. D. FARMER & R. S. SHAW, Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, **45**, 712-715 (1980).
15. C. LETELLIER, V. MESSEGER & R. GILMORE, From quasi-periodicity to toroïdal chaos : analogy between the Curry-Yorke map and the van der Pol system, *Physical Review E*, **77** (4), 046203, 2008.
16. P. COULLET, C. ELPHICK, L. GILL & J. LEGA, Topological defects of wave patterns, *Physical Review Letters*, **59**, 884-887 (1987).

# Sur les modèles de type Kohn-Sham avec fonctionnelles d'échange-corrélation LDA et GGA

A. Anantharaman<sup>1,2</sup> & E. Cancès<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et Université Paris Est, 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

<sup>2</sup> INRIA Rocquencourt, Equipe-Projet Micmac, Domaine de Voluceau, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France

ananthaa@cermics.enpc.fr

**Résumé.** Cet article propose une analyse mathématique de modèles couramment utilisés en calcul de structures électroniques, à savoir les modèles de Kohn-Sham standard et étendu avec fonctionnelles d'échange-corrélation de type LDA et GGA. Après avoir rappelé le cadre général de la théorie de la fonctionnelle de la densité dans lequel s'inscrit ce travail, nous présentons les modèles étudiés ainsi que les résultats d'existence obtenus, puis donnons les grandes lignes des preuves.

**Abstract.** This article is concerned with the mathematical analysis of widely used models in computational chemistry, the so-called standard and extended Kohn-Sham models, in the local density approximation (LDA) and generalized gradient approximation (GGA) frameworks. After recalling the general background of density functional theory which underlies this work, we present the models we considered and the existence results we obtained, and then give the sketch of the proofs.

## 1 Introduction

Ce travail traite de modèles de chimie quantique utilisés pour calculer les états fondamentaux de structures électroniques (atomes, molécules, solides,...). L'énergie de l'état fondamental d'un système composé de  $M$  noyaux de charge  $z_1, \dots, z_M$  ( $z_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  en unités atomiques) et  $N$  électrons est l'infimum du spectre du hamiltonien

$$\widehat{H}_N = \widehat{T} + \sum_{i=1}^N V(\mathbf{r}_i) + \widehat{V}_{ee} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta_{\mathbf{r}_i} - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{z_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_k|} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

où  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{R}_k$  sont les positions dans  $\mathbb{R}^3$  du  $i^{\text{ème}}$  électron et du  $k^{\text{ème}}$  noyau respectivement.  $\widehat{T}$  correspond à l'énergie cinétique des électrons,  $V$  au potentiel coulombien d'attraction exercé par les noyaux sur les électrons, et  $\widehat{V}_{ee}$  à la répulsion interélectronique. Sous l'approximation de Born-Oppenheimer, les positions des noyaux sont fixes et on s'intéresse seulement au mouvement des électrons.

L'opérateur  $\widehat{H}_N$  agit sur l'espace des états du système, décrit en mécanique quantique par des fonctions d'onde  $\Psi$  à  $2N$  variables ( $N$  variables de position et  $N$  variables de spin), normalisées et antisymétriques par rapport à la permutation de deux électrons (ceux-ci étant des fermions). Calculer l'énergie du fondamental revient donc à calculer l'infimum de  $E(\Psi) = \langle \Psi | \widehat{H}_N | \Psi \rangle$  sur l'espace des fonctions d'onde.

En pratique, cette approche par fonctions d'onde n'est pas utilisée pour des systèmes comprenant un grand nombre d'électrons. En effet, représenter numériquement une fonction d'onde à  $N$  variables d'espace avec  $N$  grand serait trop coûteux. Ceci donne tout son intérêt au théorème suivant dû à Hohenberg et Kohn, qui est le fondement de la théorie de la fonctionnelle de la densité.

**Théorème 1 (Hohenberg-Kohn [3]).** *Il existe une fonctionnelle  $F(\rho)$  de la densité électronique  $\rho$  telle que l'énergie  $E_0$  et la densité  $\rho_0$  de l'état fondamental pour  $N$  électrons en présence du potentiel externe  $V$  sont données par*

$$E_0 = \min_{\rho} \left\{ F(\rho) + \int_{\mathbb{R}^3} \rho V \right\}$$

où la minimisation est réalisée sur l'ensemble des densités  $\rho$  telles que  $\rho \geq 0$  et  $\int_{\mathbb{R}^3} \rho = N$ .

$F$  est universelle et ne dépend pas du potentiel  $V$  créé par les noyaux. On peut dès lors, en théorie, calculer l'état fondamental d'un système en considérant uniquement la densité électronique en lieu et place des fonctions d'onde. Cependant il n'existe pas d'expression de  $F$  exploitable en pratique, et il faut utiliser des approximations. Dans [4], Kohn et Sham ont proposé une méthode pour calculer  $F$  de manière approchée.  $F$  est décomposé en trois termes

$$F(\rho) = T_{KS}(\rho) + J(\rho) + E_{xc}(\rho)$$

où  $T_{KS}$  est une approximation de l'énergie cinétique calculée à l'aide d'un petit sous-ensemble de fonctions d'onde,  $J$  est la composante classique de la répulsion interélectronique et  $E_{xc}$  est une fonctionnelle dite d'échange-corrélation qui porte l'erreur faite sur les deux termes précédents. L'effort de modélisation se concentre sur  $E_{xc}$ .

L'approche de Kohn et Sham a permis de faire de la théorie de la fonctionnelle de la densité un outil de calcul efficace en pratique. Depuis 40 ans, un grand nombre de modèles de type Kohn-Sham ont été proposés, différant par la fonctionnelle d'échange-corrélation  $E_{xc}$ . Nous nous sommes intéressés à deux modèles très répandus, dans le but de prouver que le problème de minimisation du théorème 1 est bien posé. Nous détaillons ces modèles et les résultats obtenus dans la section suivante.

## 2 Modèles étudiés et résultats

### 2.1 Modèles Kohn-Sham standard et étendu, LDA et GGA

Pour simplifier l'exposé, nous ne tenons pas compte de la variable spin. Ceci implique que l'on considère un nombre pair  $N = 2N_p$  d'électrons qui « vont par paires ». Le modèle de Kohn-Sham standard s'écrit alors sous la forme du problème de minimisation suivant

$$I_N^{\text{KS}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi_i|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\Phi} V + J(\rho_{\Phi}) + E_{xc}(\rho_{\Phi}), \right. \\ \left. \Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_p}) \in (H^1(\mathbb{R}^3))^{N_p}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_i \varphi_j = \delta_{ij}, \quad \rho_{\Phi} = 2 \sum_{i=1}^{N_p} |\varphi_i|^2 \right\} \quad (1)$$

Le modèle de Kohn-Sham étendu consiste en une variante de (1) dans laquelle la minimisation a lieu non sur des fonctions mais sur des opérateurs, résultant en le problème suivant

$$I_N^{\text{EKS}} = \inf \left\{ \text{Tr}(-\Delta \gamma) + \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\gamma} V + J(\rho_{\gamma}) + E_{xc}(\rho_{\gamma}), \right. \\ \left. \gamma \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^3)), \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad \text{Tr}(\gamma) = N_p, \quad \text{Tr}(-\Delta \gamma) < \infty, \quad \rho_{\gamma}(\mathbf{r}) = 2\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right\} \quad (2)$$

où  $\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^3))$  désigne l'ensemble des opérateurs auto-adjoints bornés sur  $L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $\text{Tr}$  la trace d'un opérateur. En notant  $\mathcal{E}(\gamma) = \text{Tr}(-\Delta \gamma) + \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\gamma} V + J(\rho_{\gamma}) + E_{xc}(\rho_{\gamma})$ , remarquons que (1) peut se réécrire en termes d'opérateurs sous la forme

$$I_N^{\text{KS}} = \inf \{ \mathcal{E}(\gamma), \quad \gamma \in \mathcal{P}_{N_p} \} \quad (3)$$



où

$$\mathcal{P}_{N_p} = \{\gamma \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^3)) \mid \gamma^2 = \gamma, \text{Tr}(\gamma) = N_p, \text{Tr}(-\Delta\gamma) < \infty\}$$

Le problème (2) correspond donc à une minimisation sur un ensemble qui est l'enveloppe convexe de l'ensemble de minimisation du problème (1). Du point de vue de la chimie, le modèle standard (1) correspond à des nombres d'occupation des niveaux d'énergie entiers, alors que le modèle étendu (2) autorise des nombres d'occupation fractionnaires.

Dans [4], Kohn et Sham ont proposé pour le terme d'échange-corrélation une fonctionnelle dite LDA (Local Density Approximation) qui admet l'expression suivante

$$E_{xc}^{LDA}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\rho(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \quad (4)$$

où  $\rho^{-1}g(\rho)$  est une approximation de la densité d'échange-corrélation pour un gaz uniforme d'électrons de densité  $\rho$ . Dans les années 80, des améliorations ont été proposées (voir par exemple [5]), donnant naissance aux fonctionnelles d'échange-corrélation de type GGA (Generalized Gradient Approximation) de la forme

$$E_{xc}^{GGA}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} h(\rho(\mathbf{r}), \frac{1}{2}|\nabla\sqrt{\rho(\mathbf{r})}|^2) d\mathbf{r} \quad (5)$$

Les modèles (1) et (2) avec fonctionnelles d'échange-corrélation LDA (4) et GGA (5) étant très utilisés pour le calcul de structures électroniques, nous avons cherché à déterminer sous quelles conditions sur les fonctions  $g$  et  $h$  ils sont bien posés, au sens où ils admettent un minimiseur. A notre connaissance, il existe très peu de résultats mathématiques sur ce type de modèles, le principal étant l'existence d'un minimiseur pour le modèle LDA standard (1) et (4) établie par Le Bris dans [6].

## 2.2 Résultats

Nous commençons par donner les hypothèses sur les fonctions  $g$  et  $h$  sous lesquelles nos résultats sont vrais.

- la fonction  $g$  de (4) est de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ , deux fois dérivable et telle que

$$g(0) = 0 \quad (6)$$

$$g' \leq 0 \quad (7)$$

$$\exists 0 < \beta_- \leq \beta_+ < \frac{2}{3} \quad \text{t.q.} \quad \sup_{\rho \in \mathbb{R}_+} \frac{|g'(\rho)|}{\rho^{\beta_-} + \rho^{\beta_+}} < \infty \quad (8)$$

$$\exists 1 \leq \alpha < \frac{3}{2} \quad \text{t.q.} \quad \limsup_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{g(\rho)}{\rho^\alpha} < 0 \quad (9)$$

- la fonction  $h$  de (5) est de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ , deux fois dérivable par rapport à la seconde variable et telle que

$$h(0, \kappa) = 0, \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}_+ \quad (10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} \leq 0 \quad (11)$$

$$\exists 0 < \beta_- \leq \beta_+ < \frac{2}{3} \quad \text{t.q.} \quad \sup_{(\rho, \kappa) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{\left| \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \kappa) \right|}{\rho^{\beta_-} + \rho^{\beta_+}} < \infty \quad (12)$$

$$\exists 1 \leq \alpha < \frac{3}{2} \quad \text{t.q.} \quad \limsup_{(\rho, \kappa) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{h(\rho, \kappa)}{\rho^\alpha} < 0 \quad (13)$$

$$\exists 0 < a \leq b < \infty \quad \text{t.q.} \quad \forall (\rho, \kappa) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad a \leq 1 + \frac{\partial h}{\partial \kappa}(\rho, \kappa) \leq b \quad (14)$$

$$\forall (\rho, \kappa) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad 1 + \frac{\partial h}{\partial \kappa}(\rho, \kappa) + 2\kappa \frac{\partial^2 h}{\partial \kappa^2}(\rho, \kappa) \geq 0 \quad (15)$$

Les conditions (6)-(9) sur la fonctionnelle d'échange-corrélation LDA ne sont pas restrictives, et sont vérifiées par la fonctionnelle LDA originellement proposée par Kohn et Sham  $\left(g(\rho) = -\frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}\right)$  ainsi que par toutes les fonctionnelles couramment utilisées (avec  $\alpha = \frac{4}{3}$  et  $\beta_- = \beta^+ = \frac{1}{3}$ ). En ce qui concerne le cas GGA, nous avons vérifié numériquement que les conditions (10)-(15) sont satisfaites par la fonctionnelle PZ81 définie dans [8]. Nos résultats principaux sont les deux théorèmes suivants.

**Théorème 2 (Modèle KS-LDA étendu).** *On suppose que  $Z \geq N = 2N_p$  (système neutre ou de charge positive) et que la fonction  $g$  vérifie (6)-(9). Alors le modèle Kohn-Sham LDA étendu (2) avec  $E_{xc}$  donné par (4) admet un minimiseur  $\gamma_0$ . De plus,  $\gamma_0$  satisfait l'équation d'Euler*

$$\gamma_0 = \chi_{(-\infty, \epsilon_F)}(H_{\rho_{\gamma_0}}) + \delta \quad (16)$$

pour un  $\epsilon_F \leq 0$ , avec

$$H_{\rho_{\gamma_0}} = -\frac{1}{2}\Delta + V + \rho_{\gamma_0} \star |\mathbf{r}|^{-1} + g'(\rho_{\gamma_0}),$$

où  $\chi_{(-\infty, \epsilon_F)}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $(-\infty, \epsilon_F)$  et où  $\delta \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^3))$  est tel que  $0 \leq \delta \leq 1$  et  $\text{Ran}(\delta) = \text{Ker}(H_{\rho_{\gamma_0}} - \epsilon_F)$ .

**Théorème 3 (Modèle KS-GGA étendu pour les systèmes à deux électrons).** *On suppose que  $Z \geq N = 2N_p = 2$  (système neutre ou de charge positive avec deux électrons) et que la fonction  $h$  vérifie (10)-(15). Alors le modèle Kohn-Sham GGA étendu (2) avec  $E_{xc}$  donné par (5) admet un minimiseur  $\gamma_0$ . De plus,  $\gamma_0 = |\phi\rangle\langle\phi|$  où  $\phi$  est un minimiseur pour le modèle Kohn-Sham standard (1) avec  $N_p = 1$ , vérifiant donc l'équation d'Euler*

$$-\frac{1}{2}\text{div} \left( \left( 1 + \frac{\partial h}{\partial \kappa}(\rho_\phi, |\nabla\phi|^2) \right) \nabla\phi \right) + \left( V + \rho_\phi \star |\mathbf{r}|^{-1} + \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho_\phi, |\nabla\phi|^2) \right) \phi = \epsilon\phi \quad (17)$$

pour un  $\epsilon < 0$ , avec  $\rho_\phi = 2\phi^2$ . De plus,  $\phi \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$  avec  $0 < \alpha < 1$  et décroît exponentiellement à l'infini. Enfin,  $\phi$  peut-être choisi positif et est un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre  $\epsilon$  de l'opérateur auto-adjoint

$$-\frac{1}{2}\text{div} \left( \left( 1 + \frac{\partial h}{\partial \kappa}(\rho_\phi, |\nabla\phi|^2) \right) \nabla\cdot \right) + V + \rho_\phi \star |\mathbf{r}|^{-1} + \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho_\phi, |\nabla\phi|^2).$$

Nous n'avons pu étendre les résultats du théorème 3 au cas général de  $N > 2$  électrons. Ceci est dû à la structure de l'équation d'Euler quasilineaire associée au problème de minimisation, qui est scalaire pour  $N = 2$  mais forme un système que nous ne savons traiter pour  $N > 2$ .

### 3 Eléments de preuve

Nous donnons ici les principaux arguments permettant de prouver les théorèmes 2 et 3. Nous choisissons de considérer le cas GGA, l'idée de la preuve étant la même dans le cas LDA. Puisque nous traitons dans le théorème 3 des systèmes à deux électrons, on montre aisément que le problème se réécrit de la manière suivante

$$I_1 = \inf \left\{ E(\phi), \phi \in H^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} |\phi|^2 = 1 \right\} \quad (18)$$

avec

$$E(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\phi V + J(\rho_\phi) + \int_{\mathbb{R}^3} h(\rho_\phi, |\nabla\phi|^2)$$

et  $\rho_\phi = 2\phi^2$ . On définit, comme il est usuel de le faire dans l'étude des modèles de structures électroniques, la famille de problèmes indexée par  $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$I_\lambda = \inf \left\{ E(\phi), \phi \in H^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} |\phi|^2 = \lambda \right\} \quad (19)$$

De plus, on introduit la famille associée de problèmes dits « à l'infini »

$$I_\lambda^\infty = \inf \left\{ E^\infty(\phi), \phi \in H^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} |\phi|^2 = \lambda \right\}$$

avec

$$E^\infty(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 + J(\rho_\phi) + \int_{\mathbb{R}^3} h(\rho_\phi, |\nabla \phi|^2)$$

On est alors en mesure de prouver, sous les hypothèses (10)-(15), les lemmes suivants.

**Lemme 1.** 1.  $I_0 = I_0^\infty = 0$  et pour tout  $\lambda > 0$ ,  $-\infty < I_\lambda < I_\lambda^\infty < 0$  ;

2. Les fonctions  $\lambda \mapsto I_\lambda$  and  $\lambda \mapsto I_\lambda^\infty$  sont continues et décroissantes ;

3. pour tout  $0 < \mu < \lambda$ ,

$$I_\lambda \leq I_\mu + I_{\lambda-\mu}^\infty. \quad (20)$$

**Lemme 2.** Soit  $0 \leq \mu \leq 1$  et  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite minimisante pour  $I_\mu$  (respectivement pour  $I_\mu^\infty$ ) qui converge vers  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$  faiblement dans  $H^1(\mathbb{R}^3)$ . Si  $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \mu$ ,  $\phi$  est un minimiseur pour  $I_\mu$  (respectivement pour  $I_\mu^\infty$ ).

Le lemme 2 implique que s'il existe une suite minimisante pour (18) relativement compacte dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , sa limite est un minimiseur de (18). Il s'agit donc d'exhiber une telle suite. A cette fin, on considère une suite d'Ekeland ([2]) qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \phi_n^2 = 1 \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(\phi_n) = I_1 \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E'(\phi_n) + \theta_n \phi_n = 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\mathbb{R}^3) \quad (23)$$

pour une suite  $\theta_n$  de réels. La condition d'Ekeland (23) se réécrit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \left( 1 + \frac{\partial h}{\partial \kappa}(\rho_{\phi_n}, |\nabla \phi_n|^2) \right) \nabla \phi_n \right) + \left( V + \rho_{\phi_n} \star |\mathbf{r}|^{-1} + \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho_{\phi_n}, |\nabla \phi_n|^2) \right) \phi_n + \theta_n \phi_n \\ = \eta_n \quad \text{avec} \quad \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (24)$$

Cette « presque équation d'Euler » quasilineaire est la principale différence entre le cas LDA (qui donne une équation semilineaire) et le cas GGA.

Pour montrer que  $\phi_n$  est à extraction près relativement compacte dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , on utilise le lemme de concentration-compacité de Lions.

**Lemme 3 (lemme de concentration-compacité de Lions [7]).** Soit  $\lambda > 0$  et  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $H^1(\mathbb{R}^3)$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \phi_n^2 = \lambda.$$

Alors on peut extraire de  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite  $(\phi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que l'une des trois conditions suivantes soit vraie :

1. (Compacité) Il existe une suite  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^3$ , telle que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $R > 0$  tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{y_k + B_R} \phi_{n_k}^2 \geq \lambda - \epsilon.$$

2. (Evanescence) Pour tout  $R > 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{y+B_R} \phi_{n_k}^2 = 0.$$

3. (Dichotomie) Il existe  $0 < \delta < \lambda$  et

- une suite  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de points de  $\mathbb{R}^3$ ,
- deux suites croissantes de réels strictement positifs  $(R_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(R_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{1,k} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_{2,k} - R_{1,k} = +\infty$$

- deux suites  $(\phi_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\phi_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$  bornées dans  $H^1(\mathbb{R}^3)$   
tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{n_k} = \phi_{1,k} \quad \text{sur } y_k + B_{R_{1,k}}, \quad \phi_{n_k} = \phi_{2,k} \quad \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus (y_k + B_{R_{2,k}}) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{1,k}^2 = \delta, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{2,k}^2 = \lambda - \delta \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_{n_k} - (\phi_{1,k} + \phi_{2,k})\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_{n_k}\|_{L^p(y_k + (B_{R_{2,k}} \setminus \overline{B_{R_{1,k}}}))} = 0 \quad \text{pour } 2 \leq p < 6 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{Supp } \phi_{1,k}, \text{Supp } \phi_{2,k}) = +\infty \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla \phi_{n_k}|^2 - |\nabla \phi_{1,k}|^2 - |\nabla \phi_{2,k}|^2) \geq 0. \end{array} \right.$$

On déduit du lemme 3 qu'il suffit de montrer qu'il n'y a ni évanescence ni dichotomie pour la suite d'Ekeland  $\phi_n$  pour pouvoir conclure qu'elle est à extraction près relativement compacte dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

On montre que s'il y avait évanescence pour  $\phi_n$ , on aurait  $I_1 \geq 0$ , ce qui contredit le lemme 1. Prouver qu'il ne peut pas y avoir dichotomie est plus compliqué : si cela se produit, alors par application répétée du cas de dichotomie du lemme 3 on obtient un ensemble a priori infini ( $m \in \mathbb{N}$ ) de suites  $(\phi_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant des équations du type (24). A l'aide des propriétés spectrales de l'opérateur sous-jacent à ces équations, on commence par montrer qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini  $M$  de telles suites. Puis, en construisant une fonction test particulière obtenue par combinaison des limites de ces suites, en estimant son énergie et en utilisant (20), on aboutit à une contradiction. La suite  $\phi_n$  est donc relativement compacte et converge vers un minimiseur de (18).

## Références

1. A. ANANTHARAMAN & E. CANCÈS, On Kohn-Sham models with LDA and GGA exchange-correlation functionals, Preprint disponible sur <http://arxiv.org/abs/0809.5139> (2008).
2. I. EKELAND, Nonconvex minimization problems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **1**, 443-474 (1979).
3. P. HOHENBERG & W. KOHN, Inhomogeneous electron gas, *Physical Review B*, **136**, 864-871 (1964).
4. W. KOHN & L. J. SHAM, *Physical Review A*, **140**, 1133 (1965).
5. D. C. LANGRETH & J. P. PERDEW, Theory of nonuniform electronic systems. I. Analysis of the gradient approximation and a generalization that works, *Physical Review B*, **21**, 5469-5493 (1980).
6. C. LE BRIS, *Quelques problèmes mathématiques en chimie quantique moléculaire*, Thèse de l'Ecole Polytechnique (1993).
7. P.-L. LIONS, The concentration-compactness method in the Calculus of Variations. The locally compact case, Part. I : *Anal. non-linéaire, Ann. IHP*, **1**, 109-145 (1984) — Part. II : *Anal. non-linéaire, Ann. IHP*, **1**, 223-283 (1984).
8. J. P. PERDEW & A. ZUNGER, Self-interaction correction to density-functional approximations for many-electron systems, *Physical Review B*, **23**, 5048-5079 (1981).

# Orbites régulières et transition de phases hors-d'équilibre dans les systèmes avec interactions à longue portée

R. Bachelard<sup>1</sup>, C. Chandre<sup>2</sup>, M.-E. Couprie<sup>1</sup>, D. Fanelli<sup>3</sup>, X. Leoncini<sup>2</sup>, & S. Ruffo<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Synchrotron SOLEIL, L'Orme des Merisiers

Saint-Aubin – BP 48, F-91192 Gif-sur-Yvette cedex, France

<sup>2</sup> Centre de Physique Théorique, CNRS – Aix-Marseille Université

Luminy, Case 907, F-13288 Marseille cedex 9, France

<sup>3</sup> Centro interdipartimentale per lo Studio delle Dinamiche Complesse (CSDC)

and INFN and Dipartimento di Energetica “Sergio Stecco”, Università di Firenze

via s. Marta 3, 50139 Firenze, Italia

romain.bachelard@synchrotron-soleil.fr

**Résumé.** Les interactions à longue portée (c'est-à-dire en  $1/r^\alpha$ , avec  $\alpha < d$  la dimension du système) sont présentes dans de nombreux domaines de la physique, de l'interaction ondes-particules (physique des plasmas, lasers à électrons libres, etc) à l'astrophysique et aux condensats de Bose-Einstein. Or leur dynamique présente une caractéristique très particulière, celle de se retrouver piégée dans des régimes hors d'équilibre sur des temps très longs (divergents avec le nombre de particules). Ces dynamiques métastables sont appelés “états quasi-stationnaires”.

Nous nous intéressons à ces états à travers le modèle paradigmatique Hamiltonian Mean Field. Ce système de  $N$  rotateurs couplés est caractérisé macroscopiquement par sa magnétisation  $M = \langle e^{ix_j} \rangle_{j=1:N}$ , qui quantifie le degré d'agrégation des  $N$  corps. Les états quasi-stationnaires peuvent alors être décomposés en deux grandes familles, les états “magnétisés” et les états “non-magnétisés”.

On peut alors montrer que lorsque le nombre de degrés de liberté du système (c'est-à-dire le nombre de particules) augmente, les orbites régulières apparaissent et se multiplient, associées à des tores invariants de la dynamique d'une particule-test. L'observation de ces tores représente une interprétation dynamique de l'émergence des états quasi-stationnaires, parallèlement à l'explication statistique de ce phénomène (réalisé grâce à un mécanisme de maximisation d'entropie). La transition de phases hors d'équilibre de ce système (d'un régime magnétisé à non-magnétisé) peut alors être réinterprétée comme une bifurcation dynamique des structures de l'espace des phases. Une phénoménologie similaire est observée dans un modèle de laser à électrons libres.

**Abstract.** Long-range interactions (that is, with a potential in  $1/r^\alpha$ , with  $\alpha < d$  the system dimension) can be found in many domains, from the wave-particle interaction (plasma physics, free electron lasers, etc) to astrophysics or Bose-Einstein condensates. Their dynamics has the peculiarity of getting trapped into out-of-equilibrium regimes over very long times (diverging with the number of particles). These metastables dynamics are usually called “Quasi-Stationary States”.

We focus on the Hamiltonian Mean-Field model, often referred as paradigmatic of the long-range interactions. This system of  $N$  coupled rotators is macroscopically characterized by its magnetization  $M = \langle e^{ix_j} \rangle_{j=1:N}$ , which quantifies the aggregation of the bodies. The quasi-stationary states can then be decomposed into two kinds, the “magnetized states” and the “non-magnetized” ones.

One can then show that one the number of degrees of freedom of the system increases (that is, the number of particles) increases, some regular orbits appear and multiply, which are associated to invariant tori of the dynamics of a test-particle. The observation of these tori represents a dynamical interpretation of the emergence of the quasi-stationary states, in parallel with the statistical explanation (based on a maximization of entropy scheme). The out-of-equilibrium phase transition (from a magnetized regime to the non-magnetized one) can then be reinterpreted as a dynamical bifurcation of phase-space structures. A similar phenomenology can be found in a model of free electron laser.

## 1 Introduction

La grande majorité des phénomènes observés dans la nature résulte d'interactions complexes entre un grand nombre de constituants élémentaires. Une observation très commune est l'émergence de trajectoires régulières, malgré la complexité du réseau de couplage en jeu. Le comportement collectif de grands ensembles de particules peut être décrit à l'aide de la mécanique statistique : les fondements théoriques de la mécanique statistique à l'équilibre reposent sur l'hypothèse d'ergodicité, c'est-à-dire l'accord entre les moyennes temporelles et celles sur les ensembles. Ainsi, en supposant un mélange global effectif des trajectoires dans l'espace des phases, on peut conclure à l'ergodicité du système et ainsi à la validité de la mécanique statistique [1]. Le comportement thermodynamique est obtenu dans la limite où le nombre de degrés de liberté croît à l'infini, ce qui offre des chemins innombrables au chaos. En effet, dans cette limite, les régions régulières (tores invariants) ne possèdent pas assez de dimensions pour empêcher les trajectoires de se disperser : l'essentiel de l'espace des phases est alors rempli de trajectoires chaotiques, catalysant ainsi le mélange [2].

Pourtant, les systèmes à interactions à longue portée [3,4] possèdent une dynamique de relaxation à l'équilibre extrêmement lente. Plus exactement, avant d'atteindre un état asymptotique [5,6], ils se retrouvent piégés dans des états hors-d'équilibre *métastables*. Le temps de convergence à l'équilibre augmente avec la taille du système, et diverge formellement dans la limite thermodynamique, l'ergodicité perdant alors sa pertinence. Ainsi, la convergence à l'équilibre des systèmes gravitants n'a jamais été démontrée et reste problématique. Les galaxies pourraient donc représenter les exemples les plus spectaculaires de ces dynamiques hors-d'équilibre [7], mais des phénomènes analogues ont aussi été observés dans des problèmes de physiques des plasmas [8].

Ces états métastables, dénommés Etats Quasi-Stationnaires (EQS) dans la littérature, représentent souvent les seuls régimes expérimentaux accessibles (c'est le cas par exemple du Laser à Electrons Libres [9]). Ces interactions à longue portée sont de nature auto-cohérente, telle une particule interagissant avec un champ qui résulte lui-même de l'action combinée de toutes les autres particules, ou bien d'un champ externe [8]. C'est justement cette auto-cohérence qui engendre cette régularité du mouvement si largement observée. Par ailleurs, des classes différentes de conditions initiales peuvent conduire à des temps de relaxation différents.

L'approche traditionnelle pour comprendre l'émergence de trajectoires régulières est basée sur le résultat suivant : si le hamiltonien étudié est proche de l'intégrabilité, la théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser [10] prouve que l'espace des phases est rempli de tores invariants sur lesquels le mouvement est quasi-périodique. Par contre, dans ce contexte, l'augmentation du nombre de particules augmente la contribution des trajectoires chaotiques [2], en contradiction flagrante avec le fait que les EQS prédominent dans la limite des grands  $N$ . Le scénario évoqué ci-dessus ne permet donc pas d'expliquer la présence de mouvements réguliers dans les systèmes avec interactions à longue portée.

Nous proposons ici tout d'abord un cadre d'interprétation pour les EQS : nous nous basons sur l'idée que les tores peuvent aussi se former dans l'espace des phases grâce à l'interaction auto-consistante dans la limite thermodynamique. Comme nous allons le voir, avec un faible nombre  $N$  de degrés de liberté, la trajectoire d'une particule dans un système avec interactions à longue portée est erratique, mais elle devient de plus en plus régulière lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Ces trajectoires proviennent en fait d'un hamiltonien effectif dépendant du temps et à basse dimension. Puis nous mettons en regard la dynamique d'un modèle paradigmatique avec celle du Laser à Electrons Libres (LEL) : les propriétés de régularisation de la dynamique sont observées, de même que le changement de structures macroscopiques suivant les régimes d'EQS. Cette observation nous permet de conclure à la généralité de notre approche dans le cadre des interactions à longue portée.

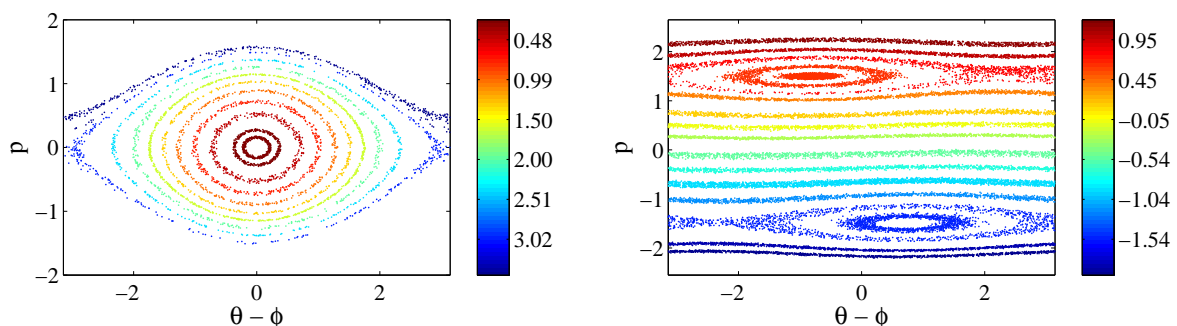
## 2 Le modèle Hamiltonian Mean-Field

Le modèle Hamiltonian Mean-Field (HMF) [12], une référence pour étudier les systèmes à longue portée, décrit l'évolution de  $N$  particules couplées par une force attractive, à travers le hamiltonien  $H$  :

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (1 - \cos(\theta_i - \theta_j)) \right], \quad (1)$$

où  $\theta_i$  et  $p_i$  correspondent respectivement à la position de la particule  $i$  sur le cercle unité et à son moment. Notons que le hamiltonien (1) peut aussi être vu comme une version simplifiée de modèles gravitationnels [13] ou de plasmas [14], lorsque seule la première harmonique du développement de Fourier du potentiel est considérée. Afin de caractériser le comportement du système, on peut introduire la "magnétisation"  $\mathbf{M} = \frac{1}{N} (\sum \cos \theta_i, \sum \sin \theta_i) = M(\cos \phi, \sin \phi)$ , qui reflète le degré d'aggrégation spatial des particules (homogénéité/inhomogénéité).

Nous utilisons ici des conditions initiales de type "water-bag", c'est-à-dire d'un paquet de particules uniformément distribuées dans un rectangle  $[-\theta_0, \theta_0] \times [-p_0, p_0]$  du plan  $(\theta, p)$ . Ces états sont initialement magnétisés  $M = M_0 = \sin(\theta_0)/\theta_0$ , et possèdent une énergie moyenne par particule de  $U = p_0^2/6 + (1 - M_0^2)/2$ . Lors des simulations numériques à partir de ce water-bag, le système se retrouve piégé dans un EQS [5,6].

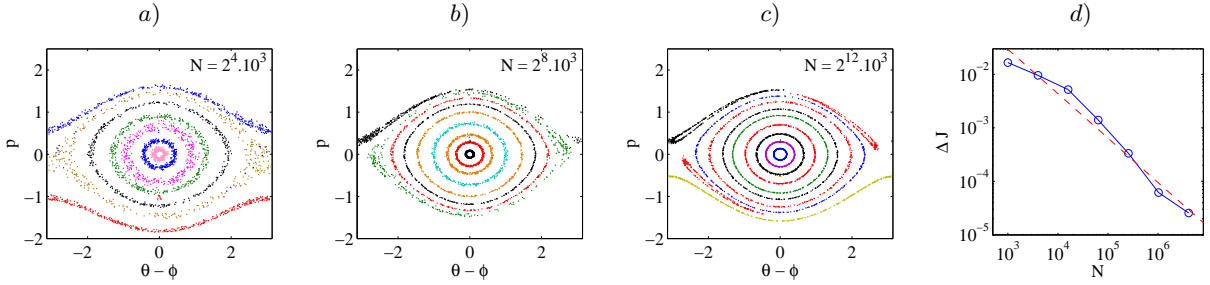


**Fig. 1.** Sections de Poincaré de quelques particules du hamiltonien HMF (1) pour  $N = 2 \times 10^5$  dans le régime EQS, pour deux types de conditions initiales :  $(M_0, U) = (0.6, 0.54)$  (figure de gauche) et  $(M_0, U) = (0.6, 0.88)$  (figure de droite). Dans le premier cas, un unique agrégat de particules apparaît, qui génère un EQS à magnétisation finie ( $M_{QSS} \approx 0.5$ ), tandis que dans le second cas, deux agrégats symétriques émergent, qui caractérisent un EQS à faible magnétisation. Le code de couleurs correspond aux valeurs de l'action associée aux particules.

La particule  $i$  obéit aux équations du mouvement suivantes  $\dot{p}_i = -M \sin(\theta_i - \phi)$  et  $\dot{\theta}_i = p_i$ , où  $M$  et  $\phi$  sont des fonctions de *l'ensemble des particules*. Les simulations numériques suggèrent que, pour  $N$  assez grand, tant la magnétisation  $M$  que  $\phi$  rentrent dans un régime oscillatoire particulier. Le mouvement de la particule isolée se retrouve alors gouvernée par un hamiltonien effectif dépendant du temps à un degré de liberté (généralement appelé hamiltonien à un degré et demi de liberté).

Cet aspect de la dynamique nous pousse à explorer les propriétés de l'espace des phases des EQS à l'aide d'une technique inspirée des sections de Poincaré. Plus spécifiquement, après le régime transitoire,  $M$  oscille autour d'une valeur moyenne  $\bar{M}$  : nous enregistrons alors les positions et moments de quelques particules choisies  $(\theta_i, p_i)$  lorsque  $M(t) = \bar{M}$  et  $dM/dt > 0$ . Les sections stroboscopiques correspondantes sont visibles sur la Fig. 1. Deux types de structures de l'espace des phases sont observées, en fonction des conditions initiales  $(M_0, U)$ , l'un avec un fort agrégat central, le second avec deux agrégats symétriques. Le premier EQS est caractérisé par une magnétisation finie (phase inhomogène), le second possède une magnétisation oscillante très faible (phase homogène).

L'EQS à un agrégat peut idéalement être mis en correspondance avec une collection de pendules en faible interaction. Ainsi que l'analyse stroboscopique le révèle, les particules évoluent sur des trajectoires régulières, qui sont quasiment à une dimension, bien qu'elle possède un certain degré de diffusion locale, une *épaisseur*. Dans le cas de l'EQS à deux agrégats, la section de Poincaré se rapproche très fortement de celle d'une particule évoluant dans le potentiel de deux ondes contra-propagatives. Ces dernières n'interagissent que très faiblement, puis leurs vitesses de propagation sont très différentes. Afin d'avoir une estimation quantitative de l'épaisseur des tores en fonction du nombre de particules, nous nous concentrons sur le régime à un agrégat. Les figures a), b) et c) de la Fig. 2 montrent l'espace des phases de particules pour des valeurs croissantes de  $N$ . Une tendance nette vers l'intégrabilité est observée, et quantifiée sur le panneau d), où l'épaisseur est tracée en fonction de  $N$ .



**Fig. 2.** Sections de Poincaré de quelques particules du hamiltonien HMF (1), quand la taille du système est accrue (pour  $M_0 = 0.6$  et  $U = 0.54$ ). Pour des valeurs assez grandes de  $N$ , la magnétisation  $M$  peut être approximativement écrite comme  $M(t) \approx \bar{M} + \delta M(t) \cos \omega t$ , avec  $|\delta M| \ll \bar{M}$  et  $|\partial_t \delta M| \ll \omega |M|$ . En ignorant la dépendance temporelle de  $\delta M$  et en utilisant un modèle réduit de particules-test dans un champ externe périodique  $M(t)$ , on obtient des sections stroboscopiques qui sont qualitativement et quantitativement similaires à celles ci-dessus, avec pour seule différence une épaisseur *nulle* [15]. Puis nous nous concentrons sur des tores d'action  $J \approx 1.9$ , et nous traçons sur le panneau d) sa variance  $\Delta J$ , calculée sur une fenêtre de temps  $\Delta t = 300$ , comme fonction de  $N$ . Une décroissance en  $1/N$  (ligne pointillée) est une bonne approximation sur plusieurs décades de  $N$ .

En conséquence, nous avons montré que le mouvement d'une particule d'un système paradigmatique avec interactions à longue portée devient de plus en plus régulier lorsque le nombre de particules augmente. Ce comportement s'oppose à celui des systèmes à courte portée, et permet une nouvelle interprétation de l'abondance de mouvements réguliers dans les dynamiques à longue portée. De plus, les caractéristiques du mouvement d'une particule dépendent du choix des conditions initiales. Une question se pose alors naturellement : quel est le lien entre les propriétés macroscopiques des différents EQS avec les changements de la dynamique particulaire ?

Pour les systèmes avec interactions à longue portée, la dépendance aux conditions initiales peut se matérialiser sous la forme d'une véritable transition de phases hors-d'équilibre : en jouant sur des paramètres appropriés de l'état initial, on observe une convergence vers des états asymptotiques (dans la limite  $N \rightarrow \infty$ ) aux propriétés macroscopiques différentes (par exemple, distributions particulières homogènes/inhomogènes) [16]. Cette transition de phases a été expliquée grâce à la théorie de la "relaxation" de Lynden-Bell [11]. Une interprétation dynamique microscopique de cette transition a été proposée, en termes de changements violents dans les propriétés des orbites des particules [17].

### 3 Application au Laser à Electrons Libres

Afin d'étayer la généralité des conclusions tirées ci-dessus, le phénomène présenté ici est aussi discuté dans le contexte de modèles hamiltoniens décrivant l'interaction entre un faisceau de particules chargées et un ensemble d'ondes évoluant de manière auto-cohérente [19]. Un grand nombre d'applications impliquant les longues portées sont concernées, telle la physique des plasmas, les tubes à ondes progressives ou encore



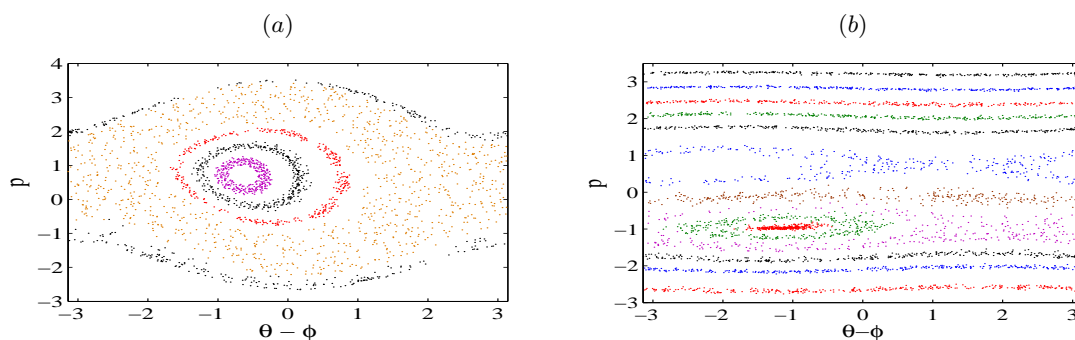
les LELs [20]. Plus spécifiquement, la même tendance à l'intégrabilité est observée dans cette dernière application, un résultat potentiellement riche pour comprendre les régimes saturés de ces lasers.

Un LEL est constitué d'un faisceau d'électrons ultra-relativistes injecté dans un champ magnétique permanent : les particules chargées acquièrent une trajectoire oscillante et émettent un rayonnement synchrotron. Si l'émission est initialement incohérente dans le régime dit de "Self-Amplified Spontaneous Emission" [3], une instabilité va se développer. Une onde de très faible amplitude apparaît, qui piège légèrement les électrons dans ses puits de potentiel : ceux-ci vont alors se mettre à émettre avec une certaine cohérence, permettant par là même une nouvelle amplification de l'onde. Les mécanismes de piégeage et d'émission cohérente s'amplifient alors mutuellement jusqu'à obtention d'une onde laser puissante et fortement cohérente (spectralement et temporellement).

Régi par des interactions à longue portée (à l'instar de l'interaction onde-particules), le régime dit "saturé" du LEL, lorsque l'intensité de l'onde atteint son maximum et se met à osciller, correspond alors à un EQS. Ainsi, de premières études dans ce contexte ont permis, grâce à la physique statistique hors-d'équilibre, de prédire l'intensité de saturation du LEL [22], où encore l'existence d'une transition de phases hors d'équilibre [23]. Nous nous concentrons ici sur la dynamique particulière, et plus particulièrement sur l'existence des tores "épais".

Dans la limite unidimensionnelle et monochromatique, la dynamique d'un laser à électrons libres est décrite par le hamiltonien à longue portée [19]  $H = \sum_j (\frac{p_j^2}{2} + 2\sqrt{\frac{I}{N}} \cos(\theta_j - \phi))$ , où  $I$  et  $\phi$  décrivent respectivement l'intensité et la phase de l'onde émise. En utilisant la technique précédemment décrite de sections de Poincaré, nous explorons l'espace des phases de quelques particules. Une phénoménologie similaire à celle du modèle HMF – présence d'EQS à un ou plusieurs agrégats, caractérisés par des tores "épais" à  $N$  fini – est observée (voir Fig. 3). En particulier, pour un paquet initial d'électrons à faible dispersion d'énergie, l'onde du laser croît fortement et la dynamique des particules s'organise autour d'un large agrégat au mouvement cohérent (voir Fig. 3). A l'opposé, un paquet à forte dispersion en énergie tend à remplir de manière quasi-homogène l'espace des phases, au détriment de l'émission cohérente, et l'onde laser sera alors de très faible amplitude.

De plus, le système possède aussi une tendance à l'intégrabilité lorsque le nombre de particules  $N$  augmente, offrant ainsi un cadre plus large aux résultats obtenus dans le cadre du modèle HMF. Notons enfin que la présence d'une transition de phase dans ce système a aussi été mise en évidence récemment [23] ; la caractérisation des structures de l'espace des phases fera pour sa part l'objet d'une étude prochaine.



**Fig. 3.** Sections de Poincaré du modèle uni-dimensionnel de laser à électrons libres, pour une onde initialement nulle, et un water-bag de particules de magnétisation initiale  $M_0 = 0$  et  $U = 0$  (a) et  $M_0 = 0$  et  $U = 4.5$  (b). Les trajectoires des particules sont enregistrées à chaque occurrence de  $I(t) = \bar{I}$ , où  $\bar{I}$  est l'intensité moyenne de l'EQS. Pour un paquet d'électrons de faible énergie, un agrégat central de particules se développent, au sein du puits de potentiel de l'onde émise. Dans le cas d'un paquet de forte énergie, de plus petites structures symétriques se développent, à l'instar de la phénoménologie du modèle HMF. Remarquons que la magnétisation est aussi appelée "facteur de bunching" dans le cadre du LEL.

## 4 Conclusion

Ainsi, l'exploration de la dynamique des systèmes avec interactions à longue portée nous a permis de parvenir d'aboutir à une conclusion assez générale : une tendance à l'organisation et à l'intégrabilité de la dynamique particulière est observée lorsque la taille du système (c'est-à-dire le nombre de particules) est augmentée. Les structures de l'espace des phases sont identifiées et interprétées comme des tores invariants d'un hamiltonien effectif à un degré et demi de liberté. Sur la base de cette analyse, on peut alors comprendre les transitions de phase hors d'équilibre dans ces systèmes par la dynamique microscopique, comme bifurcation des structures macroscopiques et cohérentes qui la composent. Ces résultats sont obtenus non seulement sur le modèle jouet Hamiltonian Mean-Field, mais aussi dans le cadre du laser à électrons libres. Concluons que ce type de laser représente un des candidats les plus probables pour l'observation expérimentale des effets si spécifiques aux interactions à longue portée (transition de phases hors-d'équilibre, temps de relaxation, etc).

## Remerciements

Les auteurs remercient le programme Galileo "Study and control of models with a large number of interacting particles" de l'université franco-italienne pour son soutien financier.

## Références

1. G. GALLAVOTTI, *Statistical Mechanics : A short treatise*, Springer, Berlin (1999).
2. C. FROESCHLÉ & J.-P. SCHEIDECKER, *Physical Review A*, **12**, 2137 (1975).
3. T. DAUXOIS *et al.* (Eds.), Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions, *Lecture Notes in Physics*, **602**, Springer, Berlin (2002).
4. A. CAMPA *et al.* (Eds.) Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions : Theory and Experiments, *AIP Conference Proceedings*, **970** (2008).
5. V. LATORA, A. RAPISARDA & S. RUFFO, *Physical Review Letters*, **80**, 692 (1998).
6. Y. Y. YAMAGUCHI *et al.*, *Physica A*, **337**, 36 (2004).
7. P.H. CHAVANIS, *Int. J. Mod. Phys.*, **20**, 3113 (2006)
8. Y. ELSKENS & D. F. ESCANDE, *Microscopic Dynamics of Plasmas and Chaos*, IoP Publishing, Bristol (2003).
9. J. BARRÉ *et al.*, *Physical Review E*, **69**, 045501R (2004).
10. A. N. KOLMOGOROV, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **98**, 527 (1954) — V.I. ARNOLD, *Soviet Math. Dokl.*, **2** 501 (1961) — J. MOSER, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen*, **K1**, 1 (1962).
11. D. LYNDEN-BELL, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **136**, 101 (1967).
12. M. ANTONI & S. RUFFO, *Physical Review E*, **52**, 3261 (1995).
13. F. HOHL & M. R. FEIX, *Astrophysical Journal*, **147**, 1164 (1967).
14. J.M. DAWSON, *Physics of Fluids*, **5**, 445 (1962).
15. R. BACHELARD *et al.*, *European Physical Journal D*, **42**, 125 (2007).
16. A. ANTONIAZZI, D. FANELLI, S. RUFFO & Y. YAMAGUCHI, *Physical Review Letters*, **99**, 040601 (2007).
17. R. BACHELARD *et al.*, *Physical Review Letters*, **101**, 260603 (2008).
18. P. H. CHAVANIS, *European Physical Journal B*, **53**, 487 (2006).
19. R. BONIFACIO *et al.*, *Riv. Nuovo Cimento*, **13**, 1 (1990).
20. L.H. YU *et al.*, *Science* **289**, 932 (2000).
21. R. BONIFACIO, C. PELLEGRINI & L. NARDUCCI, *Opt. Commun.*, **50**, 373 (1984).
22. J. BARRÉ *et al.*, *Physical Review E*, **69**, 045501 (2004).
23. P. DE BUYL *et al.*, <http://arxiv.org/abs/0902.0712>.

# Sensibilité d'un front propagatif aux transitions hydrodynamiques

Simona Bodea<sup>1</sup> & Alain Pocheau<sup>1</sup>

IRPHE, Aix-Marseille Université  
49 rue Frédéric Joliot Curie, B.P. 146, 13384 Marseille Cedex 13  
bodea@irphe.univ-mrs.fr

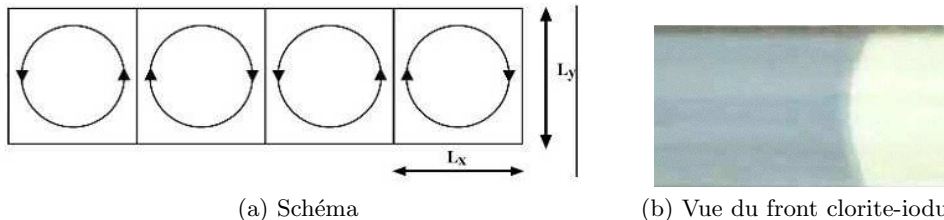
**Résumé.** Cette étude porte sur la propagation d'un front de réaction-diffusion dans un écoulement stationnaire composé d'une rangée de vortex contrarotatifs. Le front est obtenu par réaction auto catalytique en solution aqueuse et l'écoulement est généré par électroconvection dans un canal allongé de faible profondeur. En augmentant l'amplitude des écoulements, on passe d'écoulements cellulaires plans (de type Hele-Shaw) à des écoulements cellulaires tridimensionnel (3D) incluant des écoulements secondaires le long de l'axe des vortex. Lors de cette transition, nous observons une forte augmentation de la vitesse de propagation du front en étroite corrélation avec un changement de structure de la trajectoire du front. Ceci montre une forte sensibilité des fronts de réaction-diffusion à la structure des écoulements dans lesquels ils se propagent, propriété qui pourrait s'avérer intéressante en microfluidique, à titre de diagnostique ou d'utilisation.

**Abstract.** We study the propagation of a reaction-diffusion front in a chain of a steady counter-rotating vortices. The front is obtained by means of an autocatalytic chemical reaction in aqueous solution and the flow is induced by electroconvection in a long channel with a small depth. Increasing the flow amplitude, we go from planar cellular flows (of Hele-Shaw type) to three-dimensional flows involving secondary flows along the vortex axes. During this transition, we observe a large raise of the front propagation velocity, together with a combined change of structure of the front trajectory. Interestingly, this points out a large sensitivity of reaction-diffusion fronts to the structure of the flows in which they propagate. This kind of property could appear potentially useful in microfluidic for diagnoses or applications.

## 1 Introduction

Le phénomène de propagation de fronts de réaction-diffusion se rencontre dans divers systèmes physiques, chimiques ou biologiques où il est la source de nombreuses applications. Citons comme exemples : la progression des régions de corrosion, la propagation des feux de forêt, la prolifération des colonies de bactéries ou encore la propagation des infections [1]. Cependant, dans des nombreux milieux, le front peut également être soumis à un transport advectif, souvent très efficace devant le transport par réaction-diffusion. Son effet net sur la propagation du front s'avère souvent délicat à établir car il dépend notamment de la structure interne de l'écoulement. Jusqu'à présent, des nombreuses études ont concerné la propagation d'un front de réaction-diffusion dans un écoulement laminaire ou turbulent [2]. En revanche, peu d'études ont été dédiées à la propagation d'un front de réaction-diffusion en présence d'écoulements à lignes de courant fermées [3,4,5].

Nous considérons ici la propagation d'un front de réaction-diffusion dans un écoulement cellulaire stationnaire en géométrie confinée. Cet écoulement est composé d'une rangée de vortex contrarotatifs, à l'intérieur desquels les lignes de courant sont fermées (Fig. 1a). L'advection y est donc efficace, mais restreinte à chaque vortex. Entre, i.e. au voisinage des séparatrices de vortex, le front ne bénéficie plus d'apport advectif pour se propager de vortex en vortex dans la rangée. Il en résulte donc une alternance spatiale de zones de forte ou faible advection effective. Des études précédentes ont montré que la vitesse de propagation du front de réaction était néanmoins augmentée sensiblement, de manière non-linéaire, par suite d'une compétition subtile entre les diverses échelles de temps d'advection, de réaction et de diffusion [5]. En particulier, parmi les trajectoires possibles, le front de réaction-diffusion apparaît suivre celle qui optimise son temps de parcours dans l'écoulement imposé, couches limites comprises. La sensibilité du



**Fig. 1.** (a) Schéma de l'écoulement cellulaire.  $L_x = L_y = 10$  mm. En régime de Hele-Shaw, l'écoulement est plan. Au delà, des écoulements secondaires apparaissent dans la direction  $z$  de l'axe des vortex. (b) Vue du dessus du front chlorite-iodure en absence d'écoulements. Le front se propage de droite à gauche, i.e. de la zone claire (réaction effectuée) à la zone bleu-sombre (réaction non-initiée).

temps de propagation à ces dernières témoigne notamment de la sensibilité du front à la structure de cet écoulement.

L'étude présentée ici poursuit l'étude de cette sensibilité en considérant l'effet d'une transition hydrodynamique sur la propagation du front. Celle-ci est induite par augmentation de l'intensité des écoulements. Elle correspond au passage entre un régime d'écoulement cellulaire plan (de type Hele-Shaw) à un régime d'écoulement cellulaire tridimensionnel (3D) présentant des écoulements secondaires le long de l'axe des vortex. Nous observons alors une forte augmentation de la vitesse de propagation du front, en étroite corrélation avec un changement de structure de sa trajectoire dans le milieu. Au-delà de l'augmentation de l'efficacité de transport propagatif, le front de réaction-diffusion se montre ainsi un révélateur sensible des structures fines de l'écoulement. Cette propriété pourrait s'avérer en pratique intéressante, par exemple en microfluidique à des fins de diagnostique ou d'application en milieu réactif.

## 2 Expérience

Nos expériences ont été réalisées dans un canal rectangulaire de dimensions suivantes : longueur 400 mm, largeur 10 mm et épaisseur 4 mm. L'écoulement cellulaire y est obtenu par électroconvection grâce à une rangée d'aimants de dimensions 10mm x 10mm placés sous le canal. Leur champ magnétique est vertical mais de sens opposé d'un aimant à l'autre. Une différence de potentiel appliquée entre les extrémités du canal génère un courant électrique, donc des forces de Laplace. Celles-ci donnent alors naissance à une rangée de vortex contrarotatifs sur toute la longueur du canal (Fig. 1a). Les courants appliqués sont de l'ordre du mA et les vitesses d'écoulement obtenues varient entre 10 et 70 mm/min.

Pour des vitesses d'écoulement modérées, l'écoulement reste plan et les couches limites aux parois horizontales s'étendent à toute l'épaisseur du fluide. On est alors dans le régime de Hele-Shaw pour lequel l'écoulement présente un profil de type Poiseuille, avec une vitesse maximale au milieu du canal. Lorsque les vitesses d'écoulement deviennent suffisamment importantes, les couches limites aux parois horizontales se séparent et des écoulements secondaires dirigés selon l'axe des vortex peuvent apparaître. On sort alors du régime de Hele-Shaw avec des écoulements devenus tridimensionnels. Les expériences effectuées ont eu pour objectif de couvrir les deux régimes afin de caractériser l'influence sur la propagation du front de cette transition hydrodynamique 2D/3D.

Le front de réaction-diffusion est obtenu par réaction auto catalytique chlorite-iodure [6]. La concentration des ions chlorite et iodure est fixée à  $3,75 \cdot 10^{-4}$  et  $3 \cdot 10^{-4}$  mole.l<sup>-1</sup> respectivement et le Ph de la solution est stabilisé à 5 grâce à l'ajout d'une solution tampon. Afin de pouvoir visualiser le front, nous rajoutons également de l'amidon. Celui-ci, en présence des ions  $I_2$  et  $I^-$ , forme un complexe colorant la solution en bleu. Lorsque la réaction a lieu, la concentration en  $I_2$  et  $I^-$  chute brutalement, faisant ainsi disparaître la coloration. Le front de réaction apparaît alors comme la frontière entre une zone sombre (réaction non encore effective) et une zone claire (réaction effectuée) (Fig. 1b).

En absence d'écoulement, le front avance à sa vitesse propre  $V_0$ . Celle-ci dépend a priori de la température qui sera maintenue ici à  $T = 20^\circ\text{C}$ . La vitesse  $V_0$  est alors de l'ordre de 1mm/min. Elle

est cependant modifiée par application d'un courant électrique puisque celui-ci modifie le transport des ions impliqués dans la réaction. Afin de prendre en compte cet effet, nous avons effectué un étalonnage de la vitesse  $V_0$  en fonction de l'intensité du courant  $I$ . Cette variation a été prise en compte de manière systématique lors des analyses quantitatives.

La vitesse caractéristique  $U$  de l'écoulement est mesurée en utilisant le front comme traceur. A l'intérieur d'une cellule, il se propage le long d'une ligne de courant qui, entre les séparatrices de chaque vortex, présente une partie quasi-droite. En mesurant la vitesse de propagation du front à cet endroit, on peut alors remonter à la vitesse de l'écoulement (de fait, celle de la ligne de courant la plus rapide). Par ailleurs, tant que les vitesses d'écoulement restent suffisamment modérées pour que le régime Hele-Shaw soit valide, le terme non-linéaire d'advection reste négligeable devant le terme de diffusion visqueuse. Le champ de vitesse évolue alors linéairement avec les forces de Laplace, donc avec le courant  $I$ . En particulier, ses lignes de courant restent inchangées et sa vitesse caractéristique  $U$  doit suivre  $I$  linéairement [5]. Cette dépendance linéaire est bien vérifiée en figure 3a pour des valeurs modérées de  $I$ . Pour des valeurs plus élevées de  $I$ , on atteint la transition entre écoulement 2D et 3D. Le front modifie alors ses trajectoires de sorte que la vitesse de l'écoulement ne peut plus être mesurée de la même façon. La composante 3D de l'écoulement étant cependant faible, une extrapolation de la tendance linéaire du régime 2D reste valide.

La vitesse effective du front de réaction,  $V_f$ , correspond à sa vitesse moyenne d'avancement dans le canal. La propagation étant périodique dans cette chaîne de vortex, elle correspond également à sa vitesse moyenne d'avancement sur une période, i.e. sur deux vortex. Pour augmenter la précision, elle a cependant été mesurée sur plusieurs périodes à partir des enregistrements vidéo de la progression du front. La résolution des images est de 1024x768 pixels et la période d'acquisition est une ou plusieurs secondes suivant la vitesse effective du front. En pratique, la résolution spatiale est de l'ordre 0.1mm et la précision en vitesse de 0.1mm.mn<sup>-1</sup>.

A chaque vitesse d'écoulement  $U$ , nous avons ainsi déterminé la vitesse effective du front  $V_f$ , sa vitesse propre  $V_0$  et son type de trajectoire. Cela nous a conduit à considérer l'évolution relative de vitesse du front  $V_f/V_0$  en fonction de la vitesse relative d'écoulement  $U/V_0$ , et en rapport avec les modifications de trajectoire.

### 3 Résultats et Discussions

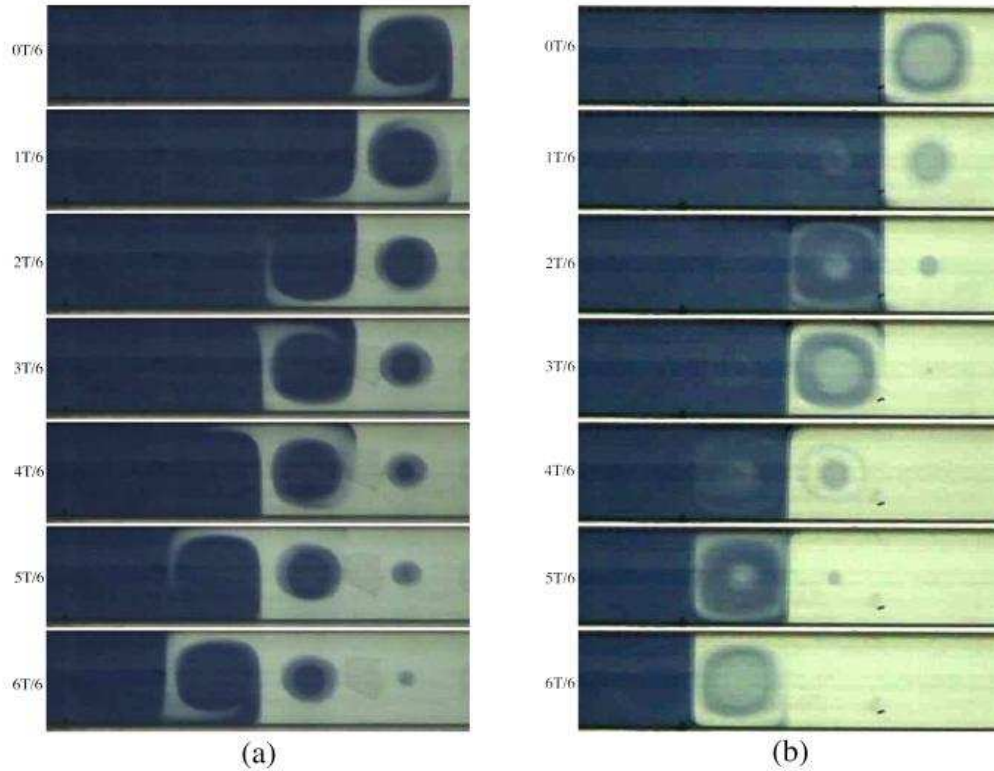
La figure 2 présente deux séquences typiques de propagation du front, l'une à amplitude d'écoulement modérée, l'autre à amplitude élevée.

Dans la première (Fig. 2a), l'écoulement est plan, en régime de Hele-Shaw. Le front est alors advecté rapidement le long d'une ligne de courant à l'intérieur des cellules mais avance seulement à sa vitesse propre  $V_0$  pour passer d'une ligne de courant à l'autre ou d'une cellule à l'autre [5]. Sa vitesse effective  $V_f$  dans la chaîne de vortex résulte ainsi de la compétition entre une phase d'advection rapide sur une ligne de courant et une phase de propagation lente au travers de la séparatrice des vortex. En particulier, le poids relatif de chacune dépend sensiblement de la trajectoire, i.e. de la ligne de courant suivie lors de l'advection. A l'arrière du point le plus avancé du front, on note des vortex contaminés qui finissent de réagir par avancée radiale à vitesse  $V_0$  d'une ligne de front circulaire. En particulier, sur l'ensemble de la chaîne de vortex, le front reste connexe, comme attendu dans le cas d'un écoulement plan.

En revanche, dans la seconde séquence (Fig. 2b), le front réagit d'abord dans le centre d'un vortex avant de le contaminer aussi par la périphérie. Il apparaît donc non connexe sur ces vues de dessus. Ce type de propagation va de pair avec un écoulement devenu 3D suite à la présence d'écoulements secondaires dirigés selon l'axe des vortex (i.e. normaux au plan des images). Ceux-ci conduisent à un écoulement global en spirales, responsable de la contamination du centre avant la périphérie. Pour autant, leur amplitude dans le voisinage de la transition hydrodynamique est faible. Ceci illustre la grande sensibilité du front aux écoulements et à leurs transitions.

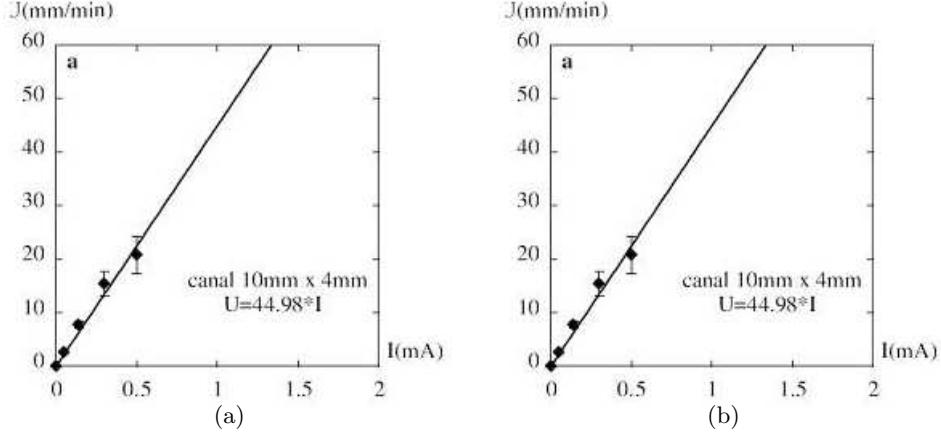
Les différences de type de trajectoires et de mode de contamination se retrouvent dans l'évolution de la vitesse effective  $V_f$  du front avec l'amplitude  $U$  de l'écoulement. On note ainsi, en figure 3b une augmentation régulière de  $V_f/V_0$  avec  $U/V_0$  jusqu'à  $U/V_0 \approx 40$ . L'écoulement accroît ainsi fortement la vitesse de

propagation du front jusqu'à un facteur 8, mais l'efficacité de ce processus diminue régulièrement comme le montre la concavité de la courbe. Ceci correspond au régime de Hele-Shaw étudié précédemment [5]. En revanche, pour des vitesses d'écoulement plus importantes, i.e.  $U/V_0 > 40$ , une forte et soudaine augmentation de la vitesse effective du front survient. Elle coïncide avec un changement de régime hydrodynamique corrélé à un changement de type de propagation (Fig. 2). L'écoulement a alors perdu son caractère plan suite à l'apparition d'écoulements secondaires dans la direction de l'axe des vortex. La transition 2D/3D de l'écoulement s'est ainsi accompagnée d'un effet très favorable à la propagation effective du front.



**Fig. 2.** Séquences typiques de propagation du front en présence d'écoulements à vitesse modérée (a) ou élevée (b). Le front se propage de droite à gauche dans le canal de dimensions 10mm x 4mm. Il apparaît connexe en (a) et non connexe en (b) suite à la transition entre écoulements 2D (a) et 3D (b).

Au sortir du régime de Hele-Shaw, les couches limites aux parois horizontales du canal se séparent et une couche non-visqueuse apparaît entre les deux. Dans cette dernière, le terme d'advection donne naissance à une force centrifuge radiale qui se trouve compensée par le gradient de pression :  $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} \sim \frac{1}{\rho} \nabla P$ . Cette force cesse cependant d'exister dans la couche limite car l'écoulement tombe à zéro pour respecter la condition de non glissement à la paroi. En revanche, le gradient de pression garde sa valeur induisant ainsi des écoulements centripètes. Par conservation de la masse, ces écoulements remontent ensuite le long de l'axe du vortex dans la zone non-visqueuse. Superposés à l'écoulement primaire, ils donnent naissance à un mouvement global en spirales le long de l'axe du vortex. Ce mécanisme, analogue au pompage d'Eckman pour les écoulements géophysiques, est générique à de nombreuses situations de vortex confinés [7]. Au quotidien, il est notamment responsable de l'advection de particules (e.g. de thé) au centre d'une tasse que l'on vient de remuer. Cependant, en cas de confinement trop important, la



**Fig. 3.** (a) Variation linéaire de la vitesse d'écoulement  $U$  avec l'intensité  $I$  du courant, pour des vitesses  $U$  modérées. (b) Variation de la vitesse réduite de propagation,  $V_f/V_0$ , avec la vitesse réduite de l'écoulement,  $U/V_0$ . L'augmentation est régulière mais concave jusqu'à  $U/V_0 \approx 40$ . Au delà, une forte augmentation de vitesse effective est notable, en conjonction avec un changement de régime hydrodynamique (Fig. 2b).

zone non-visqueuse disparaît et les écoulements secondaires avec elles. On retrouve alors le régime de Hele-Shaw.

On s'aperçoit ainsi que le degré de confinement et la nature du régime hydrodynamique mêle la géométrie du vortex et l'amplitude de son écoulement. Une analyse qualitative simple permet de déterminer leur lien et de situer la transition entre régimes. D'après la description précédente, la transition a lieu pour  $\delta \sim d/2$  où  $\delta$  représente l'épaisseur de la couche limite et  $d$  l'épaisseur du canal. Elle se caractérise alors par l'équilibre entre inertie, forces visqueuses et gradient de pression. En notant  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide, ceci conduit en particulier, pour la vorticité, à :

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} \sim (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} \quad (1)$$

soit, en projection sur l'axe  $z$  des vortex :

$$(\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h) \Omega_z + U_z \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \sim \Omega_z \frac{U_z}{\partial z} + \nu \Delta \Omega_z \quad (2)$$

où les composantes horizontales sont exprimées par l'indice  $h$  et les composantes verticales par l'indice  $z$ .

Le scaling des dérivées est donné par la géométrie. Ainsi,  $\partial/\partial z \sim 1/\delta$ ,  $\partial/\partial x \sim 1/(L_x/2)$  et  $\partial/\partial y \sim 1/(L_y/2)$ . Ceci conduit, avec  $U_h \equiv U$  et  $L_x = L_y$ ,   :

$$\frac{U}{L_y} \Omega_z + U_z \frac{\Omega_z}{\delta} \sim \Omega_z \frac{U_z}{\delta} + \nu \frac{\Omega_z}{\delta^2} \quad (3)$$

Par ailleurs, la relation d'incompressibilité du fluide implique  $U/L_y \sim U_z/\delta$ , aboutissant ainsi, avec la relation (3), au scaling :  $U/L_y \sim \nu/\delta^2$ .

Le critère de transition hydrodynamique,  $\delta \sim d/2$ , conduit ainsi à un changement de régime pour une amplitude d'écoulement  $U_{HS}$  vérifiant le scaling :

$$U_{HS} \sim \frac{L_y \nu}{d^2} \quad (4)$$

Une analyse plus détaillée serait nécessaire pour déterminer le préfacteur. Indépendamment de celui-ci, cette relation décrit cependant la relation entre la géométrie du canal et la vitesse de l'écoulement  $U_{HS}$  à la transition entre régimes. Cette dernière devrait ainsi évoluer proportionnellement à la largeur du canal et à l'inverse du carré de son épaisseur. Des expériences sont en cours sur des canaux de diverses profondeurs afin de tester cette relation.

## 4 Conclusion

La propagation d'un front de réaction-diffusion en présence d'un écoulement contrôlé a été étudiée expérimentalement en géométrie confinée. L'écoulement consiste en une rangée de vortex contrarotatifs induits par électroconvection. Pour des vitesses d'écoulement modérées, le régime hydrodynamique est celui de Hele-Shaw constitué d'un écoulement plan. La vitesse moyenne d'avancement du front, résultat de la compétition entre les échelles de temps d'advection, de réaction, de diffusion, présente alors une évolution concave avec l'intensité des vortex. Une précédente étude a montré qu'elle résultait d'une propagation du front le long de la trajectoire minimisant le temps de parcours dans la structure d'écoulement imposée [5]. Pour des vitesses d'écoulement plus élevées, nous avons constaté ici une brusque augmentation de vitesse moyenne du front corrélée à un changement fondamental de son type de trajectoire. Ceci s'explique par la transition d'un écoulement plan de Hele-Shaw à un écoulement tri-dimensionnel, suite à l'apparition d'écoulements secondaires le long de l'axe des vortex. Le seuil d'apparition de ces écoulements peut être déterminé en considérant la séparation des couches limites en épaisseur, signe de la fin du régime de Hele-Shaw. Ceci conduit à une loi d'échelle reliant l'intensité critique des vortex aux facteurs géométriques tels la largeur et l'épaisseur du canal considéré. Des expériences supplémentaires dans des canaux de dimensions variables sont nécessaires afin de la vérifier.

Cette étude révèle la sensibilité des fronts de réaction-diffusion à la structure des écoulements dans lesquels ils se propagent. En particulier, ces fronts sont apparus ici comme des révélateurs très fins de transition hydrodynamique, par la trajectoire prise et par la vitesse effective qui en a résulté. D'un côté, ceci souligne toute l'importance de la géométrie des écoulements envers l'efficacité du transport propagatif. D'un autre côté, cela suggère qu'un front de réaction-diffusion pourrait être utilisé pour dévoiler les structures fines d'un écoulement complexe, propriété potentiellement intéressante par exemple en microfluidique.

## Références

1. F. SAGUES & I.R. EPSTEIN, Nonlinear Chemical dynamics, *Dalton Transactions*, 1201-1217 (2003).
2. M. ABEL, A. CELANI, D. VERGNI & A. VULPIANI, Front propagation in laminar flows, *Physical Review E*, **64**, 6307 (2001) — M. LECONTE, J. MARTIN, N. RAKOTOMALALA & D. SALIN, Pattern of reaction diffusion fronts in laminar flows, *Physical Review Letters*, **90**, 128302 (2003) — P. D. ROONEY, B. D. HASLAM & N. O. RHYS, Front propagation rates in randomly stirred media, *Physical Review Letters*, **74**, 3804 (1995).
3. M. ABEL, M. CENCINI, D. VERGNI & A. VULPIANI, Front speed enhancement in cellular flows, *Chaos*, **12**, 481-488 (2002) — M. CENCINI, A. TORCINI, D. VERGNI & A. VULPIANI, Thin front propagation in steady and unsteady cellular flows, *Physics of Fluids*, **15**, 679-688 (2003) — N. VLADIMIROVA, A. KISELEV, P. CONSTANTIN, O. RUCHAYSKIY & L. RYZHIK, Flame enhancement and quenching in fluid flows, *Combustion Theory Modelling*, **7**, 2003, 485-508 (2003).
4. M.S. PAOLETTI & T.H. SOLOMON, Experimental studies of front propagation and mode-locking in an advection-reaction-diffusion system, *Europhysics Letters*, **69**, 819-825 (2005) — M.S. PAOLETTI & T.H. SOLOMON, Front propagation and mode-locking in an advection-reaction-diffusion system, *Physical Review E*, **72**, 046204 (2005).
5. A. POCHÉAU & F. HARAMBAT, Effective front propagation in steady cellular flows : A least time criterion, *Physical Review E*, **73**, 065304 (2006) — A. POCHÉAU & F. HARAMBAT, Front propagation in a laminar cellular flow : Shapes, velocities, and least time criterion, *Physical Review E*, **77**, 036304 (2008).
6. D.M. WEITZ & I.R. EPSTEIN, Spatial waves in the reaction of chlorite with iodide, *Journal of Physical Chemistry*, **88**, 5300-5304 (1984).
7. T. H. SOLOMON & I. MEZIC, Uniform resonant chaotic mixing in fluid flows, *Nature*, **425**, 376-380 (2003).



# Oscillation globale de canaux ioniques

G. Boedec<sup>1</sup>, M. Jaeger<sup>1</sup>, F. Homble<sup>2</sup> & M. Leonetti<sup>3</sup>

<sup>1</sup> MMPP, Aix-Marseille Université, UMR CNRS 6181

Technopôle de Château-Gombert, 13451 Marseille Cedex 20 France

<sup>2</sup> SFMB, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine, B-1050 Bruxelles Belgique

<sup>3</sup> IRPHE, Aix-Marseille Université, UMR CNRS 6594

Technopôle de Château-Gombert, 13384 Marseille Cedex 20, France

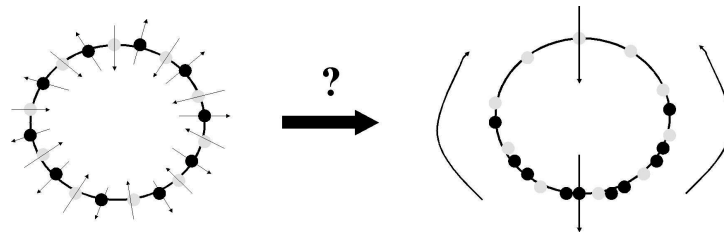
gwenn.boedec@l3m.univ-mrs.fr

**Résumé.** Les membranes biologiques sont le siège de divers phénomènes spatiotemporels d'origine bioélectrique, de la propagation des arythmies cardiaques à l'apparition de structures stationnaires de courants transcellulaires plus ou moins stables. L'étude porte sur un modèle d'instabilité initialement proposé par le biologiste L. Jaffe et plus précisément sur la stabilité de la structure primaire. Notamment, un cycle hétérocline "tête de chat" est mis en évidence avec une pseudo-période qui croît avec le temps.

**Abstract.** At the cell or larger scale, numerous spatiotemporal phenomena on several time scale result from cellular electric activity due to the ionic transfer through membrane proteins and electrodiffusion in the bulk. We study the stability of primary structures induced by the instability of self-aggregation of channels proposed by L.F. Jaffe. The existence of modulated traveling waves (MTW) and heteroclinic cycle is established. Notably, the pseudo-period of AGH heteroclinic cycle increases with time as expected due to the time elapsed close to the fixed points.

## 1 Introduction et Modèle

De nombreuses cellules sont traversées par des courants transcellulaires quasistationnaires comparés aux échelles de temps impliquées dans le cadre des cellules excitables. Ce point s'explique très bien par les phénomènes mis en jeu, l'électrodiffusion dans les premiers et la propagation capacitive dans les seconds. Bien que très lentes, les structures primaires engendrées ne sont pas toujours stables : oscillation, labilité de l'axe... Ainsi, il est intéressant d'étudier toute la potentialité en termes de dynamique spatiotemporelle des modèles proposés dans la littérature. Ici, nous étudions la stabilité des structures primaires (agrégats de protéines) du modèle de L.F. Jaffe [1,2,3,4].



**Fig. 1.** Problématique du modèle de Jaffe. Le système considéré est une cellule circulaire de rayon  $R$  limitée par une membrane contenant deux types de protéines (ronds noir et gris clair) qui transfèrent des ions en sens contraire. Au repos, les courants produits se compensent localement, la distribution de protéines étant homogène. Si les protéines sont chargées, le couplage entre le champ électrique produit par ces protéines mobiles et leur mouvement électrophorétique peut induire sous certaines conditions leur auto-agrégation. La structure étudiée est donc une modulation de la densité de protéines membranaires accompagnée d'un champ électrique interne et externe.

L'une des grandeurs physiques essentielle est la différence de potentiels électriques à la membrane appelée aussi potentiel électrique membranaire  $V$  :

$$V = (\phi_i - \phi_e)_{memb} \quad (1)$$

où  $\phi$  est le potentiel électrostatique (origine à l'infini).  $i, e$  désignent les compartiments intracellulaire et extracellulaire et  $memb$  que la valeur est prise sur la membrane.  $V$  contrôle en partie le courant qui traverse la membrane. Le potentiel électrostatique satisfait alors l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi_{i,e} = 0 \quad (2)$$

Les conditions limites associées se déduisent de la condition de continuité du courant électrique et de la condition de champ nul à l'infini :

$$\phi_{e,r \rightarrow \infty} \Rightarrow \mathbf{0} \quad (3)$$

$$I_m = \pm\sigma(\mathbf{n} \cdot \nabla\phi_{i,e})_{memb} + C_m \frac{\partial V}{\partial t}_{memb} \quad (4)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface membranaire tourné vers l'extérieur.  $\sigma$  désigne la conductivité du milieu.  $+$  ( $-$ ) pour la condition intérieure (extérieure). Rappelons que le cas d'ions diffusant de manière différente est beaucoup plus complexe et nécessite un modèle plus approprié.

$$I_m = I_p + GV + \Lambda n(V - E) \quad (5)$$

où  $I_p$  est le courant de pompe et  $G$  la conductance de l'ensemble des protéines immobiles (elle prend aussi en compte les fuites).  $\Lambda$  est la conductance d'un canal mobile tandis que  $E$  est la force électromotrice caractérisant l'ion transféré par ce type de canaux (ici, le calcium). Dans le cadre de ce modèle qui correspond à celui de Fromherz-Zimmerman hormis la géométrie, les canaux sont mobiles sous l'action d'un champ électrique :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_p \nabla_s^2 n + \frac{eD_p}{k_B T} \nabla_s \cdot [n(z_{pi} \nabla_s \phi_i + z_{pe} \nabla_s \phi_e)] - \frac{n - \bar{n}}{\tau} \quad (6)$$

où  $D_p$  est le coefficient de diffusion latérale de la protéine membranaire considérée,  $z_{pi,pe}$  ses valences interne et externe et  $\nabla_s$  l'opérateur gradient surfacique.  $\tau$  caractérise la cinétique de réaction du canal avec son environnement (cytosquelette par exemple) autour de sa densité moyenne  $\bar{n}$ . Dans tout le papier et les simulations numériques effectuées,  $z_i - z_e = 3$ .

Finalement, si  $V_0$  est le potentiel au repos, les grandeurs adimensionnées sont  $\tilde{n} = (n - \bar{n})/\bar{n}$ ,  $\tilde{\phi}_i = (\phi_i - V_0)/(k_B T/e)$ ,  $\tilde{\phi}_e = \phi_e/(k_B T/e)$ ,  $r \rightarrow Rr$  et  $t \rightarrow tR^2/D_p$ . L'équation de continuité du courant et celle sur la densité de protéines se simplifient :

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = \partial_{\theta\theta} \tilde{n} + \partial_{\theta} [\tilde{n}(z_{pi} \partial_{\theta} \tilde{\phi}_i + z_{pe} \partial_{\theta} \tilde{\phi}_e)] - \beta \tilde{n} \quad (7)$$

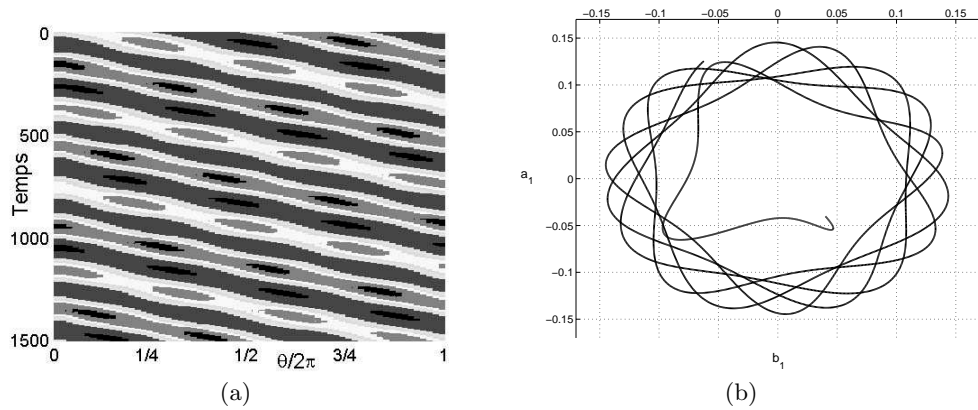
$$-\partial_{r=1} \tilde{\phi}_{i,e} = A\tilde{V} + B\tilde{n} + C\tilde{V}\tilde{n} \quad (8)$$

où  $A = (R/\sigma)(G + \Lambda\bar{n})$ ,  $B = -(R/\sigma)G(eV_0/k_B T)$ ,  $C = (R/\sigma)\Lambda\bar{n}$  et  $\beta = R^2/(\tau D_p)$ .

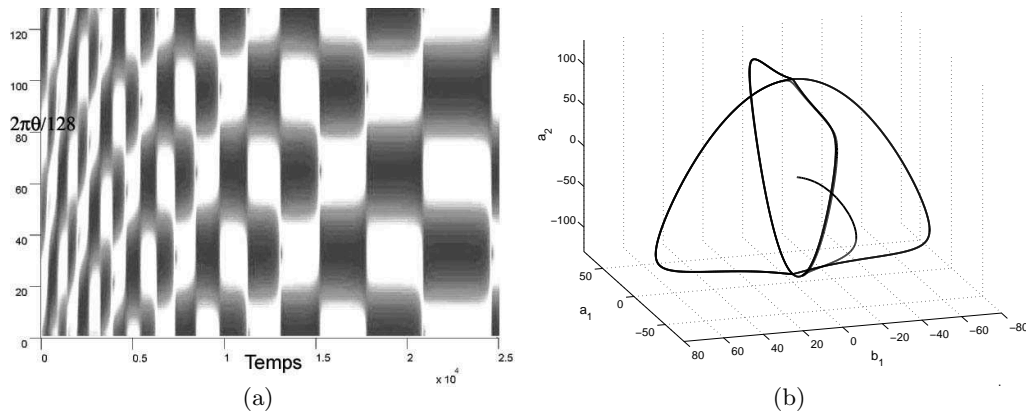
## 2 MTW et Cycle hétérocline

### 2.1 Résolution numérique

L'équation de Laplace pour les potentiels électriques interne et externe se décompose en série de Fourier. La condition de continuité du courant à la membrane permet de calculer les potentiels électriques en fonction de la densité de protéines. En introduisant cette relation dans l'équation d'électrodifusion, on obtient donc une équation non-linéaire pour l'évolution de la densité. Cette équation est résolue

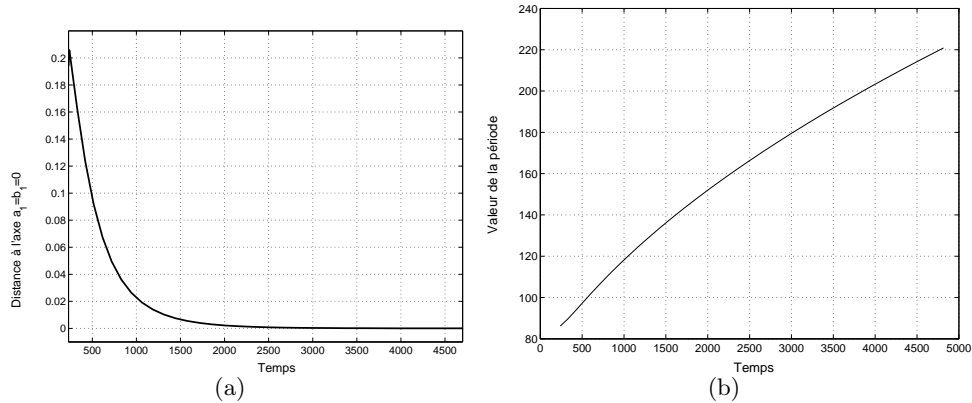


**Fig. 2.** Modulation de l'instabilité de brisure de parité ou MTW pour Modulated Traveling Wave. Le diagramme spatiotemporel (a) montre l'amplitude de la densité de protéines (intensité de gris) à la membrane (position définie par l'angle polaire  $\theta$ ). Sur la figure (b), est tracé le portrait de phase.  $a_1$  et  $b_1$  sont les coefficients de Fourier réels du mode 1 de la densité de protéines membranaires. En absence de modulation, la trajectoire serait un cercle. Les valeurs des paramètres adimensionnés sont :  $A = 0,2$ ,  $B = 1,048$ ,  $C = 0,1$  et  $\beta = 1,241$ .



**Fig. 3.** AGH Oscillation ou boucle hétérocline de la densité de protéines membranaires. Figure 1 – a : les valeurs non usuelles des paramètres –  $A = 2$ ,  $B = 2,15$ ,  $C = 1$  et  $\beta = 0,25$  – sont ici choisies afin de mettre en exergue plusieurs phénomènes sur le même diagramme spatiotemporel : l'émergence d'une MTW, la transition vers un cycle hétérocline de type AGH (Armbruster, Guckenheimer et Holmes) en "tête de chat" et enfin, l'augmentation de la pseudo-période avec le temps. Figure 1 – b : portrait de phase en "tête de chat". Les deux points fixes instables sur l'axe  $a_1 = b_1 = 0$  sont les deux modes purs  $m = 2$ , l'un étant obtenu par la rotation de l'autre de  $\pi/2$ . Voir le texte pour plus de détails.

numériquement par une méthode spectrale (Fourier-Galerkin). Le schéma temporel utilisé est un schéma de Runge-Kutta-Crank-Nicholson d'ordre 2, qui permet un traitement implicite des termes linéaires et un traitement explicite des termes non-linéaires. Un pas de temps adaptatif est utilisé avec ce schéma, ce qui permet un contrôle de la convergence des solutions à chaque itération temporelle. Pour une zone à proximité du point de codimension 2, l'utilisation de 128 modes est suffisante pour représenter correctement les solutions. Certaines zones du diagramme de phase correspondent à des cas où les protéines s'agrègent sur une longueur caractéristique petite devant le rayon de la cellule. La méthode de résolution utilisée ici n'est plus la mieux adaptée, car elle nécessite alors l'utilisation de nombreux modes ( $> 2048$ ).



**Fig. 4.** Pseudo-période du cycle hétérocline AGH. Comme représenté sur le diagramme spatiotemporel précédent, l'oscillation se compose de longues phases pendant lesquelles un mode 2 persiste (deux pics de densité de protéines membranaires). Puis, les deux pics fusionnent rapidement pour former un quasi mode mixte MM qui se restabilise rapidement en mode 2. Figure 1 – a : En absence de bruit, la trajectoire se rapproche de plus en plus de l'axe  $a_1 = b_1 = 0$ . Comme mesuré dans le  $b_1 = a_1$ , la distance à l'axe diminue avec le temps. Figure 1 – b : le système est donc de plus en plus ralenti au voisinage des points fixes. L'évolution n'est donc pas à strictement parler périodique. Toutefois, il est aisé de définir une pseudo-période par la suite des événements : fusion de deux pics, court mode quasi- $(m = 1)$ , phase longue de persistance du mode 2 et ainsi de suite. En absence de bruit, le pic qui résulte de la fusion de deux pics (quasi- $(m = 1)$ ) tourne dans un sens bien défini. Voir sur la figure précédente l'évolution de ce pic.

## 2.2 Résultats

Afin de montrer les résultats de manière synthétique, nous ne présentons pas ici la brisure de parité exposée par ailleurs [8] et les ondes stationnaires (respiration) observées. Deux phénomènes sont succinctement présentés sur les figures avec des légendes assez longues. Une zone de l'espace des phases est constituée par l'existence d'une instabilité (MTW) de modulation de l'instabilité de brisure de parité. Plus intéressant, est l'apparition d'une oscillation globale qui résulte de l'existence d'un cycle hétérocline en forme de "double tête de chat" qui a de fortes similitudes avec le cycle hétérocline décrit par Armbruster, Guckenheimer et Holmes [5,6,7]. Nous avons mis en évidence les deux caractéristiques de ce cycle : passage au plus près des points fixes instables (mode pur  $m=2$ ) et accroissement de la pseudo-période d'oscillation.

## Références

1. K.R. ROBINSON *et al.*, Symmetry breaking in the zygotes of the fucoid algae : controverses and recent progress, *Curr. Top. Dev. Biol.*, **44**, 101-125 (1999).
2. L. F. JAFFE, Electrophoresis along cell membranes, *Nature*, 600-602 (1977).
3. R. LARTER AND P. ORTOLEVA, A study of instability to electrical symmetry breaking in unicellular systems, *Journal of Theoretical Biology*, **96**, 175-200 (1982).
4. M. LEONETTI AND E. DUBOIS-VIOLETTE, *Physical Review E*, **56**, 4521 (1987).
5. D. ARMBRUSTER, J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, Heteroclinic cycles and modulated traveling waves in systems with  $O(2)$ -symmetry, *Physica D*, **29**, 257-282 (1988).
6. J. PORTER, E. KNOBLOCH, New type of complex dynamics in the 1 :2 spatial resonance, *Physica D*, **29**, 257-282 (1988).
7. T.R. SMITH, J. MOEHLIS AND P. HOLMES, Heteroclinic cycles and periodic orbits for the  $O(2)$ -equivariant 0 :1 :2 mode interaction, *Physica D*, **211**, 347-376 (2005).
8. M. LEONETTI, J. NUEBLER AND F. HOMBLE, Parity-breaking bifurcation and global oscillation in patterns of ion channels, *Physical Review Letters*, **96**, 218101 (2006).

# Turbulence d'ondes à la surface d'un ferrofluide

François Boyer<sup>1</sup> & Eric Falcon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels (IUSTI), Université de Provence, CNRS (UMR 6595), 5 rue Enrico Fermi 13453 Marseille cedex 13, France, UE

<sup>2</sup> Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), Université Paris-Diderot, CNRS (UMR7057), 10 rue A. Domon et L. Duquet 75013 Paris, France, UE

francois.boyer@polytech.univ-mrs.fr

**Résumé.** Nous présentons la première observation de la turbulence d'ondes à la surface d'un ferrofluide forcé mécaniquement et soumis à un champ magnétique normal [1]. Nous montrons que des ondes de surface magnétiques apparaissent au-dessus d'un champ critique et que leurs interactions non-linéaires donnent lieu à un régime de turbulence d'ondes caractérisé par un spectre fréquentiel en loi de puissance. Nous montrons expérimentalement que ce régime de turbulence d'ondes magnétiques fait intervenir un processus d'interaction à 4 ondes. Les domaines d'existence des régimes de turbulence d'ondes de gravité, capillaires et magnétiques sont représentés dans l'espace des phases des paramètres, ainsi qu'un point triple de coexistence des ces trois régimes. La plupart de ces résultats sont interprétés à l'aide d'arguments d'analyse dimensionnelle ou de la relation de dispersion des ondes de surface ferrohydrodynamiques.

**Abstract.** We report the first observation of wave turbulence on the surface of a ferrofluid mechanically forced and submitted to a static normal magnetic field [1]. We show that magnetic surface waves arise only above a critical field. The power spectrum of their amplitudes displays a frequency-power law leading to the observation of a magnetic wave turbulence regime which is experimentally shown to involve a 4-wave interaction process. The existence of the regimes of gravity, magnetic and capillary wave turbulence is reported in the phase space parameters as well as a triple point of coexistence of these three regimes. Most of these features are understood using dimensional analysis or the dispersion relation of the ferrohydrodynamic surface waves.

## 1 Introduction

La turbulence d'ondes est un état hors d'équilibre résultant des interactions non-linéaires entre ondes. Si les ondes à la surface d'un océan en sont un exemple fréquemment cité et étudié, elle intervient également dans une grande variété de systèmes, à des échelles très différentes : ondes capillaires [2,3], ondes d'Alfvén dans les plasmas astrophysiques, ondes atmosphériques, ondes élastiques, ondes optiques, ou encore ondes de spin dans les solides [4]. La théorie de turbulence d'ondes, dite turbulence faible, permet dans un cadre faiblement non-linéaire, le calcul exact de solutions stationnaires et donne la répartition spectrale de l'énergie des ondes comme une loi de puissance décroissante du nombre d'onde ou de la fréquence (spectres dits de Kolmogorov-Zakharov) [4]. Alors que ces résultats théoriques ont été obtenus à la fin des années 60, les expériences de laboratoire en turbulence d'ondes sont rares et récentes. Ces dernières ont confirmé certains résultats théoriques et ont mis en évidence de nouveaux phénomènes : intermittence [5], fluctuations du flux d'énergie [6], effet de taille finie du système [3,7]. Certains de ces phénomènes sont maintenant considérés théoriquement [8]. Cependant certaines questions théoriques restent encore ouvertes, notamment sur le domaine de validité des solutions faiblement non-linéaires [9] ou encore l'existence probable de la turbulence d'ondes dans les systèmes non-dispersifs [10]. Dans ce contexte, la réalisation d'un système expérimental où la relation de dispersion peut être contrôlée par l'expérimentateur est d'un intérêt certain afin d'explorer de nouveaux régimes de turbulence d'ondes et d'en tester la théorie et ses limites.

Un ferrofluide est une suspension stable de particules magnétiques nanométriques dispersées dans un liquide porteur. La conjonction inhabituelle du caractère fluide et d'une grande sensibilité magnétique donne lieu à des phénomènes caractéristiques [11] : instabilités de Rosensweig [12] ou « en labyrinthe »,

l'évitation magnétique. Contrairement aux liquides usuels, la relation de dispersion des ondes à la surface d'un ferrofluide fait apparaître un terme non-dispersif dont l'amplitude dépend de celle du champ magnétique appliqué [13,14]. Ainsi, on peut facilement modifier la forme de la relation de dispersion et l'ampleur du caractère non-dispersif du système grâce à un unique paramètre de contrôle, le champ magnétique extérieur. A notre connaissance, aucune étude expérimentale de turbulence d'ondes à la surface d'un fluide magnétique n'a été réalisée à ce jour. Nous avons étudié la turbulence d'ondes à la surface d'un ferrofluide soumis à un champ magnétique normal et observé pour la première fois un régime de turbulence d'ondes magnétiques, que nous avons caractérisé par la mesure du spectre de puissance et la distribution de l'amplitude de ces ondes.

## 2 Dispositif expérimental et relation de dispersion

Le montage expérimental, représenté sur la Fig. 1, consiste en une cuve cylindrique en PTFE, de diamètre intérieur 12 cm et de profondeur 4 cm, remplie de ferrofluide jusqu'à une hauteur  $h = 2$  cm. Le ferrofluide utilisé est une suspension aqueuse ionique de particules de maghémite [15] ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ; diamètre :  $7,6 \pm 0,36$  nm; concentration volumique : 8,5 %). Les propriétés de ce liquide magnétique sont : masse volumique  $\rho = 1324$  kg/m<sup>3</sup>, tension de surface  $\gamma = 59 \times 10^{-3}$  N/m, susceptibilité magnétique à champ nul  $\chi_i = 0,69$ , aimantation à saturation  $M_{sat} = 16,9$  kA/m, et une viscosité dynamique estimée de  $\mu = 1,2 \times 10^{-3}$  Pa.s. La cuve est placée entre deux bobines horizontales coaxiales, de diamètre intérieur 25 cm et extérieur de 50 cm, distantes de 7 cm. Les deux bobines sont reliées en série, alimentées en courant continu par une alimentation de puissance (50 V / 35 A) et refroidies par une circulation d'eau froide.

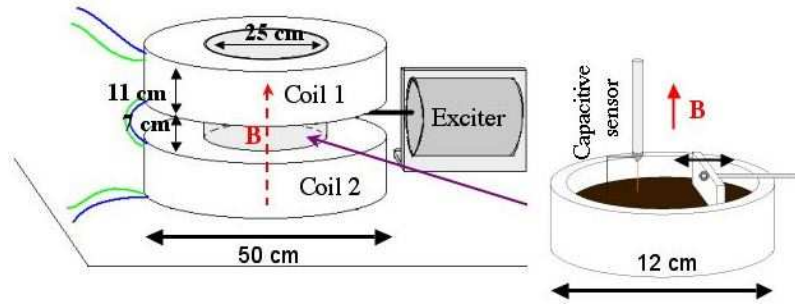


Fig. 1. Dispositif expérimental

Ce dispositif engendre une induction magnétique verticale (homogène à 99 % horizontalement [13]) atteignant au maximum 780G. La mesure de l'induction magnétique est réalisée à l'aide d'une sonde à effet Hall, reliée à un gaussmètre. Les ondes à la surface du ferrofluide sont engendrées par un piston rectangulaire (9 cm  $\times$  4 cm) en PTFE plongeant perpendiculairement dans le ferrofluide et actionné parallèlement à la surface libre par un vibreur électromagnétique. Le déplacement du piston est alors piloté par un signal aléatoire basse fréquence (typiquement 1 – 5 Hz). L'amplitude des ondes  $\eta(t)$  en un point de la surface est mesurée par une sonde capacitive (plongeant perpendiculairement à la surface du fluide au repos) dont la sensibilité est de 7,1 mm/V [3]. Le signal  $\eta(t)$  est filtré (passe-bas 1 kHz) puis enregistré à l'aide d'une carte d'acquisition à 4 kHz pendant 300 s (soit  $1,2 \times 10^6$  points enregistrés).

Dans l'approximation de grande profondeur, la relation de dispersion des ondes à la surface d'un liquide magnétique, supposé sans viscosité, et soumis à une induction magnétique  $B$  normale à sa surface, s'écrit [11]

$$\omega^2 = gk - \frac{f[\chi]}{\rho\mu_0} B^2 k^2 + \frac{\gamma}{\rho} k^3, \quad (1)$$

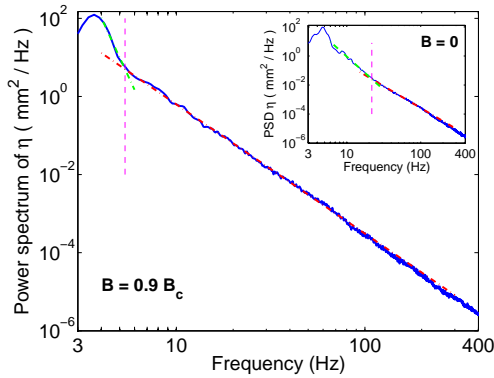
où  $\omega$  est la pulsation de l'onde,  $k$  son nombre d'onde,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> l'accélération de la pesanteur,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m la perméabilité magnétique du vide, et  $f[\chi] \equiv \frac{\chi^2}{(1+\chi)(2+\chi)}$ .  $\chi$  est la susceptibilité magnétique du ferrofluide dont les variations avec le champ magnétique extérieur  $H$  peuvent être modélisées par la

théorie classique de Langevin [16] :  $\chi(H) = \frac{M_{sat}}{H} \mathcal{L}\left(\frac{3\chi_i H}{M_{sat}}\right)$  où  $\mathcal{L}(x) \equiv \coth(x) - 1/x$ . En considérant l'Eq. constitutive  $B = \mu_0(1 + \chi)H$ , le calcul de  $\chi(B)$  s'effectue numériquement. On en déduit les valeurs de  $f[\chi]$  pour tout  $B$  nécessaires à l'analyse de la relation de dispersion d'Eq. (1).

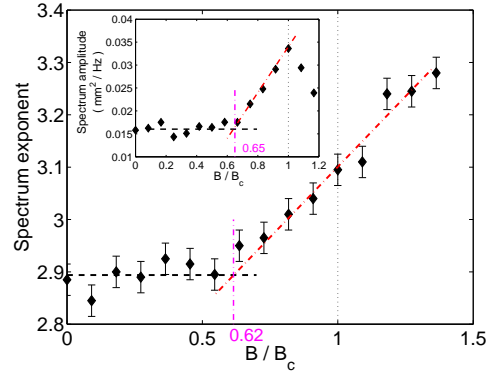
Pour  $B = 0$ , la relation de dispersion d'Eq. (1) se réduit au cas des ondes de gravité-capillarité :  $\omega$  est une fonction monotone de  $k$ , dominée par le terme de gravité aux faibles valeurs de  $k$  et par le terme de capillarité aux grandes valeurs de  $k$ . Lorsque l'on augmente  $B$ , le terme quadratique négatif  $-B^2 k^2$  croît : la relation de dispersion devient non-monotone et admet un minimum local. Lorsque le minimum de  $\omega^2(k)$  devient négatif, la surface plane devient instable et un réseau hexagonal de pics, caractéristique de l'instabilité dite de Rosensweig [11,12], apparaît à la surface du ferrofluide. En utilisant la relation de dispersion d'Eq. (1), on détermine le point critique ( $\frac{d\omega}{dk} = 0$  et  $\omega = 0$ ) définissant le seuil de l'instabilité pour l'induction magnétique critique  $B_c$  telle que  $f[\chi(B_c)]B_c^2 = 2\mu_0\sqrt{(\rho g \gamma)}$  soit  $B_c = 292,3$  G. La détermination visuelle directe du seuil de l'instabilité permet d'obtenir la valeur expérimentale  $B_c = 294 \pm 2$  G cohérente avec le résultat théorique précédent. Dans la suite, on considérera l'induction magnétique adimensionnée  $B/B_c$ .

### 3 Résultats et discussion

Le spectre de puissance de l'amplitude des ondes à la surface du ferrofluide est représenté en Fig. 2 pour différentes inductions magnétiques  $B$  appliquées. Pour  $B = 0$  (voir encart), le spectre est similaire à ceux précédemment observés dans les fluides usuels [3] : deux lois de puissance décroissantes correspondant aux régimes de turbulences d'ondes de gravité et de capillarité. Les exposants des lois de puissance sont déterminés par régression linéaire : le régime capillaire exhibe un comportement en  $f^{-2,9 \pm 0,1}$ , en bon accord avec le résultat issu de la théorie de turbulence faible en  $f^{-17/6}$  [17] ; et le régime de gravité est trouvé en  $f^{-4,6}$ . Comme l'exposant de la cascade des ondes de gravité dépend expérimentalement des paramètres de forçage [3,7] (un effet non pris en compte par le calcul théorique  $\sim f^{-4}$  [18]), la régression linéaire de cette partie du spectre ne sert qu'à la mesure de la fréquence de transition  $f_{gc}$  entre les régimes de gravité et de capillarité.



**Fig. 2.** Spectre de puissance de  $\eta(t)$  pour deux valeurs de  $B$ . Encart :  $B = 0$  : Régimes de gravité et de capillarité de pentes  $-4,6$  et  $-2,9$  (pointillés). Transition  $f = 20$  Hz. Principale : Régime magnéto-capillaire de pente  $-3,1$ . Transition  $f = 5$  Hz. Paramètre du forçage :  $1 - 5$  Hz.  $B_c = 294$  G.



**Fig. 3.** Exposant du spectre magnéto-capillaire en fonction de l'induction magnétique adimensionnée  $B/B_c$ . Encart : Amplitude du spectre de puissance (moyennée entre 8 et 18 Hz) en fonction de  $B/B_c$ . Paramètre du forçage :  $1 - 4$  Hz.  $B_c = 294$  G.

En égalisant les deux termes de l'Eq. (1) pour  $B = 0$ , on trouve alors  $f_{gc} = \frac{1}{\pi} \sqrt{2g/l_c} = 15,2$  Hz où  $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$  est la longueur capillaire [3]. Tout comme pour les fluides usuels [3],  $f_{gc}$  est trouvé dépendre de la gamme de fréquence de l'excitation : 26,6 Hz, 21,0 Hz et 17,2 Hz pour un forçage

aléatoire respectivement de 1 – 6 Hz, 1 – 5 Hz, 1 – 4Hz. Par conséquent, pour étudier *la dépendance* de la fréquence de transition avec l’induction magnétique  $B$ , on effectuera dans la suite la mise à l’échelle :  $\tilde{f}(B) \equiv \frac{f(B)}{f(B=0)} f_{gc}(B=0)$ .

Pour  $B \neq 0$ , le spectre de puissance des amplitudes des ondes présente deux nouvelles caractéristiques inattendues. Comme indiqué en Fig. 2 (pour  $B = 0,9B_c$ ) la fréquence de transition est fortement diminuée jusqu’à 5 Hz et une loi de puissance en  $f^{-3,1}$  est obtenue sur la totalité de la gamme de fréquences accessibles. Essayons tout d’abord d’interpréter cette dernière observation. Le spectre de puissance  $S_\eta$  peut être calculé par analyse dimensionnelle pour les régimes de gravité et de capillarité [10], respectivement, comme  $S_\eta^{grav} \sim \varepsilon^{1/3} g f^{-4}$  et  $S_\eta^{cap} \sim \varepsilon^{1/2} \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/6} f^{-17/6}$ , où  $\varepsilon$  est le flux d’énergie [dimension  $(L/T)^3$ ]. Une hypothèse de ces calculs est de connaître l’ordre des interactions résonantes c.-à-d. de supposer que le spectre est en  $\varepsilon^{1/(N-1)}$  pour un processus à  $N$  ondes [10].  $S_\eta^{grav}$  et  $S_\eta^{cap}$  sont alors obtenus puisque la turbulence d’ondes de gravité est un processus à 4 ondes et celle du régime capillaire est un processus à 3 ondes. On peut aussi calculer dimensionnellement le spectre de puissance de la turbulence d’ondes magnétiques. Comme l’ordre des interactions magnétiques n’est pas connu théoriquement, la résolution par l’analyse dimensionnelle n’est possible qu’en supposant la dépendance du spectre en  $\varepsilon^\alpha$  où  $\alpha$  est indéterminé. On trouve alors pour ce régime

$$S_\eta^{mag}(f) \sim \varepsilon^\alpha \left(\frac{B^2}{\rho\mu_0}\right)^{\frac{2-3\alpha}{2}} f^{-3}. \quad (2)$$

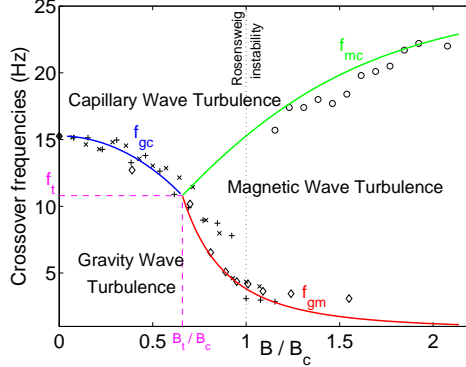
Contrairement aux systèmes dispersifs précédents, dans ce régime non-dispersif 2D, l’exposant  $-3$  de la dépendance fréquentielle ne dépend pas de l’exposant du flux d’énergie, c.-à-d. de l’ordre  $N$  des interactions résonantes. Les prédictions théoriques pour les exposants des spectres des régimes magnétique et capillaire, respectivement  $-3$  et  $-17/6 \simeq -2,83$ , sont trop proches pour être discriminées expérimentalement : la rupture de pente entre ces deux régimes ne peut être repérée et une unique loi de puissance apparaît en Fig. 2 correspondant au régime de turbulence « magnéto-capillaire ».

La figure 3 présente les variations de l’exposant fréquentiel du spectre magnéto-capillaire avec  $B$ . Pour de faibles valeurs de  $B$ , les ondes capillaires sont prépondérantes et l’exposant reste constant et vaut  $\simeq -2.9$  en bon accord avec le résultat théorique capillaire. Lorsque  $B/B_c \geq 0.65$ , les ondes magnétiques deviennent dominantes (voir ci-après) et l’exposant augmente légèrement avec  $B$  jusqu’à  $-3,1$ , en assez bon accord avec le résultat dimensionnel en  $-3$  de l’Eq. (2). Pour  $B/B_c \geq 1$ , l’instabilité de Rosensweig apparaît et l’exposant du spectre varie fortement avec  $B$ . Cela peut être attribué à la croissance du motif hexagonal de pics qui déforme la surface du ferrofluide. L’encart en Fig. 3 montre l’amplitude du spectre de puissance (moyennée entre 8 et 18 Hz) en fonction de  $B$ . L’amplitude du spectre est trouvé approximativement constante lorsque  $B$  reste inférieure à  $0,65B_c$ , seuil des ondes magnétiques. Au dessus de cette valeur, l’amplitude du spectre croît linéairement avec  $B$  jusqu’à  $B/B_c = 1$  où l’instabilité interfaciale apparaît. En utilisant l’Eq. (2), on déduit de cette dépendance linéaire que  $2 - 3\alpha = 1$ , et par conséquent  $\alpha = 1/3$ ; et comme  $\alpha = 1/(N-1)$ , on obtient  $N = 4$ . On démontre ainsi expérimentalement que le régime de turbulence d’ondes de surface magnétiques résulte d’un processus d’interaction à 4 ondes.

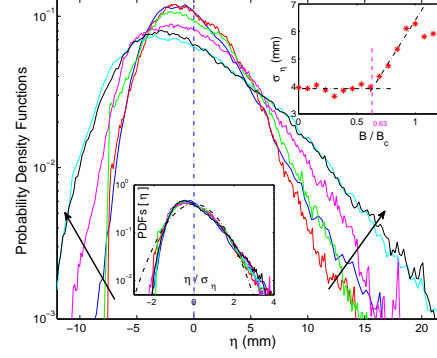
La fréquence de transition entre le régime de gravité et le régime magnéto-capillaire décroît lorsque  $B$  augmente (voir la Fig. 2). La figure 4 montre l’évolution de la fréquence de transition après la mise à l’échelle  $\tilde{f}(B)$  (voir ci-dessus) en fonction de  $B$  pour trois différentes gammes de fréquence de forçage aléatoire. Lorsque  $B$  augmente,  $\tilde{f}$  décroît avec la même loi d’évolution, quelque soit la fréquence du forçage. Au delà de  $B = B_c$ ,  $\tilde{f}$  devient du même ordre que la limite haute de la gamme de fréquence du forçage et ne peut par conséquent plus être mesurée. Néanmoins, quand  $B > B_c$  et pour le forçage 1 – 6 Hz, le spectre de puissance (non représenté ici) fait apparaître trois lois de puissance, c’est-à-dire une seconde rupture de pente correspondant à une transition magnéto-capillaire (aux valeurs élevées de  $B$ , les spectres magnétique et capillaire ne sont plus confondus). Cette nouvelle fréquence de transition est reportée sur la Fig. 3 par les symboles (o) sans mise à l’échelle. Pour les plus faibles gammes de fréquence, la rupture de pente aux champs élevés est trop faible pour une détermination précise de la fréquence de transition entre les régimes magnétique et capillaire.

La relation de dispersion permet de calculer théoriquement ces fréquences de transition. Quelque soit  $B$ , le terme de droite de l’Eq. 1 est dominé, aux faibles valeurs de  $k$ , par le terme linéaire  $gk$





**Fig. 4.** Fréquences de transition,  $\tilde{f}(B) \equiv f_{gc}(0) \times f(B)/f(0)$  en fonction de  $B$  pour différentes gammes de fréquences de forçage : ( $\times$ ) 1 – 4 Hz, ( $\diamond$ ) 1 – 5 Hz, et (+ or  $\circ$ ) 1 – 6 Hz. Les courbes théoriques  $f_{gc}$ ,  $f_{gm}$  et  $f_{mc}$  sont respectivement issues des Eqs. (3), (4) et (5). Les coordonnées du point triple ( $f_t = 10.8$  Hz,  $B_t/B_c = 0.65$ ) sont données par l'Eq. (6).



**Fig. 5.** Fonctions de densité de probabilité de l'amplitude,  $\eta$ , des ondes pour différentes valeurs de  $B/B_c = 0; 0, 3; 0, 54; 0, 77; 0, 92; 1, 2$  (voir les flèches). Paramètre du forçage : 1 – 4 Hz. Encart bas : Mêmes PDF représentées en utilisant la variable réduite  $\eta/\sigma_\eta$ . Gaussienne (pointillés). Encart haut : Ecart-type de l'amplitude  $\sigma_\eta$  en fonction de  $B/B_c$ .

(ondes de gravité) et, aux valeurs élevées de  $k$ , par le terme cubique  $(\gamma/\rho)k^3$  (ondes capillaires). On fait l'hypothèse que le terme quadratique  $-\frac{f[\chi]}{\rho\mu_0}B^2k^2$  (ondes magnétiques) domine lorsque celui-ci est supérieur au terme linéaire et au terme cubique, c.à-d. lorsque  $f[\chi]B^2 > \mu_0\sqrt{\rho g\gamma}$ , ce qui pour le ferrofluide utilisé donne  $B > 0.65B_c$ . Ainsi, lorsque  $B < 0.65B_c$ , il n'existe pas de longueur d'onde pour laquelle le terme magnétique est dominant dans l'Eq. (1). Quand  $B > 0.65B_c$ , ce terme devient dominant sur une gamme de longueurs d'ondes entre celles de gravité et celles de capillarité : c'est le seuil d'apparition des ondes magnétiques. Cette analyse explique pourquoi l'exposant du spectre et son amplitude, représentés en Fig. 3, changent de comportement d'évolution pour  $B \simeq 0.65B_c$ . Étonnamment, cette valeur critique de l'induction magnétique ainsi que l'existence d'ondes magnétiques à la surface des ferrofluides n'ont pas, à notre connaissance, été rapportées précédemment. Les fréquences de transition entre les régimes de gravité, magnétique et capillaire sont calculées en équilibrant les termes de la relation de dispersion deux à deux. Pour obtenir la transition gravito-capillaire, on équilibre le premier et le troisième terme du membre de droite de l'Eq. (1) :  $gk_{gc} = (\gamma/\rho)k_{gc}^3$ , d'où  $k_{gc} = \sqrt{\rho g/\gamma}$  qui, remplacé dans la relation de dispersion, donne

$$\omega_{gc}^2 = 2\sqrt{\frac{g^3\rho}{\gamma} - \frac{gf[\chi]B^2}{\mu_0\gamma}}, \text{ pour } f[\chi]B^2 < \mu_0\sqrt{\rho g\gamma}. \quad (3)$$

De manière analogue, en équilibrant le premier et le deuxième terme, on obtient la fréquence de transition gravito-magnétique

$$\omega_{gm}^2 = \frac{\gamma}{\rho} \left[ \frac{\mu_0\rho g}{f[\chi]} \right]^3 B^{-6}, \text{ pour } f[\chi]B^2 > \mu_0\sqrt{\rho g\gamma}. \quad (4)$$

Enfin, en équilibrant le deuxième et le troisième terme, la fréquence de transition magnéto-capillaire s'écrit

$$\omega_{mc}^2 = \frac{gf[\chi]}{\mu_0\gamma} B^2, \text{ pour } f[\chi]B^2 > \mu_0\sqrt{\rho g\gamma}. \quad (5)$$

Ces fréquences de transition théoriques sont représentées en Fig. 4 dans le plan  $(B/B_c, f)$  et montrent un bon accord avec les données expérimentales. Ce graphe montre également le domaine d'existence des ondes magnétiques pour  $B/B_c > 0.65$  et celle d'un point triple correspondant à la coexistence des trois domaines. Ses coordonnées peuvent être calculées en équilibrant les trois termes de la relation de

dispersion, ce qui donne

$$f_t = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{g^3 \rho}{\gamma} \right)^{1/4} \quad \text{et} \quad B_t^2 = \mu_0 \sqrt{\rho g \gamma} / f[\chi(H_t)] \quad , \quad (6)$$

soit  $f_t = 10.8$  Hz and  $B_t/B_c = 0.65$  en bon accord avec les données de la Fig. 4.

Enfin, les fonctions de densité de probabilité (PDF) des amplitudes des ondes de surface sont représentées sur la Fig. 5 pour différentes valeurs de  $B/B_c$ . Pour  $B = 0$ , la PDF est trouvée asymétrique et ne suit pas une loi gaussienne, de manière similaire aux résultats avec un fluide usuel [3]. Cela signifie que les creux profonds sont rares, tandis que les crêtes élevées sont plus probables : cet écart à la distribution gaussienne est la signature de la nature non-linéaire des interactions intervenant dans le régime de turbulence d'ondes. L'asymétrie de la PDF est accrue lorsque  $B$  augmente. L'encart bas en Fig. 5 montre la superposition de toutes ces PDF lorsqu'elles sont normalisées par l'écart-type  $\sigma_\eta$ . L'existence d'une courbe maîtresse non gaussienne signifie que le régime non linéaire n'est déterminé statistiquement que par  $\sigma_\eta$ . L'encart haut en Fig. 5 représente l'évolution de  $\sigma_\eta$  en fonction de  $B/B_c$ . Pour  $B/B_c \leq 0.63$ ,  $\sigma_\eta$  ne dépend pas de l'induction magnétique. On remarque que cette valeur est très proche du seuil prédit et observé précédemment pour l'apparition des ondes magnétiques  $B_t/B_c = 0,65$ . Au-delà de ce seuil,  $\sigma_\eta$  croît assez linéairement avec  $B$  jusqu'à l'apparition de l'instabilité de Rosensweig à  $B_c$ .

Ce travail a été financé par l'ANR Turbonde BLAN07-3-197846.

## Références

1. F. BOYER & E. FALCON, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 244502 (2008) — PRL Editors' Suggestion; aussi dans *Physics*, « The New Wave » 22 Dec. 2008 (<http://physics.aps.org/synopsis-for/10.1103/PhysRevLett.101.244502>).
2. W. B. WRIGHT, R. BUDAKIAN & S. J. PUTTERMAN, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4528 (1996) — M. YU. BRAZHNIKOV *et al.*, *Europhys. Lett.*, **58**, 510 (2002).
3. E. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 094503 (2007).
4. V. E. ZAKHAROV, G. FALKOVICH & V. S. L'VOV, *Kolmogorov Spectra of Turbulence*, Springer-Verlag (1992).
5. E. FALCON, S. FAUVE & C. LAROCHE, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 154501 (2007).
6. E. FALCON *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 064503 (2008).
7. P. DENISSENKO, S. LUKASCHUK & S. NAZARENKO, *Phys. Rev. Lett.*, **99** 014501 (2007)
8. Y. CHOI *et al.*, *Phys. Lett. A*, **339**, 361 (2005) — S. NAZARENKO, *J. Stat. Mech.*, ?? L02002 (2006).
9. Y. CHOI, Y. V. LVOV & S. NAZARENKO, *Phys. Lett. A*, **332**, 230 (2004).
10. C. CONNAUGHTON, S. NAZARENKO & A. C. NEWELL, *Physica D*, **184**, 86 (2003) et références citées.
11. R. E. ROSENSWEIG, *Ferrohydrodynamics*, Dover, New York (1997) — E. BLUMS, A. CEBERS & M. M. MAIOROV, *Magnetic Liquids* (Library Binding, 1997).
12. M. D. COWLEY & R. E. ROSENSWEIG, *J. Fluid Mech.*, **30**, 671 (1967).
13. J. BROWAEYS, J.-C. BACRI, C. FLAMENT, S. NEVEU & R. PERZYNSKI, *European Physical Journal B*, **9**, 335 (1999) — J. BROWAEYS, Thèse de Université Paris-Diderot (2000).
14. J. P. EMBS, C. WAGNER, K. KNORR & M. LÜCKE, *EPL*, **78** 44003 (2007) — H. W. MÜLLER, *J. Magn. Magn. Mater.*, **201**, 350 (1999) — T. MAHR, A. GROISMAN & I. REHBERG, *J. Magn. Magn. Mater.*, **159**, L45 (1996).
15. La synthèse du ferrofluide a été réalisée par le Laboratoire LI2C de l'Université Paris 6.
16. B. ABOU, G. NÉRON DE SURGY & J. E. WESFREID, *J. Phys. II* (France), **7**, 1159 (1997) — B. ABOU, Thèse de l'Université Paris-Diderot (1998).
17. V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO, *J. App. Mech. Tech. Phys.*, **8**, 37 (1967).
18. V. E. ZAKHAROV & N. N. FILONENKO, *Sov. Phys. Dokl.*, **11**, 881 (1967) — V. E. ZAKHAROV & M. M. ZASLAVSKY, *Atmos. Oceanic Phys.*, **18**, 747 (1982).

# Dépendance de la nature du forçage sur la statistique de la puissance injectée dans une plaque mise en vibration chaotique

Olivier Cadot<sup>1</sup>, Arezki Boudaoud<sup>2</sup>, & Cyril Touzé<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ENSTA-UME, Unité de Recherche en Mécanique, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau, Cedex, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique Statistique, UMR 8550 du CNRS/ENS/Paris 6/Paris 7, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 5, France

olivier.cadot@ensta.fr

**Résumé.** Une plaque mise en vibration à grande amplitude atteint un état chaotique de turbulence d'onde où l'interaction non-linéaire entre ondes de flexion de la plaque conduit au transfert d'énergie de grande à petite longueur d'onde. Notre travail porte sur l'injection d'énergie dans ce système à l'aide d'un forçage périodique, aléatoire ou d'un forçage interpolant entre ces deux cas extrêmes. D'une part, nous avons étudié les corrélations entre force appliquée et réponse en vitesse au point de forçage. Les modèles proposés pour les statistiques de ces grandeurs sont en bon accord avec les expériences dans les cas du forçage aléatoire et périodique. Les distributions de puissance injectée présentent toujours une divergence logarithmique à petite puissance ; par contre, les queues de ces distributions sont gaussiennes pour le forçage périodique et exponentielles pour le forçage aléatoire. D'autre part, nous avons également étudié les distributions d'énergie injectée dans le cadre correspondant au théorème de fluctuation (ou théorème de Gallavotti-Cohen). Il apparaît que les conclusions du théorème sont vérifiées uniquement avec le forçage déterministe (périodique) et se dégradent au fur et à mesure que le forçage devient aléatoire.

**Abstract.** A vibrating plate is set into a chaotic state of wave turbulence by a periodic or a random local forcing, or by a forcing interpolating between these two limiting cases. Correlations between the forcing and the local velocity response of the plate at the forcing point are studied. Statistical models with fairly good agreement with the experiments are proposed for each forcing. Both distributions of injected power have a logarithmic cusp for zero power, while the tails are Gaussian for the periodic driving and exponential for the random one. The distributions of injected work over long time intervals are investigated within the framework of the fluctuation theorem, also known as the Gallavotti-Cohen theorem. It appears that the conclusions of the theorem are verified only for the periodic, deterministic forcing.

## 1 Introduction

La distribution statistique de l'énergie et des flux d'énergie est un problème fondamental pour les systèmes hors d'équilibre à grand nombre de degrés de liberté. Du point de vue théorique, le théorème de fluctuation (FT), aussi connu sous le nom de théorème de Gallavotti-Cohen, apporte un résultat exact caractérisant les systèmes physiques loin de leur état d'équilibre [1,2,3]. Dans sa version stationnaire, le théorème se formule de la façon suivante ; soit  $p(t)$  la puissance injectée instantanée,  $\langle p \rangle$  sa moyenne temporelle et  $\epsilon_\tau$  sa moyenne (adimensionnée) sur un intervalle de temps  $\tau$ ,

$$\epsilon_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{p(t')}{\langle p \rangle} dt'. \quad (1)$$

Le théorème établit l'équivalence suivante pour la fonction d'asymétrie

$$\rho(\epsilon_\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\pi(+\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)} \sim \delta \epsilon_\tau \quad \text{quand } \tau \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

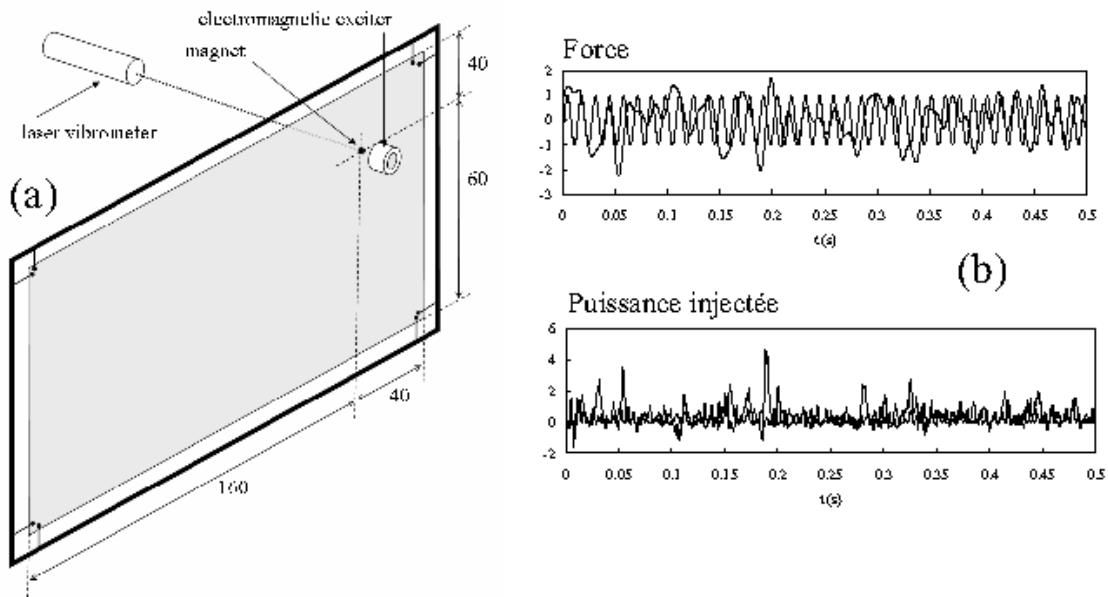
où  $\pi(\epsilon_\tau)$  est la fonction de densité de probabilité de  $\epsilon_\tau$ . Dans la version chaotique [1,2],  $\delta$  est le taux de contraction de l'espace des phases. Dans la version stochastique [3],  $\langle p \rangle / \delta$  représente la température du bain thermostaté avec lequel le système est en contact.

Nous proposons d'étudier le rôle de la nature du forçage sur la validité du théorème. Pour aborder cette question, nous nous intéressons aux vibrations d'une plaque de grande dimension par rapport à son épaisseur et excitée localement par une force de grande amplitude. Dans ce cas, la plaque atteint un régime de turbulence d'ondes [4,5,6] où se propagent aléatoirement des ondes élastiques avec un spectre large bande [8,9]. Nous avons récemment montré que les conclusions du théorème de fluctuation sont vérifiées dans le cas d'un forçage périodique de la plaque, mais pas pour un forçage aléatoire [7]. Dans cet article nous reprenons cette expérience en explorant les cas intermédiaires entre ces deux cas extrêmes de forçages.

## 2 Expérience

### 2.1 Montage

Le montage expérimental est schématisé en Figure 1(a), il est identique à celui utilisé dans [7]. Il s'agit d'une plaque de réverbération choisie pour sa haute densité modale, obtenue grâce à ses dimensions ( $2\text{ m} \times 1\text{ m}$ ) grandes devant l'épaisseur  $h = 0.5\text{ mm}$ . Les caractéristiques mécaniques sont les suivantes : un module d'Young de  $E = 200\text{ GPa}$ , un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et une masse volumique  $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$ . Le forçage est assuré par une bobine et un aimant permanent. Dans cette configuration la force agissant sur l'aimant est proportionnelle au courant circulant dans la bobine  $F(t) = KI(t)$ . Le courant est mesuré en insérant une résistance de  $0.12\Omega$  en série avec la bobine. La vitesse normale  $v$  au point d'application du forçage est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser (Polytec, modèle OFV 056), voir Figure 1(a). La vitesse normale et le courant sont échantillonnés à  $5000\text{Hz}$ . Dans la suite, la force et la vitesse sont montrées en unités arbitraires. (Figure 1(b)).



**Fig. 1.** (a) : Montage expérimental de la plaque suspendue par un cadre. Les dimensions sont en centimètre. L'excitateur électromagnétique (une bobine) est placé en face de l'aimant. La force agissant sur l'aimant est contrôlée par le courant circulant dans la bobine. Un vibromètre laser mesure la vitesse normale de l'autre côté de la plaque, au même emplacement que l'aimant. (b) : Séries temporelles en unités arbitraires de la force et de la puissance injectée dans cas périodique (traits fins) et aléatoire (traits épais).

## 2.2 Forçage

La tension de consigne  $U_c$  qui est amplifiée puis appliquée aux bornes de la bobine et de la résistance est construite à partir d'un signal  $s(t)$  composé d'une partie périodique sinusoidale et d'une partie aléatoire d'un poids relatif  $\alpha$ ,

$$s(t) = \alpha\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t) + (1 - \alpha)\xi(t), \quad (3)$$

où  $f_0 = 75Hz$  et  $\xi(t)$  est un bruit blanc de largeur spectrale  $(0.0016Hz - 75Hz)$  avec  $\langle \xi^2 \rangle = 1$  et  $\langle \xi \rangle = 0$ . La tension de consigne est normalisée pour chaque valeur de  $\alpha$  de sorte que

$$U_C(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{\langle s^2 \rangle}} \quad (4)$$

Les cas  $\alpha = 1$  décrivant le forçage périodique et  $\alpha = 0$  pour le forçage aléatoire sont ceux qui ont été étudié dans [7] sur des temps longs. Ici, on réalise une acquisition de 600s pour chaque valeur de  $\alpha$  comprise entre 0 et 1. Le courant dans la bobine et donc la force s'appliquant à l'aimant ne correspond pas exactement à la tension de consigne  $U_C(t)$ , mais résulte du filtrage passe-bas du circuit ( $LR$ ) dont la fréquence de coupure se situe vers  $10Hz$ . C'est pourquoi sur la figure 2, la valeur *rms* de la force,  $\sigma_F$ , augmente quand  $\alpha$  diminue alors que la valeur *rms* de la tension de consigne reste constante. En conséquence on observe aussi une augmentation de la valeur *rms* de la réponse en vitesse  $\sigma_v$  quand  $\alpha$  diminue. Un exemple de traces temporelles de la puissance injectée dans la plaque

$$p(t) = v(t)F(t) \quad (5)$$

est montré sur la Figure 1(b) pour les deux cas extrêmes de forces appliquées. La puissance moyenne

$$\langle p(t) \rangle = \langle v(t)F(t) \rangle = r\sigma_v\sigma_F. \quad (6)$$

représentée sur la figure 2 augmente aussi au fur et à mesure que le forçage devient purement aléatoire par contre le coefficient de corrélation diminue, il est maximum pour le forçage périodique ( $\alpha = 1$ ) et minimum pour le forçage aléatoire ( $\alpha = 0$ ). On s'attend donc à ce qu'à  $\sigma_F$  constant, le forçage aléatoire soit moins corrélé et donc moins dissipatif que le forçage périodique. La valeur *rms* de la puissance  $\sigma_p$  suit globalement la même variation que la puissance moyenne.

## 3 Résultats

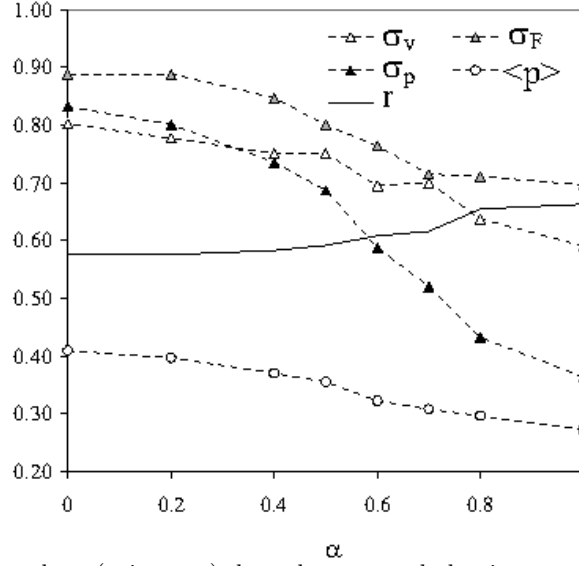
### 3.1 PDF de puissance injectée

Les fonctions de densités de probabilités (PDF) réduites sont présentées sur la Figure 3. On peut observer sur cette figure la variation continue de la forme des PDF depuis le forçage aléatoire  $\alpha = 0$  jusqu'au forçage périodique  $\alpha = 1$ . Pour ces deux cas limites, les modèles statistiques [7] périodique et aléatoire sont en très bon accord avec les statistiques obtenues. Le modèle pour le forçage périodique consiste à prendre la fluctuation de vitesse comme une superposition d'une variable proportionnelle à la force périodique et d'un bruit gaussien, les deux variables étant décorréelées mis à part leur amplitude. Le bruit gaussien joue le rôle du retour turbulent de la plaque sur l'injection. Pour le modèle du forçage aléatoire, la vitesse et la force sont prises comme deux variables aléatoires gaussiennes corrélées. La loi binormale qui en découle permet de calculer la statistique de la puissance injectée [10]. Quel que soit le modèle, il n'y a pas de paramètres ajustables, seules les mesures expérimentales des *rms* de la force et de la vitesse ainsi que de la corrélation  $r$  sont nécessaires.

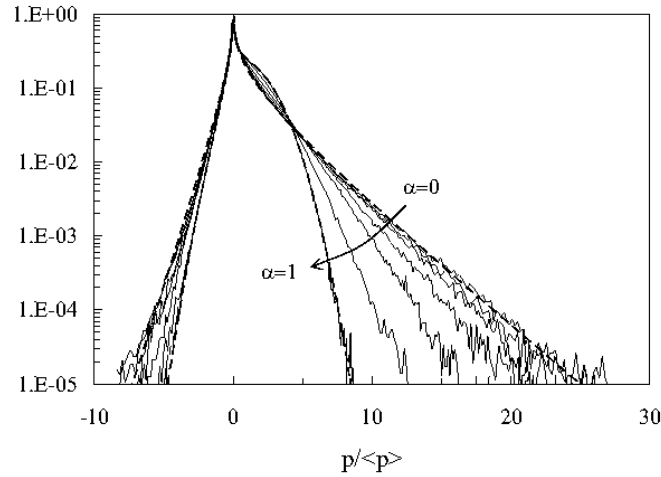
### 3.2 Théorème de fluctuation

Nous nous intéressons maintenant à la puissance injectée (adimensionnée) pendant un intervalle de temps  $\tau$ ,

$$\epsilon_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{p(t')}{\langle p \rangle} dt', \quad (7)$$



**Fig. 2.** Evolution en fonction de  $\alpha$  (voir texte) des valeurs rms de la vitesse normale  $\sigma_v$ , force  $\sigma_F$ , puissance injectée  $\sigma_p$ , de la puissance moyenne injectée  $\langle p \rangle$  et de la corrélation  $r$  définie par  $\langle p \rangle = r\sigma_v\sigma_F$ .



**Fig. 3.** PDF de la puissance injectée en fonction de  $\alpha$  (0;0.2;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;1). Les courbes discontinues sont les modèles [7] périodique ( $\alpha = 1$ ) et aléatoire ( $\alpha = 0$ ).

et à la fonction d'asymétrie

$$\rho(\epsilon_\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\pi(+\epsilon_\tau)}{\pi(-\epsilon_\tau)}, \quad (8)$$

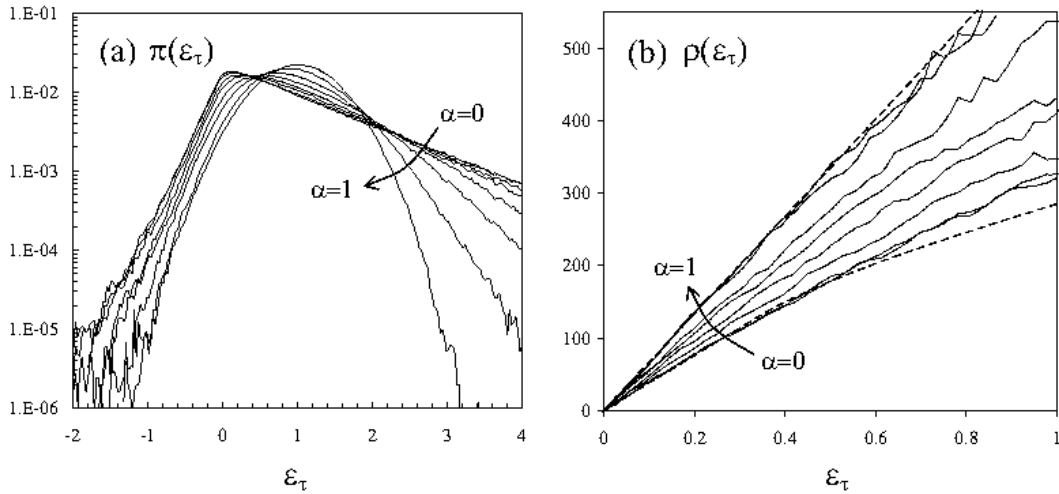
où  $\pi(\epsilon_\tau)$  est la fonction de densité de probabilité de  $\epsilon_\tau$ . La quantité  $\rho(\epsilon_\tau)$  est centrale pour le théorème de fluctuation [1,2,3], dont les conclusions mènent à la relation linéaire  $\rho(\epsilon_\tau) \simeq \delta\epsilon_\tau$  pour  $\tau \rightarrow \infty$ .

Les PDF  $\pi(\epsilon_\tau)$  pour  $\tau = 1/f_0 = 13.3\text{ms}$  sont représentées en fonction de  $\alpha$  sur la figure 4(a). Elles se déforment continument de la gaussienne pour  $\alpha = 1$  vers une forme fortement asymétrique pour  $\alpha = 0$ . On peut voir la conséquence de cette variation de la forme sur la fonction d'asymétrie de la figure 4(b). Elle est raisonnablement linéaire pour le forçage périodique avec une pente de  $\delta_P = 670\text{Hz}$  et présente une courbure qui s'accroît au fur et à mesure que le forçage devient aléatoire. Sur le même graphique

nous avons tracé le modèle de Farago [11] qui considère un oscillateur linéaire forcé aléatoirement. La pente à l'origine décroît quand  $\alpha$  diminue, plus le forçage est aléatoire et plus le temps caractéristique augmente.

### 3.3 Discussions

On observe la dégradation des conclusions du théorème de fluctuation en fonction du degré de stochasticité du forçage mesuré ici par  $\alpha$  (0 pour un forçage aléatoire et 1 pour un forçage périodique sinusoïdal). Une des raisons évoquée pour cette dégradation dans [7] est fondée sur l'idée qu'en forçage aléatoire la réponse du système est dominée par une réponse linéaire au forçage aléatoire. Cette situation est totalement décrite dans la théorie de Farago [11] et ne vérifie pas le théorème de fluctuation. D'un autre coté, la réponse au forçage aléatoire produit des PDF  $\pi(\epsilon_\tau)$  qui convergent difficilement vers des gaussiennes quand  $\tau \rightarrow \infty$ . Ceci est dû au contenu spectral du forçage, qui présente, lorsque  $\alpha$  diminue, un contenu en basses fréquences de plus en plus important. Ainsi, la fonction  $\epsilon_\tau$  qui est un intégrateur présentera des fluctuations de plus en plus grandes quand  $\alpha \rightarrow 0$ . Cette dégradation sur la forme des PDF est aussi un élément contribuant à la non validité du théorème de fluctuation pour le cas du forçage aléatoire.



**Fig. 4.** (a) : PDF  $\pi(\epsilon_\tau)$  pour  $\tau = 1/f_0 = 13.3\text{ms}$  en fonction de  $\alpha$ . (b) : Fonctions d'asymétrie  $\rho_\tau$  correspondantes à (a). Dans (b) la ligne pointillée courbée correspond à la prédiction théorique [11] pour un oscillateur linéaire excité aléatoirement :  $\rho(\epsilon_\tau) = 4\gamma\epsilon_\tau$  pour  $\epsilon_\tau < 1/3$ , et  $\rho(\epsilon_\tau) = 7\gamma\epsilon_\tau/4 + 3\gamma/2 - \gamma/(4\epsilon_\tau)$  pour  $\epsilon_\tau > 1/3$ ; avec ici  $4\gamma = \delta_R = 480\text{Hz}$ . La ligne pointillée droite est de pente  $\delta_P = 670\text{Hz}$ .

## Références

1. D. J. EVANS, E. G. D. COHEN & G. P. MORRIS, Probability of Second Law Violations in Shearing Steady States, *Physical Review Letters*, **71**, 2401–240 (1993).
2. G. GALLAVOTTI & E. G. D. COHEN, Dynamical Ensembles in Nonequilibrium Statistical Mechanics, *Physical Review Letters*, **74**, 2694–2697 (1995).
3. J. KURCHAN, Fluctuation theorem for stochastic dynamics, *Journal of Physics A*, **31**, 3719–3729 (1998).
4. G. DURING, C. JOSSEMAND & S. RICA, Weak Turbulence for a Vibrating Plate : Can One Hear a Kolmogorov Spectrum? *Physical Review Letters*, **97**, 025503 (2006).

5. A. BOUDAUD, O. CADOT, B. ODILLE & C. TOUZÉ, Observation of Wave Turbulence in Vibrating Plates, *Physics Review Letters*, **100**, 234504 (2008).
6. N. MORDANT, Are There Waves in Elastic Wave Turbulence? *Physical Review Letters*, **100**, 234505 (2008).
7. O. CADOT, A. BOUDAUD & C. TOUZÉ, Statistics of power injection in a plate set into chaotic vibration, *European Physical Journal B*, **66**, 399-407 (2008).
8. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV & G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
9. A. C. NEWELL, S. NAZARENKO & L. BIBEN, Wave turbulence and intermittency, *Physica D*, **152-153**, 520-550 (2001).
10. E. FALCON, S. AUMAÎTRE, C. FALCÓN, C. LAROCHE & S. FAUVE, Fluctuations of Energy Flux in Wave Turbulence, *Physical Review Letters*, **100**, 064503 (2008).
11. J. FARAGO, Injected Power Fluctuations in Langevin Equation, *Journal of Statistical Physics*, **107**, 781-803 (2002).



# Instabilités Magnéto-Inertielles

D. Cebron, W. Herreman, M. Le Bars, S. Le Dizès, P. Le Gal, & P. Maubert

IRPHE-UMR 6594 Technopôle de Château-Gombert  
49, rue Joliot Curie – B.P. 146, 13384 Marseille Cedex 13, France  
cebron@irphe.univ-mrs.fr

**Résumé.** L'instabilité elliptique est ici étudiée en géométrie cylindrique. Une première partie présente les résultats obtenus expérimentalement sous champ magnétique, ce dernier étant utilisé soit comme image de l'écoulement (champ magnétique faible) soit comme paramètre de contrôle (champ magnétique fort). Une seconde partie présente les premiers pas d'une étude DNS de l'instabilité elliptique qui devrait, à terme, permettre d'étudier l'interaction entre l'instabilité et le champ magnétique en géométrie sphéroïdale.

**Abstract.** A study of the elliptical instability in cylindrical geometry is presented in this paper. Firstly, experimental results under magnetic field are described. The magnetic field is used on the one hand as a measurement tool (weak magnetic field) of the flow and on the other hand as a control parameter (strong magnetic field). Secondly, a way to simulate numerically this instability is introduced, which is a first milestone of a study in spheroidal geometry about the interplays between magnetic field and elliptical instability.

## 1 Introduction

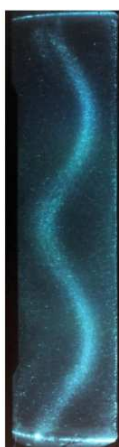
Il est souvent assumé tacitement que la génération d'un champ magnétique dans un noyau planétaire est systématiquement due à des mouvements de convection thermique et/ou solutale. Cependant, d'autres mécanismes, comme par exemple les instabilités inertielles de précession et de marées, sont envisageables à l'échelle planétaire et peuvent induire un champ magnétique, voire même générer une dynamo (cf. par exemple [3]). Les effets de marées sont tout particulièrement importants pour les satellites galiléens, en rotation dans un champ de gravité complexe influencé par Jupiter et par les autres lunes : ainsi, la déformation du noyau de Io atteint plusieurs centaines de mètres et la présence d'une instabilité inertielle est quasi-certaine [4]. Du point de vue des caractéristiques magnétiques, les passages répétés de la sonde Galileo à proximité des satellites galiléens ont apporté des conclusions variées (cf. par exemple [2]). Sur Io, la présence d'un champ magnétique intrinsèque reste indéterminée [5], l'un des arguments en sa défaveur étant l'impossibilité de tout mouvement convectif dans le noyau. Sur Ganymède, l'existence d'un champ dipolaire permanent est démontrée [6], ce champ étant sans doute relié à une dynamo, actuelle ou passée ; toutefois, une dynamo convective actuelle semble peu probable. Enfin, Europe et Callisto possèdent tous deux un champ induit [8], qui peut être expliqué par des mouvements dans un océan interne d'eau salée. Pour les 4 lunes cependant, l'influence des instabilités inertielles a été négligée depuis le travail précurseur de [4], et de nombreuses conclusions restent sujettes à controverse. Une connaissance fine de la magnétohydrodynamique (MHD) des instabilités inertielles semble donc indispensable à une meilleure compréhension des champs magnétiques des satellites galiléens entre autres, afin de mieux contraindre leur importance dans l'organisation des écoulements dans les noyaux planétaires et dans la génération d'un champ magnétique. Les résultats de nos études s'appliquent également aux exoplanètes très proches de leur étoile ou aux systèmes d'étoiles doubles.

## 2 Approche expérimentale

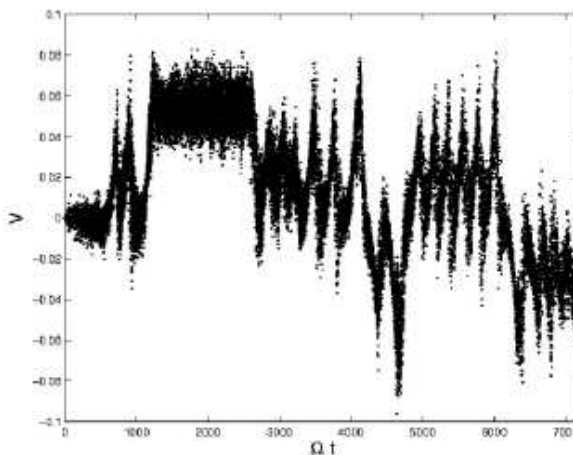
### 2.1 Dispositif expérimental

Des études à la fois théoriques et expérimentales sont menées à l'IRPHE depuis 1996 sur les instabilités de marées des tourbillons. Dans un premier temps, un dispositif expérimental a été réalisé permettant

l'étude exhaustive des modes instables d'un cylindre fluide déformé elliptiquement et mis en rotation suivant son axe. Les différents modes de l'instabilité elliptique ont été parfaitement caractérisés et comparés aux résultats expérimentaux [7]. En particulier, nous avons mis en évidence un mode d'instabilité provenant de la résonance entre deux ondes de Kelvin de nombres d'ondes azimuthaux  $m = 1$  et  $m = -1$  et la déformation elliptique du cylindre  $m = 2$ . Tout d'abord stationnaire, comme illustré sur la figure 1-a, ce mode laisse apparaître à plus grand nombre de Reynolds des cycles d'intermittence instabilité-turbulence-relaminarisation (figure 1-b) : dans ce cas, la phase du mode peut se renverser entre deux cycles (ce qui pourrait, en MHD, impliquer des inversions du champ magnétique induit). Notons également que les échelles de temps générées par le système sont largement supérieures au temps caractéristique de la rotation, caractéristiques toutes deux particulièrement intéressantes pour une application de l'instabilité de marées à la génération d'un champ magnétique planétaire.



(a) Visualisation par Kalliroscope [7]



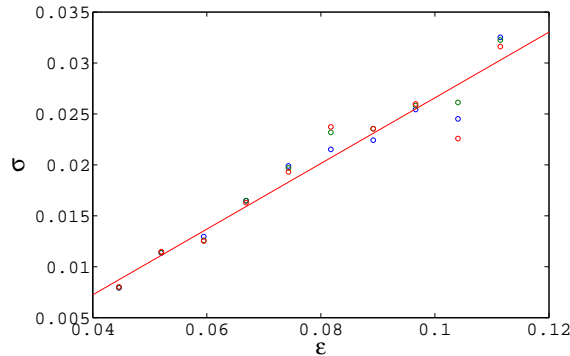
(b) Mesure par anémométrie Laser-Doppler de la vitesse axiale en un point à l'intérieur du cylindre, mise en évidence de l'intermittence (voir [9])

**Fig. 1.** Mode (-1,1).

## 2.2 Résultats expérimentaux

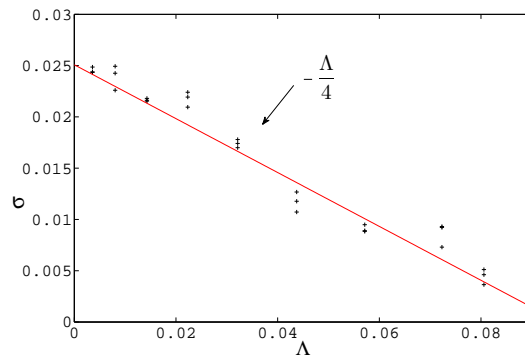
L'étude actuelle est centrée sur l'étude de la réponse magnétique de l'instabilité elliptique lorsque que l'écoulement instable de fluide en rotation est soumis à un champ magnétique axial. Le fluide utilisé ici est un eutectique de Gallium (Galinstan) et deux bobines d'Helmholtz permettent de contrôler un champ magnétique axial d'intensité variable entre 20 et 1200 Gauss. Une sonde à effet Hall permet d'enregistrer la dynamique des champs induits. Deux cas de figures se sont présentés suivant les valeurs du champ imposé. A champ faible, la force de Lorenz est insuffisante pour modifier l'instabilité elliptique. Dans ce cas, le champ magnétique induit par le mode instable est une simple image de l'hydrodynamique. En particulier, la croissance exponentielle du mode (-1,1) a pu être mesurée en fonction de l'amplitude  $\epsilon$  de la déformation elliptique du cylindre à proximité du seuil de l'instabilité. La figure 2 présente la variation du taux de croissance linéaire de l'instabilité en fonction de l'excentricité  $\epsilon$ . Un comportement classique linéaire, comme prévu par la théorie [7] est observé.

Par contre, si la force de Lorenz est d'amplitude comparable aux effets visqueux, elle participe à l'atténuation de l'instabilité. En fait, une dissipation par effet Joule est ressentie par les mouvements du fluide. Dans ce cas, nous montrons que la valeur du taux de croissance est diminuée par un terme proportionnel au carré du champ magnétique. La figure 3 atteste de cet effet et montre la variation du taux de croissance en fonction du nombre d'Elsasser ( $\Lambda = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega}$ ). Ainsi, en contrôlant le champ magnétique



**Fig. 2.** Taux de croissance de l'instabilité (champ magnétique imposé faible) en fonction de l'ellipticité imposée.

imposé, il est possible de jouer très précisément sur la dissipation par effet Joule. Le nombre d'Elsasser devient alors paramètre de contrôle de l'instabilité elliptique en déplaçant son seuil d'application. Notons qu'il peut être imposé de façon beaucoup plus précise que l'excentricité, toujours délicate à mesurer et à imposer de façon homogène.

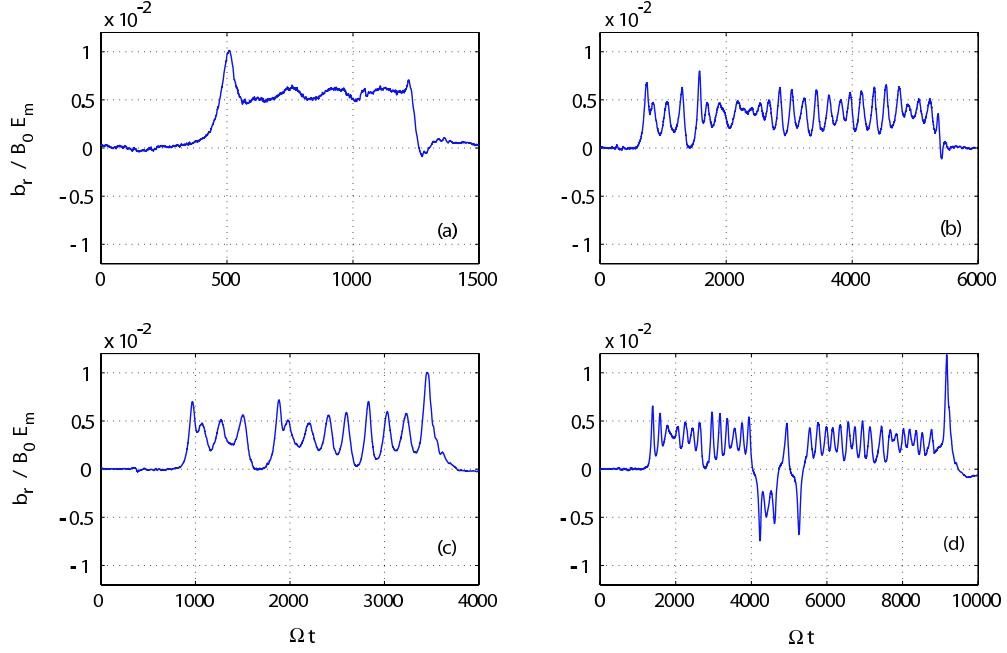


**Fig. 3.** Atténuation du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec l'intensité du champ magnétique imposé.

La figure 4 permet par exemple de suivre l'évolution non-linéaire du mode de "spinover". Proche du seuil, la dynamique sature comme le montre la figure 4 (a). En augmentant la distance au seuil (nombre de Reynolds multiplié par deux), des oscillations lentes modulent la saturation. L'amplitude des oscillations augmente avec la distance au seuil et un régime présentant des intermittences finit par apparaître. Il faut noter qu'une dynamique similaire a également été observée qualitativement à l'aide d'un modèle de Galerkin basé sur un nombre réduit de modes propres du problème linéaire visqueux [10].

### 3 Approche numérique

Ces derniers résultats expérimentaux sur l'interaction entre instabilité elliptique et champ magnétique montrent l'intérêt d'une étude plus approfondie de cet aspect. De façon complémentaire, une approche numérique du problème est également menée, avec pour objectif à long terme la simulation numérique de la dynamo dans une géométrie sphérique elliptique. Pour ce faire, nous réutiliserons probablement un code dynamo existant et validé (ref. [11]) et il faut donc voir dans quelle mesure un tel code est adaptable au problème. La grande majorité des codes dynamo actuels sont spectraux et utilisent la symétrie de



**Fig. 4.** Evolution temporelle du champ magnétique induit par un mode de “spinover“  $(-1, 1, 1)$ , dans un cylindre de rapport d’aspect  $h = 5.9$ ,  $\epsilon = 0.071$ , à différents nombres d’Ekman et nombres d’Elzasser. (a) Régime saturé ( $E = 2.37 \times 10^{-4}$ ,  $\Lambda = 0.0161$ ), (b) Cycles limites ( $E = 1.19 \times 10^{-4}$ ,  $\Lambda = 0.008$ ), (c) Oscillations de relaxation ( $E = 0.596 \times 10^{-5}$ ,  $\Lambda = 0.004$ ), (d) Intermittences et renversements du champ induit ( $E = 0.298 \times 10^{-5}$ ,  $\Lambda = 0.002$ ).

révolution : il n’est donc pas possible de passer en géométrie elliptique de façon immédiate. Nous pensons donc simuler l’ellipticité de la géométrie par ajout d’une force en volume choisie judicieusement qui aurait le double avantage d’être simple d’implémentation et de conserver l’efficacité des codes spectraux sphériques. Une telle solution est actuellement à l’étude sur une géométrie plus simple à l’aide d’un code spectral cylindrique (ref. [12]).

Désirant obtenir un écoulement elliptique au coeur de notre géométrie, une fonction de courant de la forme suivante est requise :

$$\psi_{(r,\theta)} = -\frac{r^2}{2} + \epsilon\phi_{(r)}\cos(2\theta) \quad (1)$$

Le profil  $\phi$  permet de satisfaire les conditions d’adhérence aux bords. Naturellement, l’expression de la force est déterminée en injectant la fonction de courant dans les équations de Navier-Stokes. Une solution naturelle est de choisir  $\phi$  sous la forme d’un polynôme de degré quatre mais il semble aussi intéressant de raccorder la fonction de courant  $\psi_{(r,\theta)} = -\frac{r^2}{2}(1 + \epsilon\cos(2\theta))$  d’un écoulement elliptique en milieu infini aux conditions de bords sur une distance pouvant être fixée, ce que nous avons fait au moyen de fonctions cubiques. Ces deux solutions ont été étudiées et testées. Notons qu’il est toujours possible, même si ce n’est pas le cas pour les simulations présentées ci-dessous, d’éviter de simuler le spin-up en décomposant classiquement la vitesse  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b + \mathbf{u}^*$  où  $\mathbf{u}_b$  est la vitesse déduite de la fonction de courant ci-dessus : on résoud alors l’écart  $\mathbf{u}^*$  à l’écoulement de base et la force est alors remplacée dans les équations de Navier-Stokes par  $(\mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u}_b + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u}^*)$ . Afin de mieux cerner les conséquences de l’introduction de telles forces volumiques et de confirmer l’analogie avec une déformation elliptique, une analyse WKB a été menée dans les deux cas, ce qui permet d’établir l’expression analytique des taux de croissance. La figure 5 en montre quelques allures typiques.

Cette analyse permet notamment de constater qu’une instabilité non désirée est générée par la force au voisinage des parois, et ce, dans les deux cas. Notons cependant que le taux de croissance dans la partie

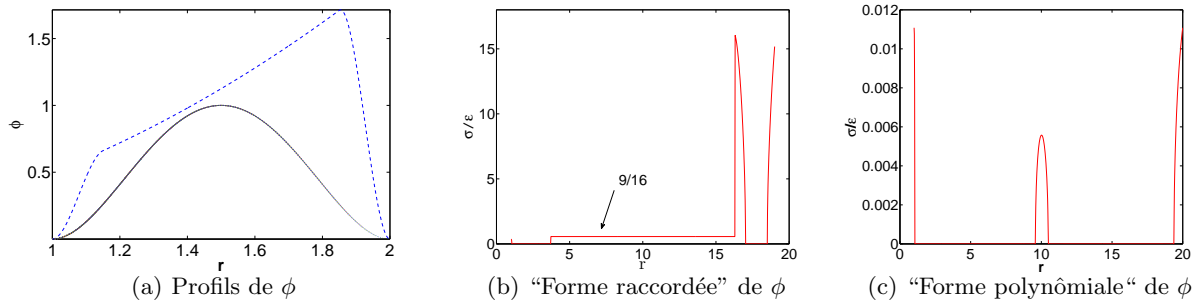
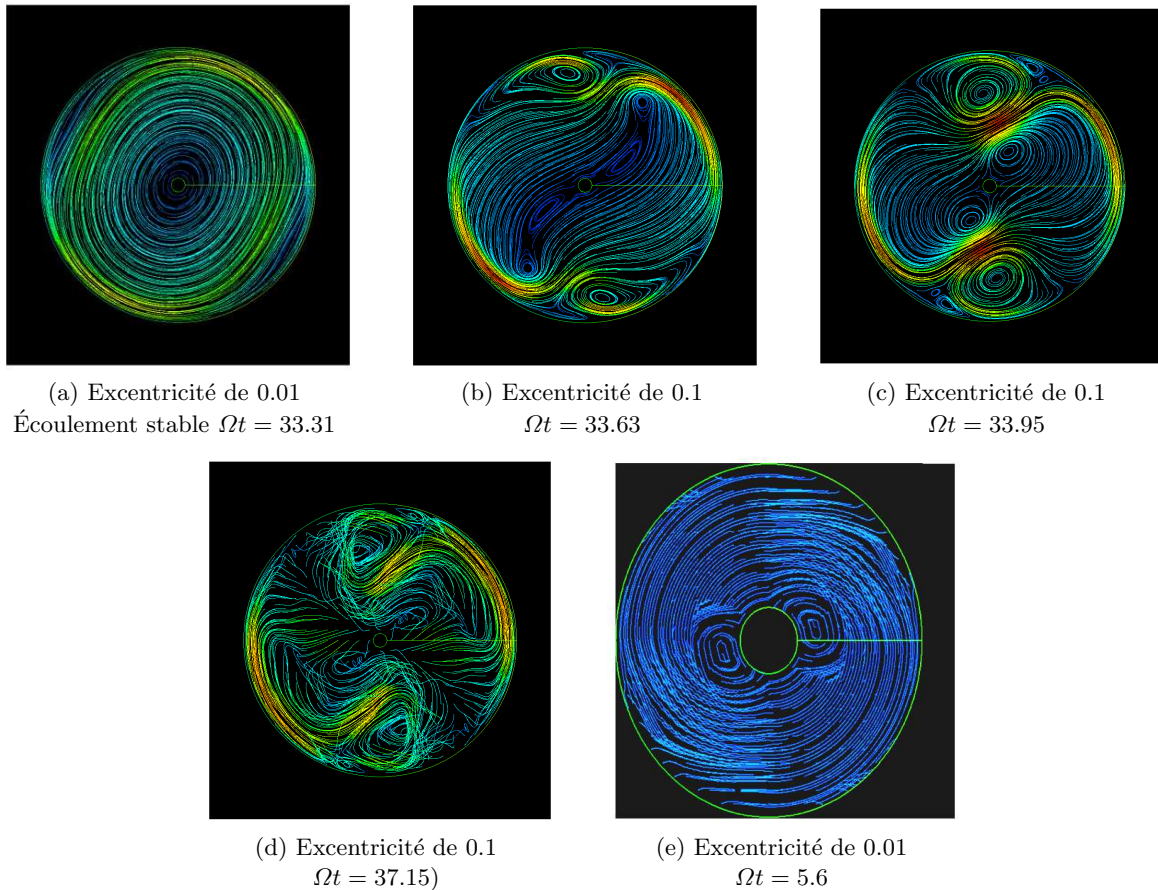


Fig. 5. Résultats WKB

centrale est naturellement constant, et égal à la prédiction théorique  $9/16$  dans le cas où  $\phi$  est raccordée. Ces résultats ont été confirmés par simulation numérique directe (code spectral Chebyshev-Fourier) sur une géométrie cylindrique annulaire. Le code utilise une grille de  $128^3$  points de collocation et respecte les conditions d'adhérence sur l'ensemble des parois. Dans le cas par exemple de  $\phi$  raccordée, les instabilités des bords sont prédites par l'analyse WKB sur les intervalles  $[1; 0.053]$ ,  $[17.14; 17.9]$  et  $[19.47; 20]$  le long du rayon. Les résultats de la simulation, effectuée pour un Reynolds de 500 sont donnés en figure 6.

Fig. 6. Aperçu des lignes de courant en fonction du temps ( $R_{int} = 1$ ,  $R_{ext} = 20$ ,  $H = 40$ , Forme raccordée)

La couche limite cylindrique ayant une épaisseur de  $\delta_E = 0.85$ , on peut s'attendre à ce que les instabilités les plus proches des bords soient atténuées par viscosité. Les simulations montrent qu'une fois l'écoulement établi (a), des vitesses verticales apparaissent en effet dans deux zones distinctes. L'instabilité de bord semble alors l'emporter sur l'instabilité elliptique et génère un l'écoulement désordonné qui n'est pas l'écoulement attendu. Le même processus peut être observé avec la forme polynômiale. Une solution semble donc être de confiner ces instabilités perturbatrices dans les couches visqueuses. Cependant, cette astuce semble difficile à utiliser avec  $\phi$  sous forme polynômiale car  $\delta_E$  décroît avec  $R_e$ , ce qui empêche, sauf cas fortuit, d'atteindre le Reynolds critique de l'instabilité elliptique. En revanche, la forme raccordée de  $\phi$  devrait permettre de confiner ces instabilités dans les couches visqueuses par le contrôle de la longueur de raccordement. Des premiers tests ont été conduits sur cette idée (Fig. 6e où le raccordement s'effectue sur une longueur de 0.11) et en montrent la faisabilité.

## 4 Conclusion

En conclusion, ces premiers résultats sur l'interaction entre instabilité elliptique et champ magnétique ouvre une piste prometteuse qui sera poursuivie aussi bien expérimentalement que numériquement. Des simulations numériques en géométrie cylindrique elliptique sont également menées à l'aide d'un code éléments finis afin notamment de permettre une validation de l'analogie entre force volumique et déformation elliptique.

## Références

1. G. SCHUBERT, J. ANDERSON, T. SPOHN & W. MCKINNON, Interior composition, structure and dynamics of the Galilean satellites Jupiter, in Jupiter, *The Planet, Satellites and Magnetosphere, Series : Cambridge Planetary Science (No. 1)* Edited by F. Bagenal, T. E. Dowling, W. B. McKinnon (2004).
2. D. J. STEVENSON, Planetary magnetic Fields, Earth Planet, *Science Letters*, **208**, 1-11, (2003).
3. A. TILGNER, Precession driven dynamos, *Physics of Fluids*, **17**, 034104, (2005).
4. R. R. KERSWELL & W. V. R. MALKUS, Tidal instability as the source for Io's magnetic signature, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 603-606, (1998).
5. M. G. KIVELSON, K. K. KHURANA, C. T. RUSSELL *et al.*, Magnetized or unmagnetized : Ambiguity persists following Galileo's encounters with Io in 1999 and 2000, *J. Geophys. Res. Space*, **106**, 26121-26135, (2001).
6. M. G. KIVELSON, J. WARNECKE, L. BENNETT *et al.*, Ganymede's magnetosphere : Magnetometer overview, *J. Geophys. Res. Planet.*, **103**, 19963-19972, (1998).
7. C. ELOY, P. LE GAL & S. LE DIZÈS, Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, **476**, 357-388, (2003).
8. C. ZIMMER, K. K. KHURANA & M. G. KIVELSON, Subsurface oceans on Europa and Callisto : Constraints from Galileo magnetometer observations, *Icarus*, **147**, 329-347, (2000).
9. L. LACAZE, W. HERREMAN, M. LE BARS, S. LE DIZÈS & P. LE GAL, Magnetic field induced by elliptical instability in a rotating spheroid, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **100** (4/5), 299-317 (2006).
10. W. HERREMAN, *Instabilités elliptiques sous champ magnétique & Dynamo d'ondes inertielles* Ph'D Thesis (2009).
11. U. R. CHRISTENSEN, J. AUBERT, P. CARDIN, E. DORMY, S. GIBBONS, G. A. GLATZMAIER, E. GROTE, Y. HONKURA, C. JONES, M. KONO, M. MATSUSHIMA, A. SAKURABA, F. TAKAHASHI, A. TILGNER, J. WICHT & K. ZHANG, A numerical dynamo benchmark, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **128** (1), 25-34 (2001).
12. I. RASPO, S. HUGUES, E. SERRE, A. RANDRIAMAMPANINA & P. BONToux, A spectral projection method for the simulation of complex three-dimensional rotating flows, *Computers & Fluids*, **31** (4-7), 745-767 (2002).

# Couplages de neurones de type Hindmarsh-Rose : de la synchronisation à l'émergence de propriétés

Nathalie Corson<sup>1</sup> & M. A. Aziz Alaoui<sup>2</sup>

Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (LMAH), Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon,  
BP540, 76058 Le Havre  
[nathalie.corson@univ-lehavre.fr](mailto:nathalie.corson@univ-lehavre.fr)

**Résumé.** Le modèle mathématique de Hodgkin-Huxley décrit le comportement d'un neurone en terme de circulation des principaux ions à travers la membrane de celui-ci. Le système différentiel lent-rapide de Hindmarsh-Rose est basé sur celui de Hodgkin-Huxley et modélise la circulation de l'information le long d'un neurone. Les interactions entre les neurones par l'intermédiaire des synapses peuvent être modélisées soit par une fonction de couplage linéaire (synapses électriques) soit par une fonction de couplage non-linéaire à seuil (synapses chimiques). Après une rapide étude numérique de la dynamique asymptotique d'un neurone, qui s'avère chaotique pour certaines valeurs de paramètres, nous cherchons numériquement la force de couplage nécessaire pour observer un phénomène de synchronisation entre les neurones. Ce travail a été effectué dans le cas d'un couplage linéaire puis dans le cas d'un couplage non-linéaire de plusieurs neurones. Chaque neurone est supposé couplé à tous les autres. Dans un premier temps, tous ces neurones sont identiques, puis nous modifions les paramètres des neurones afin que tous soient légèrement différents les uns des autres. Les interactions, linéaires ou non, entre les éléments, identiques ou non, de ce système font émerger des propriétés nouvelles en relation avec la force de couplage nécessaire pour faire synchroniser les  $n$  neurones. Ces propriétés émergentes sont données par des lois heuristiques caractéristiques d'une certaine notion de complexité.

**Abstract.** The Hodgkin-Huxley mathematical neuron model describes the neuron behaviour in terms of ionic kinetics across the membrane. The Hindmarsh-Rose differential slow-fast system, based on the Hodgkin-Huxley one, models the flux of information through the neuron. Interactions between neurons are possible thanks to synapses, which can be represented by a linear coupling function (electrical synapses) or by a nonlinear with threshold coupling function (chemical synapses). After a short presentation of the asymptotic dynamics of the Hindmarsh-Rose system, we numerically study the coupling strength which is necessary to observe synchronisation between neurons. This work has been done in both cases of linear coupling and of nonlinear coupling of several neurons. Each neuron is supposed to be connected to all the others. First, all the neurons are identical and then, we make the parameters vary so that all neurons are slightly different from one another. Interactions (linear or not) between the elements (identical or not) of this system give birth to some new properties related to the coupling strength necessary to have a synchronization phenomenon between  $n$  neurons. These emergent properties are given by heuristic laws which are specific to complex systems.

## 1 Introduction

En 1952, A.L. Hodgkin et A.F. Huxley décrivent la cinétique des mécanismes ioniques au sein d'un neurone par un système de quatre équations différentielles ordinaires autonomes [1,2]. En 1982, J.L. Hindmarsh et R.M. Rose ont simplifié ce modèle en un système à deux EDO [3]. Enfin, afin de se rapprocher du comportement réel d'un neurone, ils ont, deux années plus tard, ajouté une équation d'adaptation à leur premier modèle [4]. Cette dernière équation donne au système de Hindmarsh-Rose (*HR*) son caractère lent-rapide. Dans ce système,  $x$  correspond au potentiel de membrane, qui mesure la différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur du neurone,  $y$  décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux rapides, tandis que  $z$  décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux lents. Les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $d$  sont des constantes déterminées expérimentalement,  $I$  est le courant que l'on applique au neurone pour le stimuler,  $\epsilon$  représente la différence d'échelle de temps entre la dynamique rapide et la dynamique lente et  $x_c$  est la première coordonnée du point d'équilibre le plus à gauche du système de Hindmarsh-Rose à deux équations.

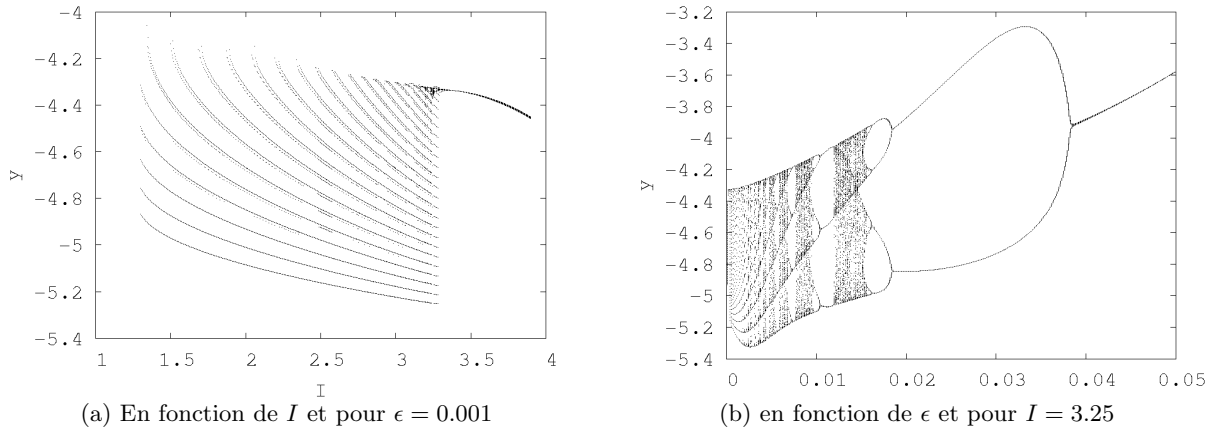
$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 - x^3 - z + I \\ \dot{y} = 1 - dx^2 - y \\ \dot{z} = \epsilon(b(x - x_c) - z) \end{cases} \quad (1)$$

$$a = 3, \quad b = 4, \quad d = 5, \quad x_c = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad (2)$$

Dans la partie suivante, nous présenterons quelques résultats concernant la dynamique asymptotique du système de Hindmarsh-Rose, en terme de diagrammes de bifurcations, d'applications de premier retour, mais également d'exposants de Lyapunov pour souligner le caractère chaotique de ce système pour certaines plages de valeurs de paramètres ainsi que son caractère périodique pour d'autres [5]. Le lecteur pourra par exemple se référer à [6] pour en savoir plus sur les oscillations en biologie, et à [7,8,9,10,11] pour en savoir plus sur les modèles en neuroscience. Dans [12], les auteurs présentent une méthode permettant d'appréhender la variété lente de *HR*. La dernière partie concerne la synchronisation et les propriétés émergentes qui découlent de l'étude de la force de couplage nécessaire pour faire synchroniser plusieurs neurones [13]. Le lecteur pourra de plus se référer à [14,15,16,17].

## 2 Dynamique asymptotique

Dans le système de Hindmarsh-Rose, deux paramètres semblent particulièrement intéressants. Tout d'abord le paramètre  $I$  puisqu'il représente le courant appliqué au neurone pour le stimuler et peut être expérimentalement modifié. Ensuite, le paramètre  $\epsilon$ , qui représente la différence d'échelle de temps entre la dynamique rapide et la dynamique lente d'un neurone et a ainsi un rôle très particulier dans ce système. Ce sont donc ces deux paramètres que nous avons utilisés comme paramètres de bifurcation.

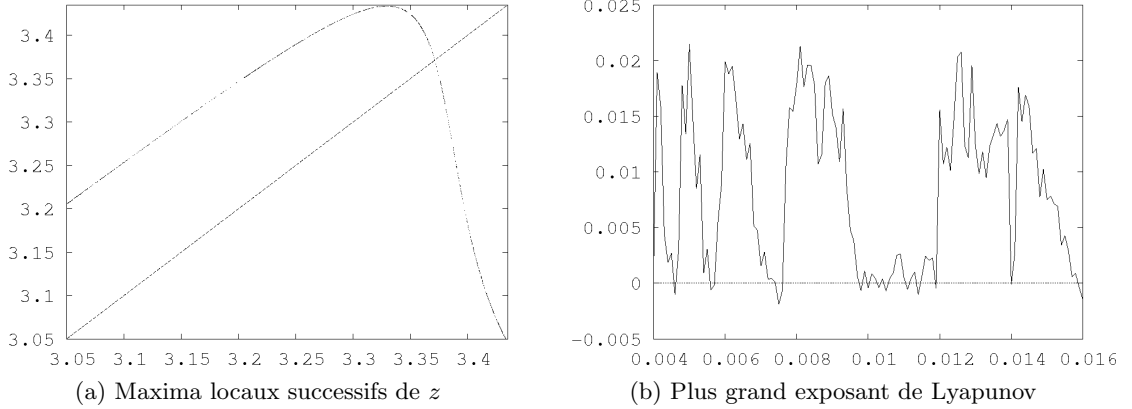


**Fig. 1.** Diagrammes de bifurcations du modèle *HR* avec les paramètres (2).

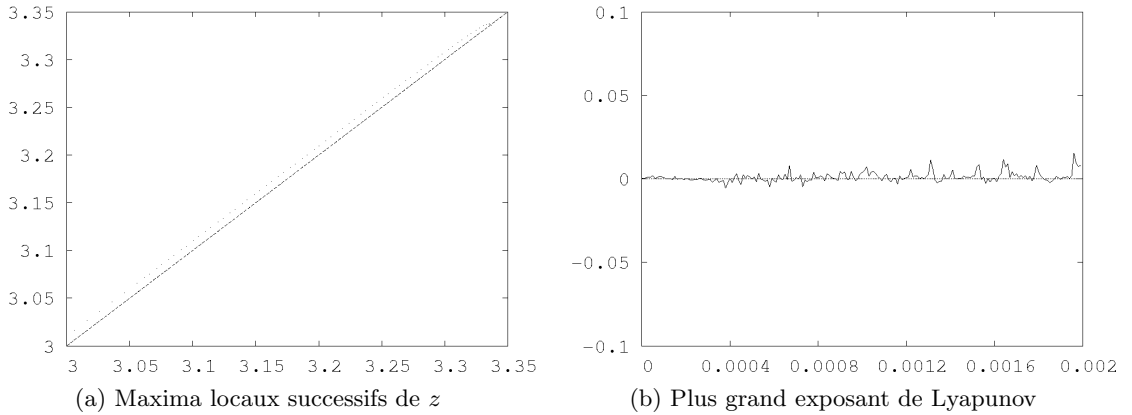
Pour certaines plages de paramètres, des fenêtres de chaos sont observées sur les diagrammes de bifurcations, ce qui est numériquement confirmé en traçant l'application de premier retour de Lorenz (maxima locaux successifs) et le plus grand exposant de Lyapunov. Ainsi, nous obtenons, pour certaines valeurs de paramètres, les caractéristiques dynamiques telles que celles présentées Fig. 2 sont obtenues. D'autres résultats intéressants sont donnés dans [18].

Cependant, pour d'autres valeurs de paramètres, le comportement d'un neurone *HR* n'est pas chaotique, comme nous pouvons l'observer sur les diagrammes de bifurcations et comme l'application de premier retour et le plus grand exposant de Lyapunov montrés à la figure 3 le confirment numériquement.





**Fig. 2.** Pour le système (1) avec les paramètres (2) et  $I = 3.25$ , on obtient : (a) Maxima locaux successifs en  $z$  (c'est-à-dire application de premier retour de Lorenz) pour  $\epsilon = 0.008$ . Nous observons une *application unimodale* qui est une signature numérique de la présence de chaos. (b) Le plus grand exposant de Lyapunov pour  $\epsilon \in [0.004; 0.016]$  est clairement positif.



**Fig. 3.** Pour le système (1) avec les paramètres (2) et  $I = 3.25$  on obtient : (a) Maxima locaux successifs en  $z$  (c'est-à-dire application de premier retour de Lorenz) pour  $\epsilon = 0.0005$ . L'application de Poincaré n'a pas la forme classique unimodale caractéristique du chaos pour ces paramètres. (b) Le plus grand exposant de Lyapunov pour  $\epsilon \in [0; 0.002]$ . Ainsi, pour  $\epsilon \approx 0.0005$ , le plus grand exposant de Lyapunov est très proche de zéro.

### 3 Synchronisation et propriétés émergentes

Dans cette partie, nous avons choisi de coupler plusieurs neurones de type *HR*. L'idée est de trouver la force de couplage minimale nécessaire pour que le comportement des neurones soit synchrone. Nous nous sommes placé dans le cas où chaque neurone est couplé à tous les autres. Plusieurs cas ont alors été numériquement étudiés. Dans un premier temps, tous les neurones sont identiques et le couplage linéaire puis le couplage non-linéaire ont été considérés. La même étude est ensuite effectuée en considérant des neurones dont tous les paramètres ont été légèrement modifiés.

Pour toute cette étude, le système de *HR* est réécrit de la façon suivante [19] :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 - x^3 - y - z \\ \dot{y} = (a + \alpha)x^2 - y \\ \dot{z} = \epsilon(bx + c - z) \end{cases} \quad (3)$$

Un modèle de réseau de  $n$  neurones de type *HR* couplés bidirectionnellement par leur première variable  $x_i$  est donné par,

$$\begin{cases} \dot{x}_i = ax_i^2 - x_i^3 + y_i - z_i - h(x_i, x_j), & i \neq j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \\ \dot{y}_i = (a + \alpha)x_i^2 - y_i \\ \dot{z}_i = \epsilon(bx_i + c - z_i) \end{cases} \quad (4)$$

Dans le cas d'un réseau de  $n$  neurones linéairement couplés, la fonction de couplage  $h$  est choisi de la façon suivante,

$$h(x_i, x_j) = k_n \sum_{j=1}^n c_{ij} \Gamma(x_j) \quad (5)$$

où le couplage synaptique  $\Gamma$  est une fonction linéaire,  $\Gamma(x_j) = x_i - x_j$ , for  $i = 1, 2, \dots, n$ , le paramètre  $k_n$  est la force de couplage et la matrice  $C_n = (c_{ij})$  est la matrice de connectivité  $n \times n$ ,

- $c_{ij} = 1$  si  $i$  et  $j$  sont connectés  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j$
- $c_{ij} = 0$  si  $i$  et  $j$  ne sont pas connectés.

Cette matrice  $C_n$  peut être symétrique ou non, de telle sorte que le couplage puisse être unidirectionnel ou bidirectionnel.

Dans le cas d'un réseau de  $n$  neurones couplés non-linéairement, la fonction de couplage  $h$  est donnée dans [19] et est la suivante,

$$h(x_i, x_j) = (x_i - V)k_n \sum_{j=1}^n c_{ij} \Gamma(x_j) \quad (6)$$

Dans cette fonction, le couplage synaptique  $\Gamma$  est une fonction non-linéaire à seuil, donnée par,

$$\Gamma(x_j) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x_j - \Theta))} \quad (7)$$

Comme dans le cas linéaire, le paramètre  $k_n$  est la force de couplage.

Dans cette partie, les paramètres sont fixés et valent

$$a = 2.8, \alpha = 1.6, c = 5, b = 9, \epsilon = 0.001V = 2, \lambda = 10 \text{ et } \Theta = -0.25.$$

Chacun des cas a été numériquement étudié de la façon suivante.

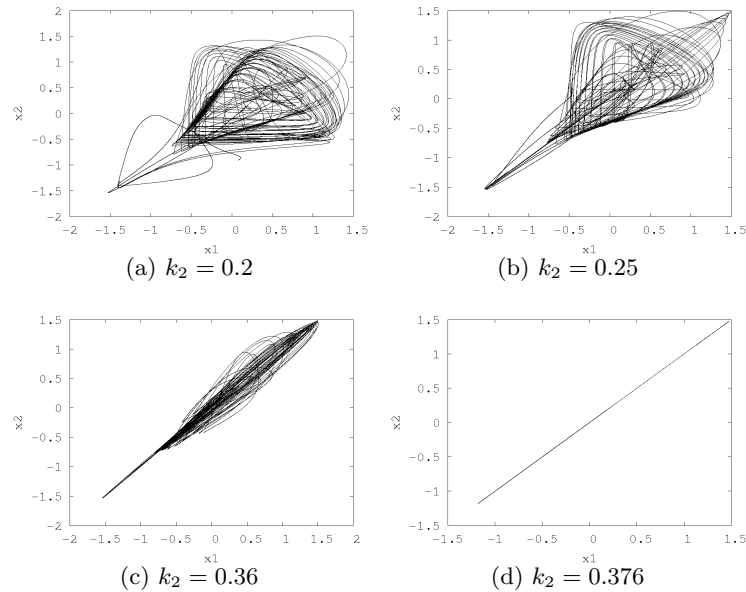
En relevant cette force de couplage minimum nécessaire pour observer numériquement la synchronisation de plusieurs neurones dans les différents cas étudiés, nous dégageons une loi heuristique de la forme

$$k_n = \frac{k_2}{p(n-1)}.$$

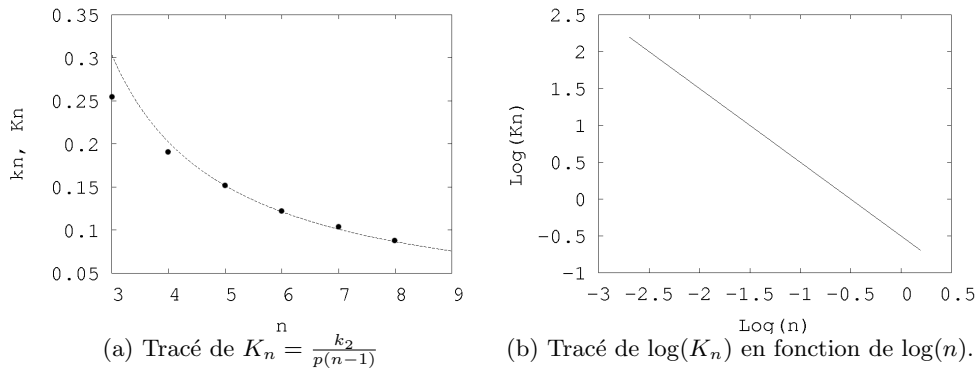
Le paramètre  $p$  n'est pas le même suivant que le couplage soit linéaire ou non, et suivant que les neurones soient identiques ou non, ainsi, nous obtenons numériquement les résultats présentés à la figure 5, dans laquelle  $p = 0.62$ .

## 4 Conclusion

Une analyse numérique précise du modèle de Hindmarsh-Rose a été réalisée. La dynamique chaotique a été discutée en utilisant différents outils numériques de dynamique non linéaire, tels que les diagrammes de bifurcations, les maxima locaux successifs ou encore les exposants de Lyapunov pour différentes plages de paramètres. Deux des paramètres du système *HR*, la différence d'échelle de temps entre la dynamique lente et la dynamique rapide,  $\epsilon$  et le courant appliqué au neurone pour le stimuler,  $I$ , ont été désignés



**Fig. 4.** Portraits de phase du système (4) pour  $n = 2$  couplés linéairement, montrant  $x_2$  en fonction de  $x_1$  pour les valeurs différentes forces de couplage  $k_2$ . Pour deux neurones couplés linéairement, le seuil de synchronisation est environ de  $k_2 = 0.376$ .



**Fig. 5.** Force de couplage minimum  $k_n$  nécessaire pour observer un comportement synchrone des  $n$  neurones en fonction du nombre  $n$  de neurones dans le réseau (points).

paramètres de bifurcation pour leur intérêt biologique.

L'émergence et la complexité font référence aux propriétés d'ordre supérieur et aux comportements d'un système qui découlent de la dynamique collective de des sous-systèmes le composant. En effet, ces propriétés ne sont pas directement déductibles de l'étude d'un sous-système constituant du système global. Les propriétés émergentes sont les propriétés d'un *tout* qui ne sont présentes dans aucune des parties constituant ce *tout*.

## Références

1. B. HILLE, *Ionic channels of excitable membranes* 2nd edition, Sinauer associates inc. (1992).
2. A. HODGKIN & A. HUXLEY, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *Journal of Physiology*, **117**, 500-544 (1952).

3. J. L. HINDMARSH & R. M. ROSE, A model of the nerve impulse using two first-order differential equations, *Nature*, **296**, 162-164 (1982).
4. J. L. HINDMARSH & R. M. ROSE, A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations, *Proceedings of the Royal Society of London B* **221**, 87-102 (1984).
5. N. CORSON & M.A. AZIZ ALAOUI Asymptotic dynamics of the slow-fast Hindmarsh-Rose neuronal model, *soumis*.
6. J.-P. FRANÇOISE *Oscillations en Biologie : Analyse qualitative et Modèles*, Collection Mathématiques et Applications SMAI Springer, Heidelberg (2005).
7. G. INNOCENTI, A. MORELLI, R. GENESIO & A. TORCINI, Dynamical phases of the Hindmarsh-Rose neuronal model : Studies of the transition from bursting to spiking chaos, *Chaos*, **17**, 043128 (2007).
8. E. M. IZHIKEVICH, *Dynamical systems in neuroscience — The geometry of excitability and bursting*, The MIT Press (2007).
9. E. MOSEKILDE, B. LADING, S. YANCHUK & Y. MAISTRENKO *Bifurcation structure of a model of bursting pancreatic cells*, *BIOSYSTEMS*, **63**, 3-13 (2001).
10. D. TERMAN Chaotic spikes arising from a model of bursting in excitable membranes, *SIAM JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS*, **51** (5), 1418-1450 (1991).
11. D. TERMAN The transition from bursting to continuous spiking in excitable membrane models, *Journal of Nonlinear Science*, **2**, 135-182 (1992).
12. J.-M. GINOUX & B. ROSSETTO, Slow manifold of a neuronal bursting model, in *Emergent Properties in Natural and Artificial Dynamical Systems, Understanding complex systems*, Springer, pp. 119-128 (2006).
13. N. CORSON & M.A. AZIZ ALAOUI, Complex emergent properties in synchronized neuronal oscillations, *soumis*.
14. M.A. AZIZ-ALAOUI, Synchronization of chaos, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, **5**, 213-226 (2006).
15. M.A. AZIZ-ALAOUI Complex emergent properties and chaos (De) synchronization, in *Emergent Properties in Natural and Artificial Dynamical Systems, Understanding complex systems*, Springer, pp. 129-147 (2006). (2006).
16. S. BOCCALETTI, J. KURTHS, G. OSIPOV, D. VALLADARES & C. ZHOU, The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports*, **366**, 1-101 (2002).
17. A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM & J. KURTHS, *Synchronization, A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series, **12** (2001).
18. J.-M. GONZALEZ-MIRANDA, Complex bifurcation structures in the Hindmarsh-Rose neuron model, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **17** (9), 3071-3083 (2007).
19. I. BELYKH, E. LANGE & M. HASLER, Synchronization of Bursting Neurons : What matters in the Network Topology, *Physical Review Letters*, **94** (18), 188101 (2005).

# Transition de phases hors-d'équilibre dans le Laser à Electrons Libres

P. De Buyl<sup>1</sup>, R. Bachelard<sup>2</sup>, M.-E. Couprie<sup>2</sup>, G. De Ninno<sup>3</sup>, & D. Fanelli<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Interdisciplinary Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles (U.L.B.), Campus Plaine – CP 231, Blvd du Triomphe, B-1050 Brussels, Belgium

<sup>2</sup> Synchrotron SOLEIL, L'Orme des Merisiers, Saint-Aubin - BP 48, F-91192 Gif-sur-Yvette cedex, France

<sup>3</sup> Phys. Dept., Nova Goriva Univ., Nova Gorica (Slovenia)  
Sincrotrone Trieste, 34012 Trieste, Italy

<sup>4</sup> Centro interdipartimentale per lo Studio delle Dinamiche Complesse (CSDC) and INFN and Dipartimento di Energetica "Sergio Stecco", Università di Firenze, via s. Marta 3, 50139 Firenze, Italia

pdebuyl @ulb.ac.be

**Résumé.** Les Lasers à Electrons Libres (LEL) sont des sources de lumière puissantes dans les gammes X à UV. La dynamique d'un LEL dans le régime *Self-Amplified Spontaneous Emission* montre des régimes de fort gain et de faible gain dans lesquels la valeur de l'intensité atteinte ne correspond pas à celle prédite par l'équilibre de Boltzmann. Le LEL est décrit par les interactions onde-particules entre les électrons et l'onde lumineuse générée. La dynamique présente des Etats Quasi-Stationnaires : ce sont des stades intermédiaires dans lesquels le système se retrouve bloqué. Ils sont dûs à la nature de longue portée de l'interaction. Une description du LEL par l'équation de Vlasov, dans la limite d'un grand nombre d'électrons, nous permet d'utiliser deux outils : la théorie de Lynden-Bell, basée sur une maximisation de l'entropie et des simulations numériques de l'équation de Vlasov. Dans cet article, nous interprétons les régimes du LEL en fonction des prédictions de la théorie de Lynden-Bell. Nous trouvons deux solutions correspondant aux deux régimes du LEL, qui constituent des états quasi-stationnaires de la dynamique. L'issue d'une condition initiale est donnée par une analyse simulatoire de ces solutions.

**Abstract.** Free Electrons Lasers (FEL) are powerful light source, in the X to UV range. The dynamics, in the *Self-Amplified Spontaneous Emission*, shows high or low gain regimes in which the obtained laser intensity does not reach that predicted by Boltzmann equilibrium. The FEL is described by wave-particles interactions between the electrons and the generated light-wave. The system finds itself trapped in Quasi-Stationary States : these are intermediate stages in which the system stays for a long time ; they are caused by the long-range nature of the interaction. A description of the FEL via a Vlasov equation permits the use of two tools : Lynden-Bell's theory, based on a maximisation of the entropy et numerical simulations of Vlasov's equation. In this article, we interpret the FEL dynamical regimes thanks to the predictions of Lynden-Bell's theory. We find two solutions corresponding to the two regimes of the FEL, which can be seen as Quasi-Stationary States of the dynamics. The outcome of an initial condition is given by a simulational analysis of the two solutions.

## 1 Introduction

Parmi les différentes sources de lumière pour explorer la matière, les Lasers à Electrons Libres (LEL) sont des outils particulièrement intéressants. Ils forment en effet des sources X-UV puissantes à grande cohérence spectrale et temporelle [1], et sont à même de pouvoir, à terme, filmer des dynamiques atomiques [2]. L'émission laser est obtenue en injectant un paquet d'électrons ultra-relativistes dans un onduleur, c'est-à-dire une série d'aimants alternés qui donne une trajectoire sinusoidale aux particules chargées : celles-ci produisent alors une émission synchrotron qui, grâce à un mécanisme d'instabilité, va devenir cohérente et permettre la production d'une onde laser puissante. Dans la configuration dite de *Self-Amplified Spontaneous Emission* [3], l'onde lumineuse est amplifiée de plusieurs ordres de grandeur (régime de fort gain), à partir d'un simple bruit électronique, avant d'atteindre une saturation. L'onde oscille alors sur des temps très longs, mais autour d'une valeur moyenne différente de celle prédite par l'équilibre de Boltzmann.

Des travaux récents ont souligné l'importance de la longue portée de l'interaction : après un premier régime transitoire, ces systèmes se retrouvent génériquement piégés dans des états métastables nommés *Etats Quasi-Stationnaires* (EQS), pour des temps divergents avec le nombre de corps en interaction [5] : telle est la nature du régime saturé du LEL. Ces systèmes ont aussi la propriété de garder dans l'EQS la mémoire de l'état initial du système, mémoire en grande partie perdue lorsque l'équilibre thermodynamique est finalement atteint : la phénoménologie des EQS n'en est que plus riche, et a notamment conduit à prédire l'existence de transitions de phase du premier et second ordre *hors d'équilibre*, ainsi que d'un point tri-critique pour de tels systèmes [4].

Dans cet article, nous caractérisons la transition de phase dans le LEL, à l'aide de deux approches, l'une analytique et l'autre numérique. Les états métastables saturés du LEL sont associés à une entropie hors d'équilibre, dite de Lynden-Bell ; cela nous permet de distinguer le régime de fort gain d'un régime à faible gain, en fonction de l'agrégation initiale du paquet d'électrons et de son énergie. Puis nous confrontons cette approche aux résultats de simulations d'un code Vlasov qui permettent d'interpréter les différents régimes dynamiques.

## 2 Contexte théorique

### 2.1 Dynamique

L'interaction d'un paquet d'électrons ultra-relativistes avec une onde électro-magnétique au sein d'un champ magnétique externe, ainsi qu'elle a lieu dans un Laser à Electrons Libres, est fidèlement reproduite par le hamiltonien suivant [6,5] :

$$H = \iint d\theta dp f_{\theta,p} \frac{p^2}{2} - i \iint d\theta dp f_{\theta,p} (ae^{i\theta} - a^* e^{-i\theta}), \quad (1)$$

où  $a$  représente l'amplitude complexe de l'onde et  $f_{\theta,p}$  la distribution des particules dans l'espace des phases ( $\theta$  est la position longitudinale normalisée des particules,  $p$  leur moment normalisé). Dans un LEL, lorsqu'un paquet d'électrons à faible dispersion en énergie est injecté à l'énergie résonante, un mécanisme d'instabilité permet aux particules de s'organiser collectivement et ces dernières émettent de manière cohérente : on observe alors une forte croissance de l'onde (même à partir d'un niveau de bruit), avant d'atteindre un régime saturé métastable, typique des systèmes à interactions à longue portée [7]. L'intensité oscille alors autour d'une valeur moyenne  $\bar{I}$ . Par contre, lorsque la dispersion en énergie du paquet est trop élevée, les électrons ne sont pas capables de s'organiser collectivement, et l'intensité de l'onde oscille à un niveau très faible. La transition entre ces deux régimes métastables dépend non seulement de la dispersion en énergie du paquet d'électrons, mais aussi de sa taille (longitudinale) initiale. Ceci traduit le fait que les EQS dépendent d'une part de l'énergie du système, mais aussi des autres caractéristiques macroscopiques initiales du système, contrairement à l'équilibre thermodynamique. Cet aspect des interactions à longue portée rend le diagramme de transition de phase hors d'équilibre d'autant plus complexe, puisqu'il dépendra non seulement de l'énergie du système, mais aussi d'autres caractéristiques des conditions initiales [4].

Par la suite, nous nous concentrons sur des conditions initiales particulières : l'onde est initialement à un niveau de bruit, tandis que le paquet d'électrons est homogènement distribué ("water-bag" (WB)) dans le rectangle de l'espace des phases  $(\theta, p) \in [-\alpha; \alpha] \times [-\Delta p; \Delta p]$ . Le système est alors initialement caractérisé par l'agrégation initiale du paquet d'électrons  $b_0 = \iint d\theta dp f_0 e^{-i\theta} = \sin \alpha / \alpha$ , ainsi que son énergie cinétique  $U = \iint d\theta dp f_0 p^2 / 2 = \Delta p^2 / 6$ . Dans le cadre du LEL, une transition existe entre le régime de fort gain et celui, lorsque le paquet d'électrons est excessivement chauffé, où le gain est très faible [8] : dans ce dernier cas, la cohérence de l'émission ne se développe pas, et l'amplification de l'onde n'a pas lieu. L'onde se met à osciller à un niveau très faible.

### 2.2 Entropie de Lynden-Bell

Afin de prédire le résultat de l'évolution sans collision de systèmes gravitationnels, régie par une équation de Vlasov, Lynden-Bell a développé une théorie basée sur la maximisation d'une entropie de

type fermionique [9]. Cette méthode fournit d'excellentes prédictions pour le système Hamiltonian Mean-Field [4], ainsi que dans la prédiction de l'intensité saturée du LEL [5,10,11].

Nous utilisons ici cette théorie afin de comprendre les différents régimes du LEL : fort gain et faible gain. L'entropie de Lynden-Bell peut, lorsque la distribution initiale de particules est de type WB ( $f = 0$  ou  $f_0$ ), être écrite de la façon suivante [9,5] :

$$s(\bar{f}) = - \int dp d\theta \left[ \frac{\bar{f}}{f_0} \ln \frac{f}{f_0} + \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0}\right) \ln \left(1 - \frac{\bar{f}}{f_0}\right) \right] \quad (2)$$

ce qui se traduit, lorsqu'on rajoute les contraintes sur la conservation de la masse, l'énergie  $U$  et la quantité de mouvement, par le système suivant :

$$\begin{aligned} f_0 \frac{x}{\sqrt{\beta}} \int d\theta \zeta F_0(\zeta x) &= 1 \\ f_0 \frac{x}{\sqrt{\beta}} \int d\theta \sin \theta \zeta F_0(\zeta x) &= A^3 \\ f_0 \frac{x}{2\beta^{1.5}} \int \zeta F_2(\zeta x) &= U + \frac{3}{2} A^4 \end{aligned} \quad (3)$$

où  $x = \exp(-2A\beta \sin \theta)$ ,  $F_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}} dv}{1+y e^{-\frac{v^2}{2}}}$  et  $F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv}{1+y e^{-\frac{v^2}{2}}}$ .  $\beta$  et  $x$  sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux quantités citées ci-dessus. Le système d'équations est résolu numériquement par la méthode de Newton-Raphson. La valeur obtenue pour  $\bar{I} = A^2$  est une estimation de l'intensité du laser à saturation et  $f_{\theta,p}$  est alors donné en fonction de  $\beta$  et  $x$  :

$$f(\theta, p) = f_0 \frac{1}{1 + x e^{\beta(p^2/2 + 2A \sin \theta + A^2 p + A^4/2)}}. \quad (4)$$

On obtient comme prédiction de l'évolution d'une condition initiale de type WB deux solutions de (3) : LB0 à intensité nulle et LBA à intensité non-nulle. Le choix entre LB0 et LBA se fait de façon dynamique, et est expliqué dans la section 2.3.

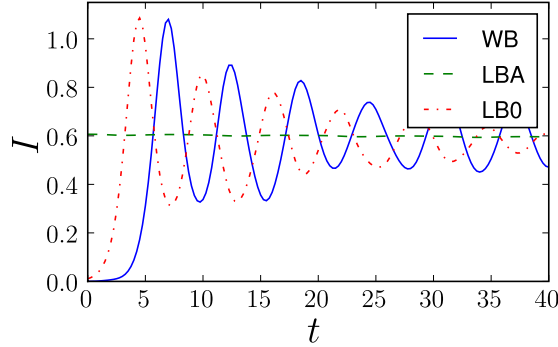
### 2.3 Simulations de Vlasov

On peut décrire la dynamique du système (1) par un système d'équations de Vlasov-ondes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -p \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2(A_x \cos \theta - A_y \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial A_x}{\partial t} &= -\delta A_y + \int d\theta dp f \cos \theta \\ \frac{\partial A_y}{\partial t} &= \delta A_x + \int d\theta dp f \sin \theta \end{aligned} \quad (5)$$

Ce système peut être résolu numériquement sur une grille de calcul représentant la fonction  $f_{\theta,p}$ . Nous utilisons la méthode semi-Lagrangienne [12], en effectuant l'interpolation par splines cubiques [13], pour intégrer numériquement le système (5). L'approche de Vlasov pour la dynamique élimine certains effets liés au nombre fini de particules tels que la granularité, ou les fluctuations liées à la génération de distributions aléatoires [5,14].

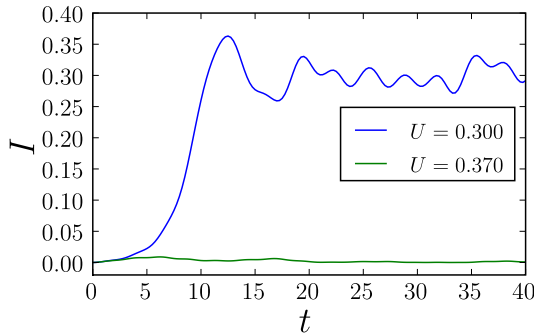
Nous allons nous servir de différentes conditions initiales : la condition initiale WB, telle que décrite à la section 2.1, et les solutions LB0 et LBA de l'approche de Lynden-Bell. Cette dernière étape permet de statuer sur la stabilité de ces solutions : dans les situations où LB0 est stable, la simulation est "bloquée" dans cet état ; lorsque LB0 est instable, la dynamique amène le système à proximité de la solution LBA, qui est stable pour toutes les valeurs des paramètres  $b_0$  et  $U$ . Pour  $b_0 \lesssim 0.5$ , la condition initiale WB et LB0 (lorsqu'elle est instable) donnent lieu à la même valeur de l'intensité en saturation  $\bar{I}$  (voir Fig. 1). Il est alors possible de choisir entre LB0 et LBA, l'intensité à saturation étant donnée par la solution LBA.



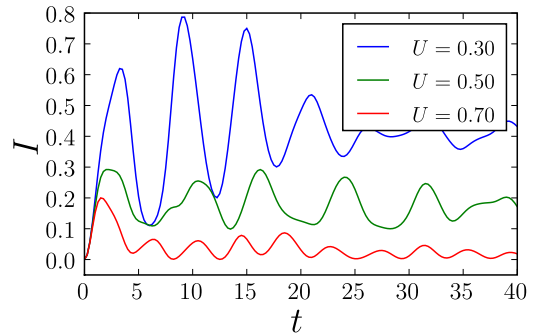
**Fig. 1.** L'intensité  $I$  en fonction du temps, pour les trois conditions initiales WB, LB0 et LBA, pour  $b_0 = 0.05, \epsilon = 0.10$

### 3 Résultats

Pour de faibles valeurs de l'agrégation ( $b_0 \lesssim 0.1$ ), les simulations se comportent comme suit : en variant l'énergie, le régime passe brusquement de valeurs de  $\bar{I}$  de l'ordre de 1 à des valeurs proches de 0. Pour des valeurs plus élevées, la transition entre les régimes est moins marquée.



**Fig. 2.** L'évolution de  $I$  pour deux simulations :  $b_0 = 0.05$  et  $U = 0.3$  et  $0.37$



**Fig. 3.** L'évolution de  $I$  pour deux simulations :  $b_0 = 0.50$  et  $U = 0.3, 0.50$  and  $0.70$

La valeur de saturation  $\bar{I}$  atteinte, lorsque la condition initiale se déstabilise, est comparée avec les solutions LB0 et LBA (Fig. 1). Nous avons pour cette condition initiale ( $b_0 = 0.05$  et  $U = 0.1$ ) confirmation que :

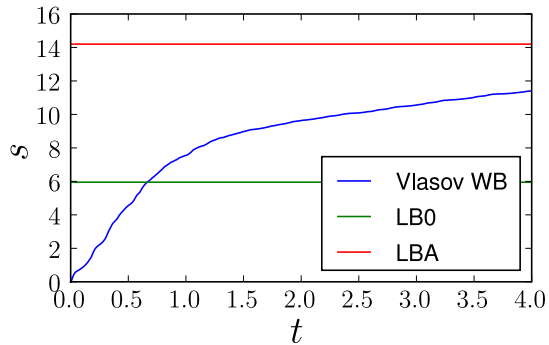
- La valeur de  $\bar{I}$  prédite par la théorie de Lynden-Bell est proche de celle atteinte dans la simulation WB.
- La stabilité de LB0 permet de déterminer si une condition initiale WB donne lieu à  $\bar{I} \approx 0$  ou au contraire  $\bar{I} > 0$ .

La dynamique du LEL évolue vers la solution LB0 tant que LB0 est stable. Dans le cas contraire, le LEL approche la solution LBA. Cette hypothèse est accréditée par l'observation de l'évolution de  $s$ , l'entropie de Lynden-Bell, dans les simulations reportées en Figs. 4 et 5.

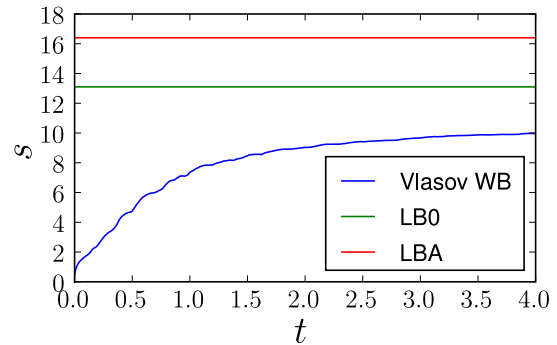
### 4 Conclusion

Nous avons caractérisé la transition de phase hors d'équilibre présente dans le LEL via la méthode de Lynden-Bell couplée à des simulations numériques de l'équation de Vlasov. Nous avons mis en évidence l'importance du concept des EQS qui sont susceptibles de bloquer l'évolution du LEL vers





**Fig. 4.** Evolution de  $s$  dans la situation où LB0 est instable.  $b_0 = 0.2$  et  $U = 0.1$ . Les valeurs de  $s_{LB0}$  et  $s_{LBA}$  sont indiquées pour référence.



**Fig. 5.** Evolution de  $s$  dans la situation où LB0 est stable.  $b_0 = 0.2$  et  $U = 0.5$ . Les valeurs de  $s_{LB0}$  et  $s_{LBA}$  sont indiquées pour référence.

l'équilibre, et interprétons cette évolution en terme de nos prédictions. Nous avons également constaté que le système, à partir d'une condition initiale WB se rapproche des solutions prédites par la théorie de Lynden-Bell. Concluons que l'observation expérimentale d'une transition de phase hors-d'équilibre, d'états quasi-stationnaires, et a fortiori d'un point tri-critique hors d'équilibre tel que rencontré dans le modèle Hamiltonian Mean-Field, reste un des défis actuels : dans ce contexte, le Laser à Electrons Libres est sans doute un des meilleurs candidats pour observer ces spécificités des interactions à longue portée.

## Références

1. T. SHINTAKE *et al.*, *Nature Photonics*, **2**, 555 (2008).
2. C. PELLEGRINI, *Nature*, **455**, 297 (2008).
3. R. BONIFACIO, C. PELLEGRINI & L. NARDUCCI, *Opt. Commun.*, **50**, 373 (1984) — R. BRINKMANN, in Proceedings of the FEL Conference (2006).
4. A. ANTONIAZZI, D. FANELLI, S. RUFFO & Y. Y. YAMAGUCHI, *Physical Review Letters*, **99**, 040601 (2007).
5. J. BARRÉ, T. DAUXOIS, G. DE NINNO, D. FANELLI & S. RUFFO, *Physical Review E*, **69**, 045501(R) (2004).
6. BONIFACIO *et al.*, *Riv. Nuovo Cimento*, **13**, 1 (1990).
7. T. DAUXOIS *et al.* (Eds.), Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions, *Lecture Notes in Physics*, **602**, Springer, (2002) — A. CAMPA *et al.* (Eds.), Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions : Theory and Experiments, *AIP Conference Proceedings*, **970** (2008).
8. M.-C. FIRPO & Y. ELSKENS, *Physical Review Letters*, **84**, 3318 (2000).
9. D. LYNDEN-BELL, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **136**, 101 (1967).
10. F. CURBIS, A. ANTONIAZZI, G. DE NINNO & D. FANELLI, *European Physical Journal B*, **59**, 527 (2007).
11. P. DE BUYL, D. FANELLI, R. BACHELARD & G. DE NINNO, arXiv :0902.0712v1 (2009).
12. E. SONNENDRÜCKER, J. ROCHE, P. BERTRAND & A. GHIZZO. The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of Vlasov Equations, *Technical Report*, **3393**, INRIA, Mars 1998.
13. W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING & B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2nd edition, (1992).
14. A. ANTONIAZZI, F. CALIFANO, D. FANELLI & S. RUFFO, *Physical Review Letters*, **98**, 150602 (2007).



# Instabilité de Rayleigh–Taylor d’un film mince visqueux

Laurent Duchemin & Michael Le Bars

IRPHE – UMR 6594, Technopôle de Château-Gombert  
49, rue Joliot Curie - B.P. 146 13384 Marseille Cedex 13  
duchemin@irphe.univ-mrs.fr

**Résumé.** Lorsqu’on applique à un film liquide, en contact avec un solide, une force volumique constante dirigée du fluide vers l’extérieur, l’interface se déstabilise linéairement (instabilité de Rayleigh–Taylor) [2,3], puis on voit apparaître un jet qui peut éventuellement se rompre sous l’effet de la tension de surface (instabilité de Rayleigh–Plateau) [4]. Cette étude numérique concerne le développement non linéaire du jet, dans le cas d’un fluide très visqueux fortement accéléré, et en particulier l’évolution temporelle de la goutte formée à son extrémité.

**Abstract.** When a liquid film on a solid substrate is subject to a constant body force directed from the fluid to the exterior, the interface undergoes the classical Rayleigh–Taylor instability [2,3], then a thin jet appears, which can eventually break under the effect of surface tension (Rayleigh–Plateau instability) [4]. This numerical study deals with the long-time non-linear evolution of the jet. With the help of an axi-symmetric Navier–Stokes code, which accurately includes free surfaces, we have computed the film destabilization, from the linear regime to the non-linear one.

## 1 Introduction

L’objectif de ce travail est l’étude approfondie de l’évolution non-linéaire des jets visqueux accélérés. Cette étude présente un intérêt fondamental. En effet, si le pincement de jets peu visqueux est désormais bien compris, il n’existe pas encore d’explication satisfaisante de l’absence de pincement pour des fluides très visqueux comme le miel. En d’autres termes, l’effet de la viscosité sur la déstabilisation des jets n’est pas encore quantifié. Ce sujet présente aussi un intérêt quant à la compréhension de certains écoulements industriels (jets d’encre) et géophysiques. Parmi ces derniers, les cheveux de Pelé sont un exemple intéressant [1]. Ces fibres de lave solidifiée, de plusieurs mètres de long, recueillies près de certains volcans, se forment par expulsion violente de gouttes de laves. Ces gouttes entraînent derrière elles un fil pouvant atteindre un diamètre de quelques centaines de microns avant de se solidifier. La raison pour laquelle ces jets ne se déstabilisent pas pour donner naissance à des gouttes avant la solidification n’est pas connue.

Lorsqu’on applique à un film liquide, en contact avec un solide, une force volumique constante dirigée du fluide vers l’extérieur, l’interface se déstabilise linéairement (instabilité de Rayleigh–Taylor) [2,3], puis on voit apparaître un jet qui peut éventuellement se rompre sous l’effet de la tension de surface (instabilité de Rayleigh–Plateau) [4]. Cette étude numérique concerne le développement du jet aux temps longs. A l’aide d’un code de résolution des équations de Navier–Stokes axi-symétriques [5], prenant en compte la présence d’une surface libre, nous avons simulé la déstabilisation de la surface libre, du régime linéaire au régime fortement non-linéaire. Bien que préliminaires, ces résultats mettent en évidence plusieurs régimes d’évolution du jet, et devraient permettre d’isoler différents types de déstabilisation.

## 2 Analyse de stabilité linéaire

On considère une couche de fluide d’épaisseur  $h_0$  (prise égale à 1 mm pour tous les calculs présentés), de masse volumique  $\rho$ , de viscosité cinématique  $\nu$ , de tension de surface  $\gamma$ , et soumise à une densité de force volumique  $g$  constante. Soient  $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$  la longueur capillaire et  $l_\nu = (\nu^2/g)^{1/3}$  la longueur

visqueuse ; on définit le nombre d'onde  $k$  adimensionné par  $l_c^{-1}$ , le taux de croissance  $\omega$  adimensionné par  $\sqrt{g/l_c}$ , et les grandeurs suivantes :

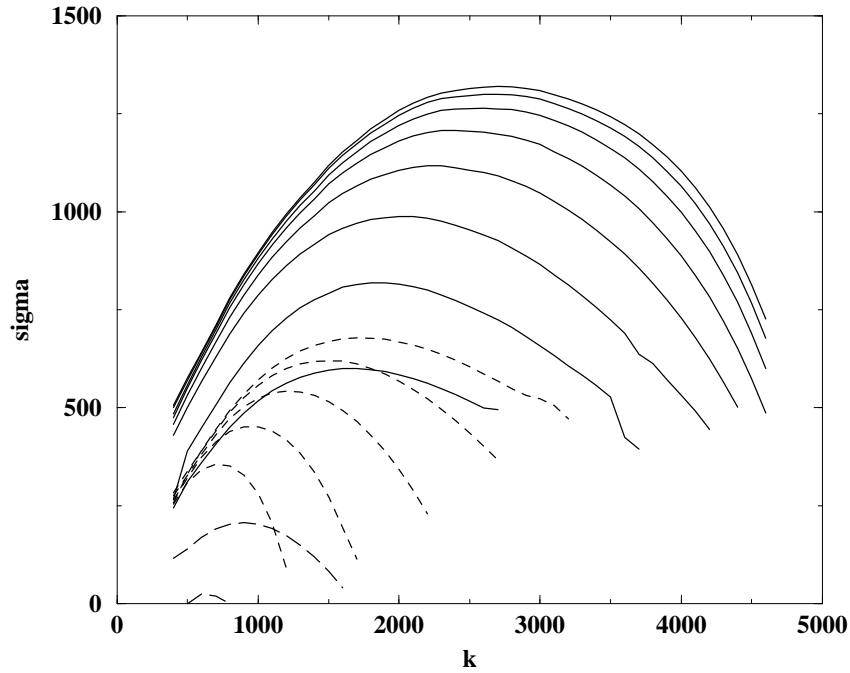
$$b = \left(\frac{l_c}{l_\nu}\right)^{3/2} \quad \alpha = \frac{h_0}{l_c} \quad S = \sqrt{k^2 + \omega b}$$

Une étude de stabilité linéaire générale (à deux dimensions) donne la relation de dispersion suivante :

$$kb^2(1 - k^2)(k \tanh(\alpha S) - S \tanh(\alpha k)) = \frac{4k^2 S(\omega b + 2k^2)}{\cosh(\alpha k) \cosh(\alpha S)} \\ + k \tanh(\alpha S) \tanh(\alpha k) (4k^2 S^2 + (\omega b + 2k^2)^2) - S (4k^2 + (\omega b + 2k^2)^2)$$

Cette relation nous informe notamment de la coupure systématique pour  $k = 1$ , c'est-à-dire pour une longueur d'onde égale à la longueur capillaire  $l_c$ . En outre, elle permet de mettre en évidence des régimes tout à fait différents pour  $k \ll 1$  : en diminuant le rapport  $h_0/l_\nu$ , on passe continûment d'un régime en  $\sqrt{gk}$  à un régime en  $k^2$ , ce qui implique qu'il doit exister un régime linéaire en  $k$  pour  $k \ll 1$ .

La figure 1 représente les taux de croissance obtenus grâce au code Navier-Stokes axi-symétrique [5], pour différentes valeurs de  $\nu$ ,  $\gamma$  et  $g$ . La relation de dispersion, quant à elle, donne des courbes de croissance en bon accord qualitatif avec les résultats numériques, mais une étude de stabilité axi-symétrique reste à faire pour tester quantitativement la validité du code numérique lors de la croissance exponentielle.

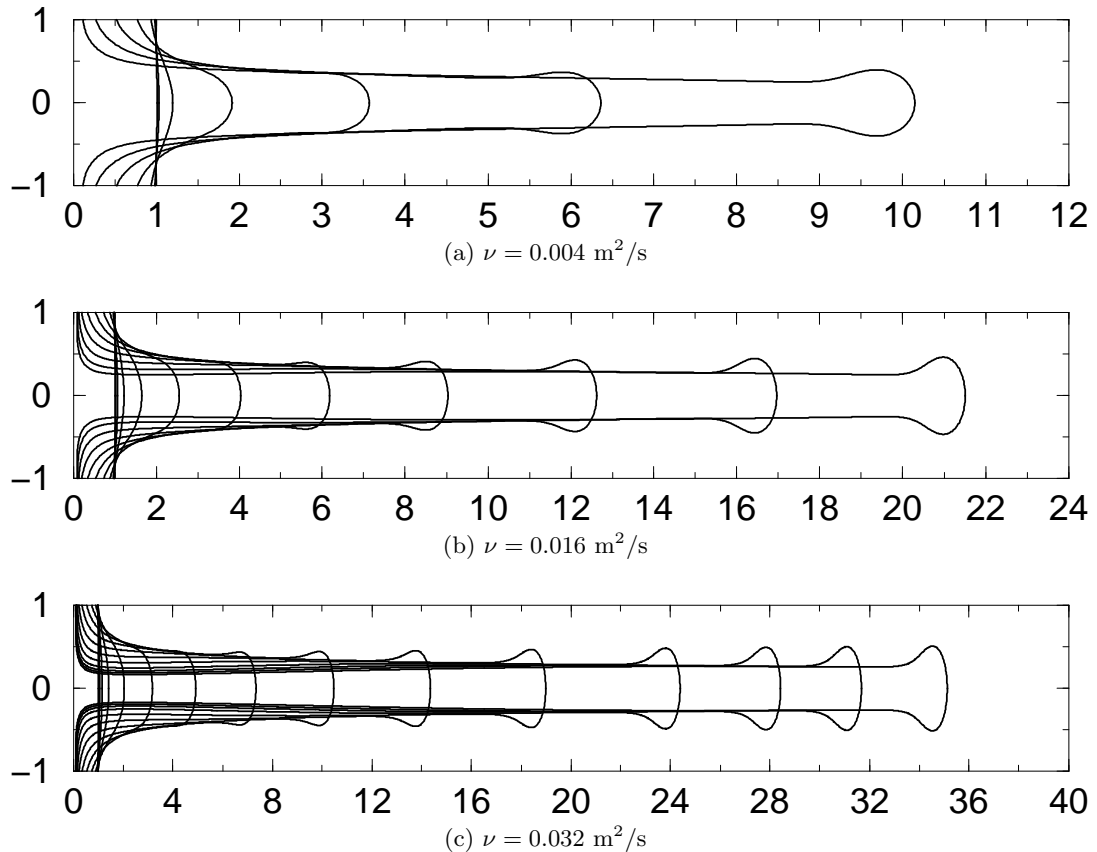


**Fig. 1.** Taux de croissance de l'instabilité en fonction du nombre d'onde pour différentes valeurs de  $\nu$ ,  $\gamma$  et  $g$  : (de haut en bas) **Traits pleins** :  $\nu = 10^{-6}, 2 \times 10^{-6}, 4 \times 10^{-6}, 8 \times 10^{-6}, 1.6 \times 10^{-5}, 3.2 \times 10^{-5}, 6.4 \times 10^{-5}, 1.28 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , **Pointillés** :  $\gamma = 0.02, 0.04, 0.08, 0.16, 0.32 \text{ N/m}$ , **Pointillés longs** :  $g = 750, 75, 7.5 \text{ m/s}^2$ . Les valeurs des deux paramètres fixés sont parmi :  $\nu = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\gamma = 0.02 \text{ N/m}$ , et  $g = 750 \text{ m/s}^2$ .

En utilisant systématiquement le nombre d'onde correspondant au taux de croissance maximum obtenu aux temps courts, nous avons effectué des simulations longues, pour différentes valeurs de  $\nu$  et  $\gamma$ , afin d'observer l'évolution du jet aux temps longs.

### 3 Evolution du jet

Après la phase de croissance exponentielle, un jet se développe et une goutte apparaît à son extrémité sous l’effet de la tension de surface. La figure 2 représente trois régimes différents observés, pour trois valeurs de la viscosité.



**Fig. 2.** Profils successifs de la surface libre, pour trois valeurs de la viscosité  $\nu$ . Par ailleurs, on a choisi  $\gamma = 0.02$  N/m et  $g = 750$  m/s<sup>2</sup>. Les axes sont gradués en millimètres ; seule la première figure possède la même échelle en abscisse et en ordonnée. Un pas de temps adaptatif a été utilisé ; le temps entre deux profils successifs n’est pas constant.

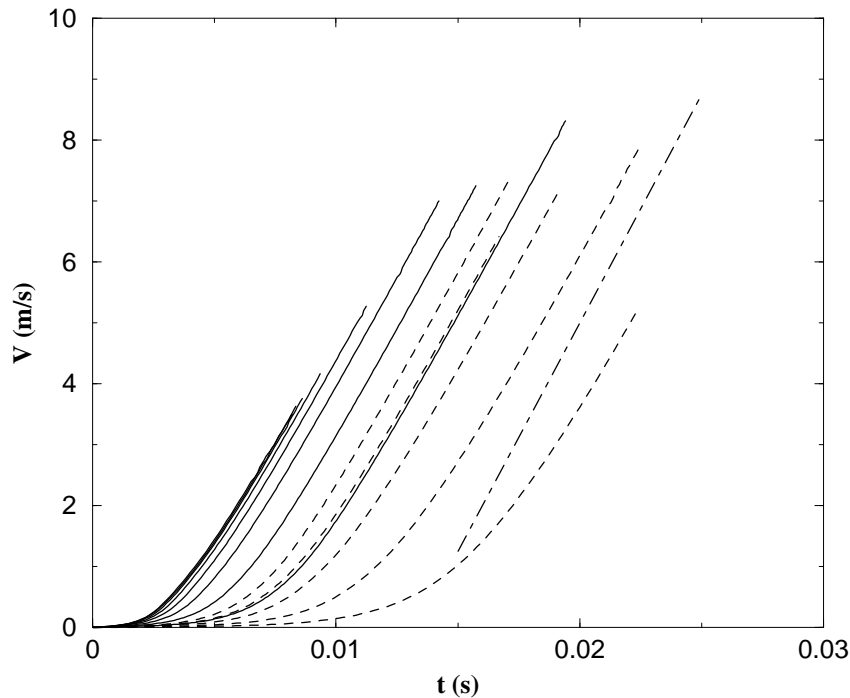
Le premier régime (figure du haut) semble donner lieu au pincement capillaire au voisinage de la goutte, bien que, pour des raisons de convergence numérique, nous n’ayons pu poursuivre le calcul jusqu’à la singularité. Le troisième régime (figure du bas) présente un amincissement important du jet à sa base, ce qui semble indiquer que le pincement devrait avoir lieu dans cette région. Le régime intermédiaire correspond à un amincissement du jet à la fois à sa base, mais également près de la goutte. Il est donc probable qu’il y ait une transition de type de pincement, lorsqu’on fait varier la viscosité, pour une même épaisseur de fluide initiale.

## 4 Trajectoire de la goutte

Les seuls effets ralentissant la trajectoire uniformément accélérée de la goutte sont les effets de la tension de surface et de la viscosité. A priori, il n'est pas évident que ces effets ne soient pas comparables à l'inertie aux temps longs.

Si l'on néglige les effets de la viscosité sur la rétraction de la goutte, on montre facilement que la goutte se rétracte par rapport au fluide se trouvant dans son voisinage, avec une vitesse constante égale à  $\sqrt{2\gamma/\rho R}$  (où  $R$  est le rayon du jet, considéré comme constant). Cet effet ne peut donc être prédominant aux temps longs, puisque la force volumique – s'il n'y avait d'autres effets dissipatifs – devrait transmettre aux particules fluides une vitesse affine en temps ( $v \simeq g(t - t_0)$ ).

L'effet de la viscosité est plus important et vient, en partie, du terme de Trouton des équations des films minces :  $(3/R^2)(\partial/\partial z)(\mu R^2(\partial v/\partial z))$  (où  $\mu$  est la viscosité dynamique et  $v$  la vitesse du fluide dans la direction  $z$  du jet). Ce terme, présent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction  $z$ , est l'expression extensionnelle, pour les jets minces, du terme de viscosité de cisaillement des équations de Navier–Stokes. Il représente donc une résistance à l'étirement et doit avoir un effet non négligeable sur la trajectoire de la goutte. Le second effet lié à la viscosité est le drainage du film de liquide en contact avec le solide. Par cisaillement cette fois, on observe une forte génération de vorticit   au contact du solide, qui ralentit la progression du jet.



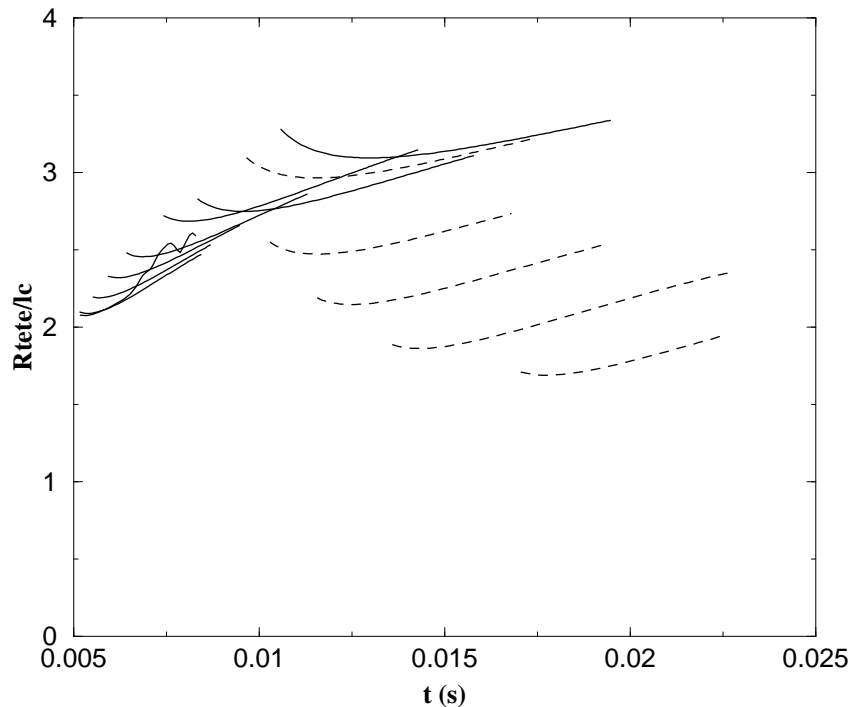
**Fig. 3.** Vitesse de la goutte (en m/s) en fonction du temps (en s) pour les mêmes valeurs de viscosité et tension de surface que précédemment. Les courbes en traits pleins correspondent aux différentes valeurs de viscosité, les courbes en pointillés aux cinq valeurs de tension de surface (Cf. Fig. 1). On constate que toutes les courbes tendent approximativement vers une pente commune égale à l'accélération donnée par la force volumique  $g$ . (droite en pointillés mixtes).

Les résultats numériques montrent néanmoins que l'inertie est clairement dominante aux temps longs. La figure 3 représente la vitesse de la goutte pour différentes valeurs de la viscosité et de la tension de surface. On constate que les courbes convergent toutes, aux temps longs, vers une asymptote d'équation  $v = g(t - t_0)$ , où  $g$  est la densité de force volumique imposée au fluide, et  $t_0$  un temps à partir duquel

l’inertie est dominante et avant lequel la croissance de l’instabilité est exponentielle (Rayleigh–Taylor). Nous ne disposons pas encore de modèle théorique permettant d’évaluer ce temps  $t_0$ , mais l’analyse dimensionnelle et les résultats numériques devraient permettre d’obtenir sa dépendance en  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $g$  et  $h_0$ .

## 5 Evolution du rayon de la goutte

L’analyse de la goutte dans le référentiel du fluide avoisinant (Taylor–Culick) permet également de trouver l’évolution du rayon de la goutte au cours du temps. On trouve que ce rayon, si l’on assimile la goutte à une sphère, doit évoluer en  $t^{1/3}$ , c’est-à-dire que sa masse doit être linéaire en temps. Par ailleurs, il est naturel de comparer le rayon avec la longueur capillaire  $l_c$ .



**Fig. 4.** Rayon de la goutte adimensionné par la longueur capillaire  $l_c$  en fonction du temps (en s) pour les mêmes valeurs de viscosité et tension de surface que précédemment (cf. Fig. 1). Les courbes en traits pleins correspondent aux différentes valeurs de viscosité, les courbes en pointillés aux cinq valeurs de tension de surface.

La figure 4 représente le rayon de la goutte, adimensionné par  $l_c$  en fonction du temps (en s). On constate que pour toutes les simulations numériques, ce rayon est compris entre 2 et 3 fois la longueur capillaire. Par ailleurs, ce rayon évolue très lentement en comparaison de la position de la goutte, en suivant une loi en  $t^{1/3}$  compatible avec la théorie de Taylor–Culick, en considérant en première approximation et sur l’échelle de temps des simulations, que le rayon de la fibre est quasi-constant. Il reste à faire une étude détaillée du rayon au cours du temps, pour savoir notamment si la viscosité joue un rôle dans la rétraction de la goutte ou si le mécanisme de Taylor–Culick est toujours valable pour les grandes valeurs de la viscosité.

## 6 Perspectives

Cette étude numérique préliminaire ouvre plusieurs champs de réflexion, fondamentaux et appliqués. D’un point de vue fondamentale, l’occurrence du pincement, sa localisation dans l’espace et le temps,

en fonction des paramètres physiques du liquide, reste une question ouverte. En particulier, l'effet de la viscosité sur la déstabilisation des jets n'est pas encore clair, alors même qu'il est parfaitement compris au voisinage de la singularité de pincement. Dans le cadre de cette étude, pour des fluides très visqueux, nous avons pu obtenir des simulations présentant des jets fins et longs, sur de longues durées, sans détachement de gouttes, comme c'est le cas pour un filet de miel.

Pouvoir décrire l'instabilité en fonction des paramètres physiques et géométriques permettra d'obtenir et de quantifier des grandeurs importantes pour l'industrie, telles que la distribution de tailles de gouttes émises. Un autre effet sur la déstabilisation, peu abordé ici, est l'étirement que subit le jet sous l'effet de la force volumique. Cet étirement a probablement un effet déterminant sur la formation de gouttes et fera l'objet d'une étude numérique et théorique approfondie.

## Références

1. J. EGGERS & E. VILLERMAUX, Physics of liquid jets, *Rep. Prog. Phys.*, **71**, 036601 (2008).
2. LORD RAYLEIGH, *Scientific Papers II*, Cambridge University Press, (1900).
3. G.I. TAYLOR, The Instability of Liquid Surfaces when Accelerated in a Direction Perpendicular to their Planes. I, *Proceedings of the Royal Society A*, **201**, 192 (1950).
4. J. EGGERS, Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows, *Review of Modern Physics*, **69** (3), 865–930 (1997).
5. S. POPINET & S. ZALESKI, Bubble collapse near a solid boundary : a numerical study of the influence of viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, **464**, 137–163, (2002).



# Waves and solitons in complex plasmas

Céline Durniak<sup>1</sup>, Dmitry Samsonov<sup>1</sup>, Paul Harvey<sup>1</sup>, Sergey Zhdanov<sup>2</sup>, & Gregor Morfill<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Electrical Engineering and Electronics, The University of Liverpool, Brownlow Hill, Liverpool L69 3GJ, United Kingdom

<sup>2</sup> Max-Planck-Institut für Extraterrestrische Physik, D-85740 Garching, Germany.  
celine.durniak@liv.ac.uk

**Résumé.** Les plasmas complexes (ou poussiéreux) sont des gaz ionisés contenant des microparticules chargées. Ils peuvent exister à l'état solide, liquide ou gazeux et être le siège de différents phénomènes dynamiques comme les solitons, les chocs, les cônes de Mach, les transferts thermiques par phonons,... Nous présentons une étude expérimentale et théorique concernant les solitons dans les plasmas complexes. Pour cela, nous analysons les modifications du milieu causées par la propagation des ondes, les propriétés des solitons longitudinaux ainsi que l'interaction entre solitons contrapropagatifs et l'influence de l'inhomogénéité du milieu sur la propagation des ondes. Nous mettons en évidence le retard sur la trajectoire de deux solitons lors de leur collision et l'amplification ("raidissement") des solitons se propageant dans un milieu dont la densité décroît.

**Abstract.** Complex (dusty) plasmas consist of micron sized microparticles immersed into ordinary ion-electron plasmas. They can exist in solid, liquid or gaseous states and exhibit a range of dynamic phenomena such as linear and nonlinear dust waves, solitons, shocks, Mach cones, heat transfer by phonons, flows, etc. We report on the experimental and numerical study of dissipative solitons in complex plasmas. We investigated the structural and dynamic changes of the lattice due to wave propagation, properties of compressional solitons, as well as interaction of counter-propagating solitons and the influence of the lattice inhomogeneity on the soliton propagation. It was found that the colliding solitons are delayed by their interaction and that the solitons propagating in a lattice with reducing number density exhibit an increase of amplitude (steepening).

## 1 Introduction

Complex or dusty plasmas are plasmas with added microparticles (or dust grains). The microparticles collect electrons and ions and become highly charged. Their charges are usually negative due to the higher mobility of electrons compared to ions and they are screened by the spatial rearrangement of the positive ions. The grains interact with each other electrostatically via a Yukawa (or Debye-Hückel, or screened Coulomb) potential.

Similar to colloids, complex plasmas can exist in solid, liquid or gaseous states and exhibit phase transitions [1]. If the Coulomb energy of two neighboring particles is larger than their thermal energy, they form ordered structures, which have liquid-like order. In cases of very low thermal energy compared to the potential energy of interaction, Coulomb solids are formed, which are often called "plasma crystals". Two-dimensional crystal lattices have a hexagonal structure. Complex plasmas are characterized by the screening parameter  $\kappa = a/\lambda_D$ , where  $\lambda_D$  is the Debye screening length and  $a$  is the interparticle spacing (usually of the order of 0.1 – 1 mm).

Complex plasmas can be found in space, e.g. in planetary rings, comets or interstellar clouds. In plasma technology, dust contamination has negative effects on the yield of semiconductor devices. As the grains are weakly damped by gas friction and are traceable individually, dynamic phenomena such as shocks [2], Mach cones [3], solitons [4], and waves [5] can be observed at the kinetic level in real time.

Here we present the results of our experiments and molecular dynamics simulations of solitons in complex plasmas. The collision of two counter-propagating dissipative solitons was studied as well as the propagation of dissipative solitons in an inhomogeneous lattice.

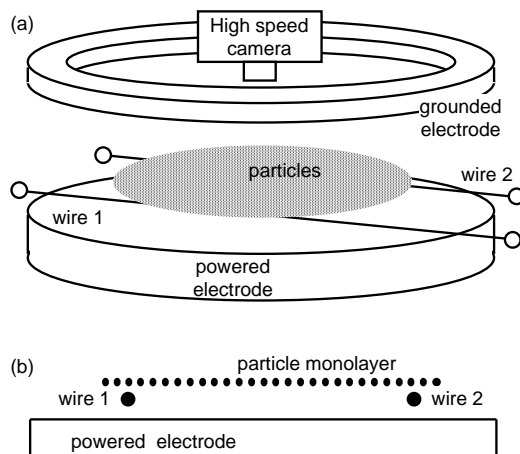
## 2 Experimental setup

The experiments were performed in a capacitively coupled radio-frequency (rf) discharge chamber as shown in Fig. 1. Argon flow of either 3 sccm (collision experiment) or 1.2 sccm (steepening experiment) maintained the working gas pressure in the chamber of 1.446 Pa or 0.682 Pa respectively. The rf power of either 1 W (collision) or 2 W (steepening) was applied to the lower disc electrode which was 20 cm in diameter. The chamber itself was the other grounded electrode. Due to different area of the electrodes and different mobility of ions and electrons, the powered electrode had a DC self-bias voltage of 33 V (collision) or 35 V (steepening), which helped to suspend the particles in the plasma sheath against the gravity.

The particles that were injected into the plasma through a particle dispenser were monodisperse plastic microspheres of  $9.19 \pm 0.1 \mu\text{m}$  in diameter with a mass  $m$  of  $6.1 \times 10^{-13}$  kg.

They were confined radially in a bowl shaped potential formed by a rim on the outer edge of the electrode, forming a monolayer hexagonal lattice of approximately 6 cm in diameter. The particles were illuminated by a horizontal thin (0.2-0.3 mm) sheet of light from a doubled Nd :YAG laser (532 nm) and imaged by a top-view digital camera at a rate of either 500 (collision) or 1000 (steepening) frames per second. Two parallel horizontal tungsten wires, both 0.1 mm in diameter were placed below the particle layer at 25.5 mm from the middle of the lower electrode. Both wires were normally grounded to minimize their influence on the particles. Short negative pulses with amplitudes between -10 and -40 V were applied to one or both wires to excite a single or two counter-propagating compressional disturbances respectively. A time interval of 100 s allowed the lattice to come to an equilibrium between the runs.

In order to analyze the experimental data, the positions of all particles were identified and they were traced in consecutive frames to calculate the particle velocities. The local two dimensional (2D) number density was determined as the inverse area of the Voronoi cells [6].



**Fig. 1.** Sketch of the apparatus. (a) Oblique view. Spherical monodisperse plastic microspheres charge negatively and form a monolayer levitating in the plasma sheath above the lower electrode. (b) Side view. Grounded wires are placed below the particles. Short negative voltage pulses are applied to the wires in order to excite solitons.

## 3 Molecular dynamics simulations

Using a three-dimensional (3D) molecular dynamics code, we simulated a monolayer complex plasma consisting of 3000 negatively charged microparticles interacting via a Yukawa potential. The code did

not include any explicit plasma. The plasma was taken into account only as the confining and interaction potentials. The 2D or 3D equations of motion were solved as follows :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_s &= \mathbf{f}_s^{fr} + \mathbf{f}_s^{conf} + \mathbf{f}_s^{int} + \mathbf{f}_s^{ext} \\ \mathbf{f}_s^{fr} &= -m\nu\dot{\mathbf{r}}_s, \quad \mathbf{f}_s^{conf} = -m[\Omega_h^2(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s) + \Omega_z^2\mathbf{z}_s] \\ \mathbf{f}_s^{int} &= -\nabla U_s, \quad U_s = Q^2 \sum_{j \neq s} r_{sj}^{-1} \exp(-r_{sj}/\lambda_D) \end{aligned} \quad (1)$$

where  $m$  is the mass of the particles,  $\mathbf{r}=\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$  is the particle coordinate with the subscripts  $s$  and  $j$  denoting different particles,  $\mathbf{f}_s^{fr}$  is the friction due to collisions with neutrals (Epstein or gas drag),  $\mathbf{f}_s^{conf}$  is the confinement force due to the parabolic potential,  $\mathbf{f}_s^{int}$  is the grain-grain interaction force,  $\mathbf{f}_s^{ext}$  is the external excitation force,  $\nu$  is the neutral damping rate,  $\Omega_h$  and  $\Omega_z$  are respectively the horizontal and vertical confinement parameters of the parabolic well,  $U_s$  is the Yukawa interaction potential,  $\lambda_D$  is the Debye screening length,  $Q$  is the particle charge, and  $r_{sj} = |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j|$  is the intergrain distance. The overdots denote time derivatives. The grain charge  $Q$  and the screening length  $\lambda_D$  were kept constant throughout the simulations.

The boundaries were free ; the grains were horizontally confined by a parabolic confining potential [7]. We used normalized units in the code : the lengths in terms of the screening length  $\lambda_D$  and the time in terms of  $T = \sqrt{m\lambda_D^3/Q^2}$ . In order to facilitate comparison to the experiment, the dimensionless units were converted into dimensional units after the simulation was completed.

Equations (1) were solved with the fifth order Cash Karp algorithm with adaptive step size controls [8]. We ran our simulations with the following parameters :  $m = 5 \times 10^{-13}$  kg,  $\nu = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\lambda_D = 1$  mm, and  $Q = 16000e$ . Different values of the confinement parameter  $\Omega_h$  enabled us to generate lattices with different screening parameters  $\kappa$ . We checked that the results of the 2D simulation matched those produced by the 3D code with  $\Omega_z = 200$  Hz.

The particles were first placed randomly into the simulation box. Each particle then interacted with all the other particles and the code was run until the equilibrium was reached as the kinetic energy of the grains reduced (due to damping force chosen equal to the neutral friction force in the experiments) and a monolayer crystal lattice was formed. The lattice was then excited by a pulsed force applied inwards at either one or both sides of the lattice at a fraction of the lattice diameter from the center. The temporal shape was a truncated parabola with a duration of  $\tau = 130$  ms (defined as the full width at half maximum amplitude of the pulse). The spatial profile in the  $x$  direction was either Gaussian or half-infinite with a Gaussian transition. It did not depend on the  $y$  coordinate (parallel to the soliton front).

In order to analyze the numerical data, the particle positions and velocities were recorded during the simulations. The 2D number density was determined from the Voronoi analysis similar to the analysis of the experiment.

## 4 Experimental and numerical results

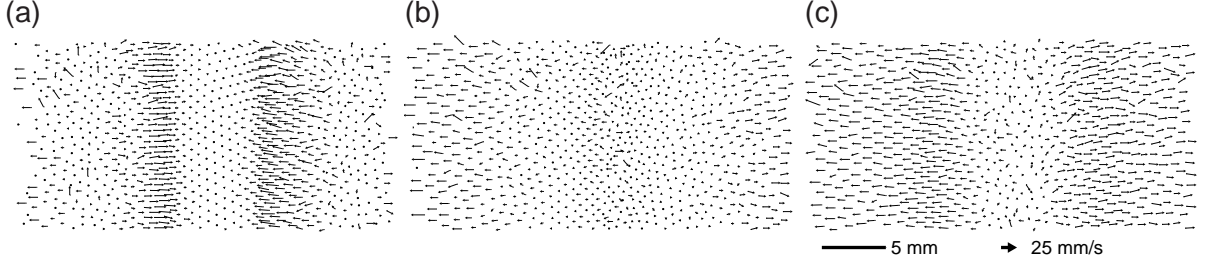
### 4.1 Counter-propagating solitons

In order to study soliton collisions we obtained a homogeneous lattice which filled the space between the wires as shown in Fig. 1. Two identical compressional solitons were simultaneously excited to propagate inwards in the particle lattice. A brief negative potential lasting 100 ms was applied to both wires with an initial amplitude ranging between -20 V and -40 V.

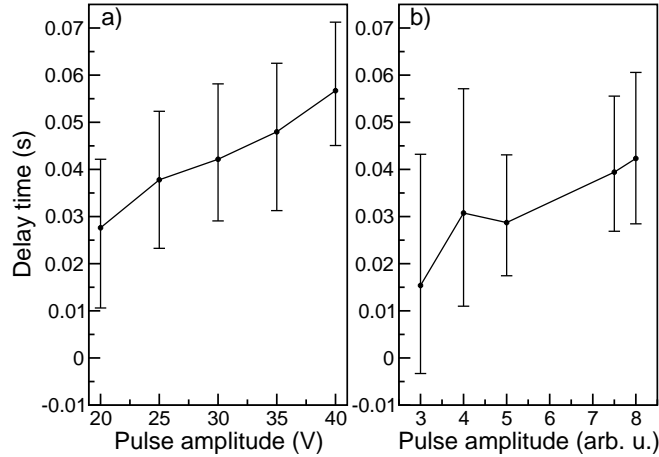
Figure 2 shows a part of the lattice in the experiment with the propagating solitons before (a), during (b), and just after (c) the collision. As the solitons propagated inwards, their amplitudes decreased because of the neutral damping. Their evolution led to a collision in the middle of the lattice. At the point of collision the horizontal particle velocity (perpendicular to the wire) was zero. (Fig. 2 (b)). Then two waves emerged from the collision point. They were wider and had a reduced amplitude compared to the incident waves. Their centers were slightly retarded from the trajectories of the incoming centers by a *time delay*  $\Delta t$ . A similar effect has also been observed in hydrodynamics experiments [9].

The 3D simulation was performed with  $\Omega_h = 0.5$  Hz,  $\Omega_z = 50$  Hz. The excitation forces had identical Gaussian profiles along the  $x$  axis with a waist of 2 mm and an amplitude varying between 3 and 8 arbitrary units (arb. u.). They were applied at  $\pm 1.7$  cm from the center of the crystal, which was 9.25 cm in diameter.

The time delay  $\Delta t$  was determined from the "asymptotic" trajectories of the soliton maxima approximated as straight lines in  $(x, t)$  contour plots. Figure 3 shows that the time delay increases with the excitation amplitude in the experiments (a) and simulations (b).



**Fig. 2.** Experimental particle velocity maps computed from two consecutive frames for an input pulse (-30 V) at  $t = 370$  ms (a), 530 ms (b), and 690 ms (c).

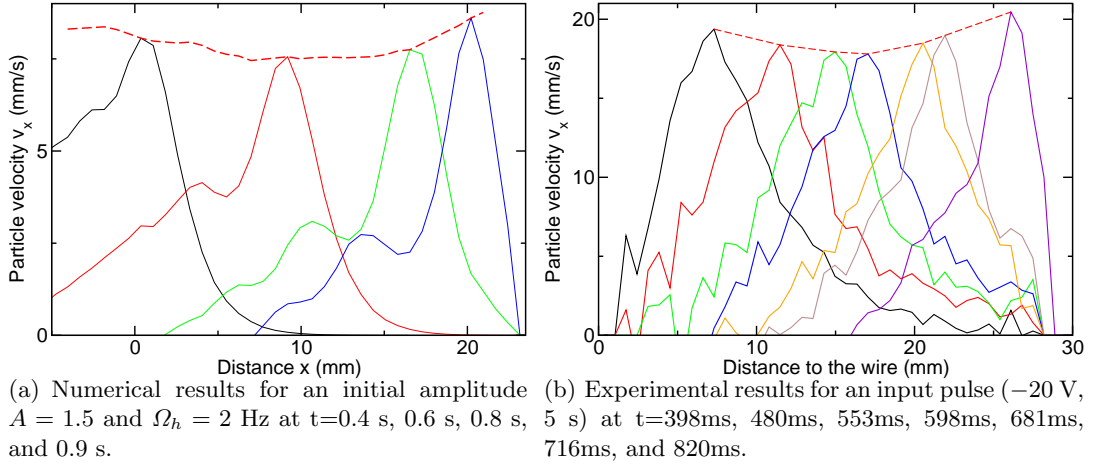


**Fig. 3.** Temporal delay of the interacting solitons measured from the particle velocity  $v_x$  versus excitation amplitude in the experiment (a) and the simulation (b).

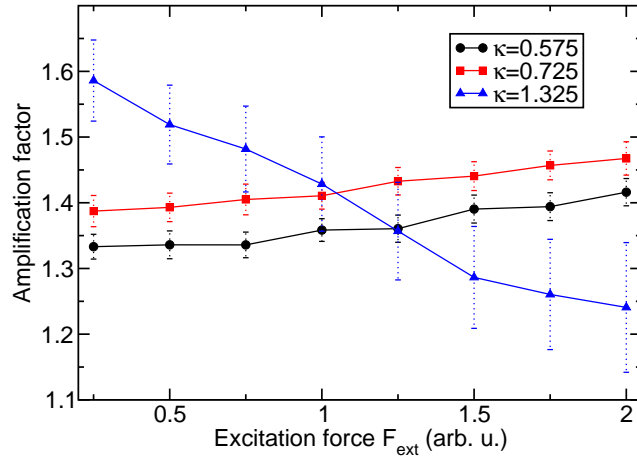
## 4.2 Self-steepening effects

The soliton steepening was studied as it reached the inhomogeneous edge of the lattice. The experimental chamber was slightly tilted in order to maximize the lattice inhomogeneity on one side. Single solitons were excited in both the experiment and the simulation by either applying a voltage pulse to only one of the wires or an excitation force to one of the sides of the lattice. The spatial profile of the simulated excitation force was half-infinite in the  $x$  direction with a Gaussian transition [*i.e.*  $\exp(-(x - x_0)^2/\omega^2)$  for  $x \geq x_0$  and 1 for  $x < x_0$ ] with  $x_0 = -12$  mm and a waist  $\omega$  of 2 mm. All the simulation runs were performed in 2D after verifying that the 3D simulation with  $\Omega_z = 200$  Hz produced identical results.

Figure 4 shows the particle velocity  $v_x$  in the  $x$  direction. The snapshots of solitons were plotted at different times as they propagated along the  $x$  axis in the simulation (a) and in the experiment (b). The simulation of Fig. 4(a) was performed for the force amplitude  $A = 1.5$  and screening parameter  $\kappa = 0.725$  (determined in the middle of the lattice). In this crystal, the number density varied between  $2.5 \text{ mm}^{-2}$  at the center of the crystal to  $0.75 \text{ mm}^{-2}$  at the edge ( $x_e = 23 \text{ cm}$ ). The maximum of the particle velocity first decreased due to damping but then increased as the soliton reached the edge of the lattice where the number density decreased. We observed the same effect in the experiment (Fig. 4(b)) which was performed with a 5 s, -20 V excitation pulse.



**Fig. 4.** Particle velocity in the direction of the pulse propagation plotted versus distance to the excitation wire. Note that  $x$  is measured from the center of the crystal in the simulations and from wire 1 in the experiment.



**Fig. 5.** Amplification factor of the pulse as a function of the initial amplitude of the excitation force  $A$  for different values of the screening parameter  $\kappa$ .

The influence of the excitation force amplitude  $A$  and the screening parameter  $\kappa$  was investigated numerically. Figure 5 shows the soliton amplification factor as a function of the excitation force amplitude

for different values of  $\kappa$  (ranging between 0.575 and 1.325). The amplification factor was calculated as the ratio of the final soliton amplitude to its amplitude in the middle of the lattice. In order to compare the runs with different  $\kappa$  we determined the final point as the point  $x_e$  where the number density decreased by a factor of 0.42 compared to its value in the center of the lattice. The damping rate was corrected for by multiplying the final amplitude by the factor  $\exp(\nu(t_e - t_0)/2)$  where  $t_e$  and  $t_0$  corresponded to the soliton at the  $x = x_e$  and  $x = 0$  positions respectively.

It was found that the amplification factor increases with the intensity of the excitation force at small  $\kappa$  but the effect is the opposite for the largest value of  $\kappa$ . This behavior requires explanation.

## 5 Conclusion

The properties of dissipative solitons propagating in complex plasmas were investigated experimentally and numerically. First, we analysed counter-propagating solitons and found that there is a time delay caused by their interaction. The time delay increased with the soliton amplitude. Second, we studied the soliton steepening as it propagated in a lattice with decreasing number density. The soliton amplification factor increased with the excitation amplitude at small values of the screening parameter. For the largest value of the screening parameter the amplification factor decreased with the excitation amplitude.

We thank the Engineering and Physical Sciences Research Council of the United Kingdom for financial support (grant EP/E04526X/1).

## Références

1. H.M. THOMAS AND G.E. MORFILL, Melting of a plasma crystal, *Nature*, **379**, 806-809 (1996) — C.A. KNAPEK, D. SAMSONOV, S. ZHDANOV, U. KONOPKA, AND G.E. MORFILL, Recrystallization of a 2D plasma crystal, *Physical Review Letters*, **98**, 015004 (2007).
2. D. SAMSONOV, S.K. ZHDANOV, R.A. QUINN, S.I. POPEL, AND G.E. MORFILL, Shock melting of a two-dimensional complex plasma, *Physical Review Letters*, **92** (25), 255004 (2004).
3. D. SAMSONOV, J. GOREE, H.M. THOMAS, AND G.E. MORFILL, Mach cone shocks in a two-dimensional Yukawa solid using a complex plasma, *Physical Review E*, **61** (5), 5557-5572 (2000).
4. D. SAMSONOV, A.V. IVLEV, R.A. QUINN, G. MORFILL, AND S. ZHDANOV, Dissipative longitudinal solitons in a two-dimensional strongly coupled complex (dusty) plasma, *Physical Review Letters*, **88** (9), 095004 (2002) — T.E. SHERIDAN, V. NOSENKO, AND J. GOREE, Experimental study of nonlinear solitary waves in two-dimensional dusty plasma, *Physics of Plasmas*, **15**, 073703 (2008).
5. D. SAMSONOV, S. ZHDANOV, AND G. MORFILL, Vertical wave packets in a crystallized hexagonal monolayer complex plasma, *Physical Review E*, **71**, 026410 (2005).
6. G.F. VORONOI, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, Deuxième mémoire. Recherches sur les parallélogrammes primitifs — *J. Reine Angew. Math.* **134**, 198 (1908) and **136**, 67 (1909).
7. U. KONOPKA, L. RATKE, AND H. M. THOMAS, Central collisions of charged dust particles in a plasma, *Physical Review Letters*, **79**, 1269 (1997) — U. KONOPKA, G. E. MORFILL, AND L. RATKE, Measurement of the Interaction Potential of Microspheres in the Sheath of a rf Discharge, *Physical Review Letters*, **84**, 891 (2000).
8. W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING, AND B.P. FLANNERY, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York, 2<sup>nd</sup> Edition (1992).
9. W. CRAIG, P. GUYENNE, J. HAMMACK, D. HENDERSON, AND C. SULEM, Solitary wave interactions, *Physics of Fluids*, **18**, 0571006 (2006) — A.B. EZERSKY, O.E. POLUKHINA, J. BROSSARD, F. MARIN, AND I. MUTABAZI, Spatiotemporal properties of solitons excited on the surface of shallow water in a hydrodynamic resonator, *Physics of Fluids*, **18**, 067104 (2006).

# Echec de la technique de titration du bruit à distinguer un bruit coloré d'un chaos

Ubiratan S. Freitas<sup>1</sup>, Luis A. Aguirre<sup>2</sup> & Christophe Letellier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CORIA UMR 6614 - Université de Rouen, Av. de l'Université, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

<sup>2</sup> Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não Lineares, Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG, Brazil

freitas@coria.fr

**Résumé.** Identifier des comportements chaotiques à partir de données expérimentales, c'est-à-dire, des données contaminées par du bruit, reste un problème particulièrement délicat dans la mesure où une preuve définitive reste très difficile à fournir. De manière à éviter les faiblesses des techniques basées sur l'utilisation d'invariants géométriques (dimensions, exposants de Lyapunov), Poon et Barahona ont introduit une procédure de titration numérique qui compare les prédictions à un pas réalisées avec des modèles linéaires et non linéaires [1]. Le principe repose sur l'adjonction d'un bruit d'écart type  $\sigma$  jusqu'à ce que le modèle non linéaire ne permette pas de meilleures prédictions que le modèle linéaire. La limite de bruit  $LB = \sigma$  correspond à ce niveau de bruit. A l'aide de deux contre exemples, nous montrons que cette technique ne permet pas de distinguer un bruit coloré d'un comportement chaotique.

**Abstract.** Identifying chaos from experimental data, that is, from data contaminated by noise, remains a very challenging problem for which conclusive arguments are still very difficult to provide. In order to avoid problems usually encountered with techniques based on geometrical invariants (dimensions, Lyapunov exponent, etc.), Poon and Barahona introduced a numerical titration method based on comparison between one-step-ahead predictions with linear and nonlinear techniques [1]. Its principle consists in adding some noise with a standard deviation  $\sigma$  up to the point that the nonlinear model cannot provide better predictions than the linear model. The noise limit  $LB = \sigma$  corresponds to this noise level. Using two counter examples, we showed that this technique cannot distinguish colored noise from chaotic behavior.

## 1 Introduction

Lorsqu'une série temporelle du monde réel est étudiée, il est nécessaire d'appréhender sa dynamique sous-jacente qui, la plupart du temps, résulte d'une relation complexe entre des composantes déterministe et stochastique [2]. Une attention spéciale est portée à l'identification la composante déterministe. Parfois cet objectif se résume à une technique de détection qui suppose l'existence d'une composante déterministe. Plusieurs techniques ont été proposées pour détecter le chaos mais aucune n'est complètement fiable. Toutes sont liées à certaines propriétés topologiques ou des mesures d'information sur les attracteurs reconstruits à partir des données [3,4] et présentent des problèmes de spécificité et de fiabilité [5,6]. Il est connu que le plus grand exposant de Lyapunov ne permet pas de distinguer un comportement chaotique du bruit [7]. Avant de poursuivre, rappelons en quoi consiste un comportement chaotique : il doit être aperiodique, sensible aux conditions initiales, borné et déterministe. Les trois premières propriétés sont relativement aisées à montrer, par contre, la quatrième — qui signifie que la dynamique est gouvernée par un processus qui peut être décrit par un jeu d'équations différentielles ordinaires ou des équations discrètes — est de loin la plus ardue. Il peut être également décrit par une équation différentielle à retard comme c'est souvent le cas en biologie. Typiquement, le déterminisme est un paradigme selon lequel les événements futurs sont induits par les événements passés et présents combinés avec les lois de la nature. Un tel déterminisme prend date avec Laplace. Ce qui a brouillé l'image donné par Laplace, c'est que lorsqu'une nonlinéarité a été introduite, il n'est plus possible de prévoir le futur sur un temps infini. Les prédictions de dynamiques nonlinéaires peuvent seulement être faites à court terme. En raison de

cette dernière propriété, identifier un déterminisme sous-jacent à des données expérimentales est plutôt un problème ardu, principalement parce qu'un comportement chaotique ne peut être distingué d'un comportement stochastique d'un point de vue statistique [8]. Avant d'affirmer qu'une dynamique puisse être chaotique, il devrait y avoir une évidence indiscutable de déterminisme [9].

Implicitement, le déterminisme sous-jacent est considéré en termes de déterminisme de basse dimension, juste parce que lorsque la dimension est trop grande, un tel déterminisme ne peut plus être distingué d'un processus stochastique. Habituellement, une dynamique de basse dimension signifie que le comportement peut être décrit dans un espace des phases de dimension qui ne dépasse pas la dizaine. Prouver que la dynamique sous-jacente à une série temporelle contaminée par du bruit correspond à un comportement chaotique de basse dimension est l'un des problèmes les plus difficiles à résoudre. C'est l'une des principales raisons pour lesquelles les analyses reposant sur des données supplétives sont souvent utilisées [10]. Malheureusement, ces techniques testent seulement si la dynamique étudiée peut être distinguée de données supplétives, ou non. Ceci ne constitue par conséquent par une réponse directe et définitive à la question originale, soit identifier le déterminisme sous-jacent.

Pour pallier à cette difficulté, quelques techniques pour détecter la présence de déterminisme non-linéaire au sein de dynamiques expérimentales ont été proposées (voir par exemple [11,12]). Mais aucune de ces techniques n'est réellement fiable. Parmi ces techniques, une technique basée sur une titration numérique a été proposée [1]. Les auteurs ont utilisés plusieurs noms dont celui de « titration du chaos » [1] ou plus récemment de « titration du bruit » [13,15]. Comme nous le verrons, cette technique identifie de manière erronée des systèmes non déterministes comme étant chaotiques : elle ne peut donc fournir une distinction fiable entre chaos et bruit.

## 2 Titration du chaos

La technique de Poon et Barahona [1] repose sur deux principes : une méthode de détection non-linéaire [16] et une addition graduelle de bruit. Ils ont prétendus que leur technique fournissait une condition suffisante et robuste pour tester la présence de chaos déterministe au sein de série temporelle courte et bruitée. La méthode de détection de non-linéarité est appliquée à la série temporelle étudiée. Elle est capable de déterminer si les données sont mieux décrites par un modèle non linéaire que par un modèle linéaire. Ensuite, du bruit blanc ou linéairement corrélé est progressivement ajouté aux données jusqu'à ce la méthode de détection de non-linéarité échoue à détecter une non-linéarité. La déviation standard normalisée du bruit ajouté à ce point est ce qui est appelé la limite de bruit (LB) et est présentée comme une mesure de « l'intensité du chaos ». La condition  $LB > 0$  est prétendue comme étant suffisante pour déduire la présence de chaos au sein des données.

La question se résume donc à savoir si  $LB > 0$  implique réellement un comportement chaotique. Dans leur étude, Poon et Barahona [1] ne considèrent que des systèmes déterministes, chaotiques ou non, et bruités. Il est montré que, pour certains types de systèmes, la limite LB est corrélée au plus grand exposant de Lyapunov  $\lambda_{\max}$ , au moins lorsque  $\lambda_{\max}$  est positif. Ainsi, la conclusion  $LB > 0$  implique chaos est dressée sur la base des analyses du comportement de la méthode avec ces exemples. Aussi, une question naturelle est de regarder si cette conclusion reste valide si d'autres types de systèmes sont étudiés. La réponse est négative comme nous allons le montrer.

## 3 Des cas non chaotiques avec $LB > 0$

Considérons l'application sinusoïdale  $x_{n+1} = \mu \sin(x_n)$  où  $\mu$  est le paramètre de bifurcation. Cette application est équivariante puisqu'appliquer le changement de variables  $x_n \mapsto -x_n$  conduit à  $x_{n+1} \mapsto -x_{n+1}$ . Ceci signifie que les solutions de l'application sinusoïdale présente des propriétés résultant d'une symétrie d'ordre 2. Par exemple, lorsque  $\mu \in [2 ; 3.1]$ , il y a co-existence de deux solutions symétriques l'une de l'autre sous le changement de variables  $x_n \mapsto -x_n$ . Lorsque le paramètre  $\mu$  est augmenté, deux cascades de doublements de période simultanées sont observées comme route vers le chaos.

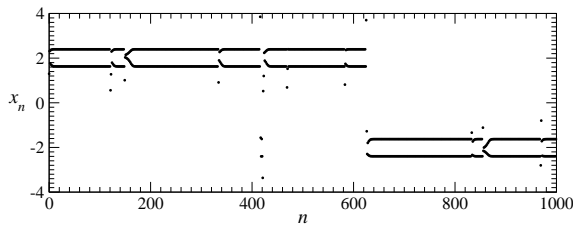


Une dynamique déterministe non chaotique excitée par un bruit est obtenu en utilisant

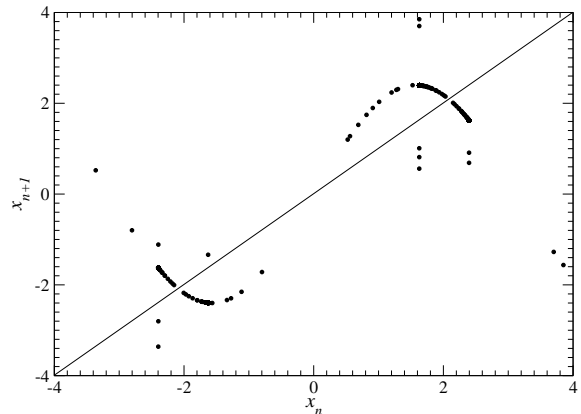
$$x_{n+1} = \mu \sin(x_n) + Y_n \eta_n, \quad (1)$$

qui produit un cycle limite de période 2 lorsque ( $\mu = 2.4$ ). La variable  $Y_n$  est une variable aléatoire résultant d'un processus de Bernoulli et  $\eta_n$  est une variable aléatoire uniformément distribuée entre  $-b$  et  $b$ . La valeur de chaque  $Y_n$  est 1 avec la probabilité  $q$  et 0 avec la probabilité  $1 - q$ . Lorsque  $q$  est petite, les perturbations stochastiques sont plutôt rare et la dynamique produite par (1) et l'application sinusoidale sont presque semblable.

Mille itérations de l'application (1) sont produites avec les paramètres  $q = 0.01$ ,  $\mu = 2.4$  et  $b = 2$  (Fig. 1). Le comportement résultant est grosso modo un cycle limite de période 2, aléatoirement déstabilisé par des perturbations stochastiques,  $Y_n \eta_n$ , qui sont parfois suffisantes pour envoyer la trajectoires vers la solution symétrique, comme cela est observé autour de l'itération 620 (Fig. 1).



**Fig. 1.** Série temporelle (1000 points) produite par l'application (1). Valeurs des paramètres :  $\mu = 2.4$ ,  $b = 2$  and  $q = 0.01$ .

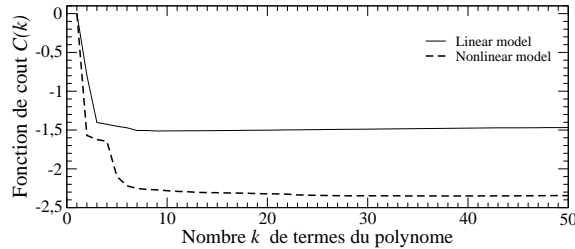


**Fig. 2.** Application de premier retour calculée à partir de la trajectoire solution de l'application (1).

Avec  $q = 0.01$ , seules 11 perturbations sont observées. Après chaque perturbation stochastique, il y a un court régime transitoire durant lequel la trajectoire s'installe sur l'un des deux cycles limites co-existant. Lorsque l'application de premier retour est calculée (Fig. 2), deux paraboles tronquées entourées de points aléatoirement distribués sont distinguées. Les formes « paraboliques » sont visitées durant les régimes transitoires. Evidemment cette dynamique périodique bruitée n'est pas chaotique. Ceci est confirmée par le plus grand exposant de Lyapunov qui est négatif ( $\lambda_{\max} = -0.65$ ).

Selon [1], du bruit blanc (ou linéairement corrélé) de variance croissante  $\sigma$  est ajoutée aux données jusqu'à ce que la nonlinéarité ne soit plus détectée. Ceci est déterminé en comparant les prédictions du signal avec un modèle linéaire et un modèle nonlinéaire pour des  $\sigma$  croissants. Supposant une nonlinéarité dans les données, les modèles nonlinéaires seront meilleurs jusqu'à une valeur limite de  $\sigma$  qui est alors considérée comme la limite de bruit (LB) au delà de laquelle il n'y a plus avantage à utiliser un modèle nonlinéaire pour la prédiction. Sur ce principe, Poon et Barahona affirment que  $LB > 0$  indique la présence de chaos, et que la valeur de LB offre une estimation de son intensité relative. Si une telle hypothèse était vraie, une limite de bruit autour de 0 devrait être attendue dans l'exemple précédent, puisque la dynamique n'est pas chaotique. Cependant, lorsque la titration du bruit est appliquée, la limite de bruit obtenue est de  $LB=20\%$  ce qui suggère incorrectement que la dynamique sous-jacente est chaotique. Cette conclusion est obtenue par le fait que la solution périodique bruitée est mieux prédite par un modèle nonlinéaire que par un modèle linéaire (Fig. 3). Ceci constitue par conséquent un premier exemple où la titration du bruit échoue à distinguer un comportement chaotique d'un comportement périodique bruité. Un tel échec n'avait jamais été observé par Poon et Barahona parce qu'ils ont toujours étudiés des dynamiques purement déterministes contaminées additivement par du bruit. Dans un article récent,

différents types de bruit ont été étudiés et les faiblesses de la titration du bruit avaient déjà été mentionnées [14].

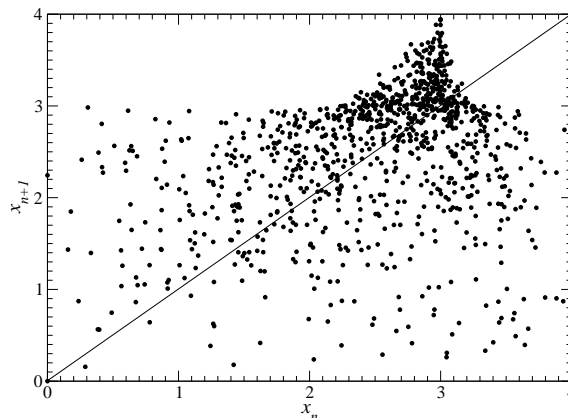


**Fig. 3.** Fonction de coût  $C(k)$  pour les modèles linéaire et nonlinéaire. Les données sont approchées par des modèles autorégressifs linéaires et nonlinéaires dont le nombre  $k$  de termes est croissant. La fonction de coût est définie par  $C(k) = \log_e \epsilon(k) + \frac{k}{N}$  où  $k$  est le nombre de termes,  $\epsilon(k)$  est l'erreur résiduelle, et  $N$  est la longueur de la série temporelle [16].

Un second exemple est maintenant considéré. De manière à produire un bruit coloré non linéaire, un bruit blanc est utilisé pour exciter un filtre non linéaire selon

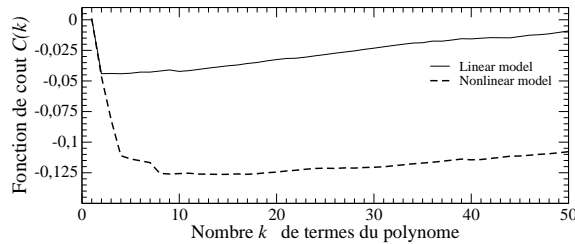
$$x_{n+1} = av_n + b\nu_{n-1}(1 - \nu_n) \quad (2)$$

où  $\nu_n$  est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 et 1. C'est un comportement purement aléatoire. Son caractère stochastique est bien mis en évidence par l'application de premier retour qui ne présente aucune structure déterministe (comme une parabole ou autre). Puisque la dynamique sous-jacente est sensible aux conditions initiales, le plus grand exposant de Lyapunov est positif.



**Fig. 4.** Application de premier retour calculée à partir de la trajectoire produite par (2).

Appliquer la titration du bruit à la solution stochastique de l'application (2) conduit à une limite de bruit LB=35%. Selon Poon et Barahona, ceci indiquerait que ces données correspondent à un chaos avec une intensité supérieure à l'exemple précédent. Une fois de plus ce serait une conclusion biaisée. Ce qui est titré est en fait l'action de la non linéarité. Ainsi, cette technique — si appliquée comme l'ont suggéré ces auteurs — concluerait de manière erronée à une dynamique déterministe chaotique bien qu'aucune signature claire de déterminisme n'ait été mise en évidence. La raison est semblable à celle du cas précédent, c'est-à-dire que le bruit coloré est prédit plus précisément avec un modèle non linéaire qu'avec un modèle linéaire (Fig. 5).

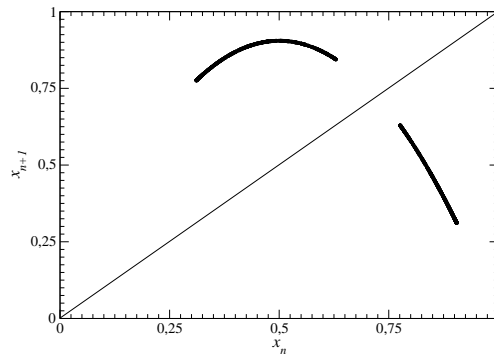


**Fig. 5.** Fonction de coût  $C(k)$  pour les modèles linéaires et non linéaires. Cas du bruit chaotique (2).

Nous cherchons maintenant quelle dynamique purement chaotique pour laquelle la limite de bruit est autour de 35%. Pour cela, nous considérons une fonction logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (3)$$

pour des valeurs croissantes du paramètre  $\mu$ . Nous avons finalement trouvé qu'avec  $\mu = 3.62$ , la limite de bruit était d'environ 35%. Pour cette valeur de  $\mu$ , l'application de premier retour se présente comme une parabole à deux segments (Fig. 6). Ceci signifie que lors d'un test aveugle, la titration du bruit ne ferait pas de différence entre le bruit coloré (Fig. 4) et le comportement purement chaotique (Fig. 6).



**Fig. 6.** Application de premier retour calculée à partir de la trajectoire produite par la fonction logistique (3). Valeur du paramètre :  $\lambda = 3.62$ .

Les exemples précédents montrent que la titration du bruit échoue à discriminer du bruit d'un chaos lorsqu'il n'y a pas de déterminisme sous-jacent. Ceci n'avait jamais été observé auparavant car l'article original considérait seulement des dynamiques déterministes. Aussi, lorsque des données expérimentales sont considérées, il n'est pas possible de fournir une affirmation définitive tant que la présence d'une signature déterministe n'est pas clairement identifiée.

## 4 Conclusion

Affirmer la présence de chaos à partir de données expérimentales est un problème plutôt délicat. En considérant cet aspect, montrer la basse dimensionalité de la dynamique est un aspect plutôt important parce qu'il est toujours possible de supposer que des processus naturels — dont la dimension peut être très grande — soient déterministes par définition [15]. Toutefois, une telle hypothèse présente un caractère de nature inévitablement métaphysique. En effet, fournir une preuve de déterminisme est l'un des objectifs les plus difficiles que nous ayons à atteindre lorsque des données expérimentales sont étudiées. Les techniques de modélisation globales se présentent comme capable de répondre à cet enjeu [17] bien qu'elle soit dépendantes du choix de l'observable [18]. Comme d'autres techniques de détection de nonlinéarités, lorsque l'objectif est de décider si une dynamique est chaotique ou non, la titration du bruit échoue aussi

sous certaines conditions. En d'autres termes, la condition  $LB > 0$  n'est *pas* une condition suffisante pour l'existence du chaos. En effet, la titration du chaos nous apprend plus sur le caractère nonlinéaire d'un processus dynamique que sur « l'intensité du chaos » comme nous l'avons montré par les deux exemples ici traités.

## Remerciements

U. Freitas est actuellement en post-doctorat soutenu financièrement par ADIR ASSISTANCE. Ce travail est partiellement financé par une convention CNRS/CNPq.

## Références

1. C.-S. POON & M. BARAHONA, Titration of chaos with added noise, *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, **98**, 7107-7112 (2001).
2. M. CENCINI, M. FALCIONI, E. OLBRICH, H. KANTZ & A. VULPIANI, Chaos or noise : difficulties of a distinction, *Physical Review E*, **62** (1), 427-437 (2000).
3. P. GRASSBERGER & I. PROCCACIA, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, **9** (189-208 (1983).
4. A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY & J. A. VASTANO, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, **16** (285-317 (1985).
5. J. P. ECKMANN, S. OLIFFSON, D. RUELLE, S. CILIBERTO, Lyapunov exponents from time series, *Physical Review A*, **34** (6), 4971-4979 (1986).
6. A. PROVENZALE, L. A. SMITH, R. VIO & G. MURANTE, Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series, *Physica D*, **58** (1-4), 31-49 (1992).
7. M. DÄMMIG & F. MITSCHKE, Estimation of Lyapunov exponents from time series : the stochastic case, *Physics Letters A*, **178**, (5-6), 385-394 (1993).
8. J. LEYSEN & H. PASTIJN, Chaos, determinism and stochasticity, *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, **111**, 646-653 (1988).
9. L. GLASS, Chaos and heart rate variability, *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*, **10** (1358-1360 (1999).
10. H. KANTZ & T. SCHREIBER, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press (1997).
11. J. THEILER, A. LOGTIN, S. EUBANK, B. GALDRIKIAN & J. D. FARMER, Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data, *Physica D*, **58**, 77-94 (1992).
12. P. SO, E. OTT, T. SAUER, B. J. GLUCKMAN, C. GREBOGI & S. J. SCHIFF, Extracting unstable periodic orbits from chaotic time series data, *Physical Review E*, **55**, 5398-5417 (1997).
13. M. WYSOCKI, M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, C.-S. POON & T. SIMIŁOWSKI, Chaotic dynamics of resting ventilatory flow in humans assessed through noise titration, *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **153**, 54-65 (2006).
14. M. LEI & G. MENG, The influence of noise on nonlinear time series detection based on Volterra-Wiener-Korenberg model, *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**(2), 512-516 (2008).
15. Z. SAMARA, M. RAUX, M.-N. FIAMMA, A. GHARBI, S. B. GOTTFRIED, C.-S. POON, T. SIMIŁOWSKI & C. STRAUS, Effects of inspiratory loading on the chaotic dynamics of ventilatory flow in humans, *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **165** (1), 82-89 (2009).
16. M. BARAHONA & C.-S. POON, Detection of nonlinear dynamics in short noisy time series, *Nature*, **381** (215-217 (1996).
17. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & U. S. FREITAS, Frequently Asked Questions about global modelling, *Chaos*, submitted.
18. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Phys. Rev. E*, **71**, 066213 (2005).

# La variété de courbure du flot comme squelette des attracteurs chaotiques

Jean-Marc Ginoux<sup>1</sup> & Christophe Letellier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon — Université du Sud, BP 20132, F-83957 La Garde Cedex, France

<sup>2</sup> CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

ginoux@univ-tln.fr

**Résumé.** Les portraits de phase se structurent principalement autour des points singuliers qui, toutefois, ne déterminent pas l'ensemble de cette structure. Récemment, des propriétés métriques du flot ont été analytiquement calculées pour des systèmes non intégrables dont les courbes solutions ne sont pas connues de manière générale. Ces propriétés métriques consistent en la *courbure du flot* et définissent, dans l'espace des phases, une variété reposant sur les dérivées temporelles du champ de vecteurs vitesse et contenant les points singuliers. Il s'agit de la *variété de courbure du flot*. Dans cette contribution, nous montrons que la composante non stationnaire — dépendante du temps — de cette variété structure l'attracteur chaotique et permet d'envisager une classification topologique reposant sur une démarche analytique. Quelques systèmes du type Rössler sont traités.

**Abstract.** Phase portraits are mainly structured around fixed points. But these fixed points cannot define the whole structure. This metric properties actually consist in the *flow curvature* and define, in the phase space, a manifold based on time derivatives of the vector field and containing fixed points. This is the *flow curvature manifold*. In this contribution, we show that the component depending on the time of this manifold structures the chaotic attractor and allows to design a topological classification based on an analytical approach. A few examples of Rössler-like systems are considered.

## 1 Introduction

Avec les descriptions toujours plus nombreuses de phénomènes naturels par des attracteurs chaotiques, un intérêt croissant a été porté au développement de techniques de caractérisation des comportements chaotiques. Typiquement, ces techniques se répartissent selon deux approches, l'une de nature statistique en lien avec la théorie ergodique [1,2], et l'autre de nature topologique [3]. A l'aide de la caractérisation topologique, différents types d'attracteurs chaotiques ont ainsi été répertoriés en dimension trois [3,4,5]. En dépit de cela, très peu a été dit sur la structure algébrique des équations gouvernant l'évolution des trajectoires sur ces attracteurs. Il est connu depuis les travaux de Poincaré que les équations conduisant à ces attracteurs chaotiques doivent être non linéaires, non intégrables et au moins de dimension trois, selon le théorème de Poincaré-Bendixson.

Ces conditions sont nécessaires mais non suffisantes. Plus récemment, il a été montré que les systèmes quadratiques d'équations différentielles ordinaires doivent être constitués d'au moins cinq termes [11]. De ce point de vue, la structure minimal d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires produisant un attracteur chaotique correspond à quatre termes linéaires et un terme non linéaire (voyez [12] pour une revue sur la découverte d'exemples simples de flots chaotiques tels que les systèmes de Lorenz et Rössler). Le rôle prépondérant joué par les points singuliers dans la structure du portrait de phase fut initialement reconnu par Poincaré [6]. Cependant, les points singuliers ne nous disent pas tout, et l'allure des attracteurs ne peut pas être déduite des seuls points singuliers. Récemment, il a été établi que, bien que le système soit non intégrable, la courbure du flot pouvait être calculée analytiquement. Ainsi la localisation des points singuliers où la courbure s'annule définit une variété basée sur les dérivées temporelles du champ de vecteurs. Il s'agit de la variété de courbure de flot pour laquelle l'invariance sous le flot a été démontrée par le théorème de Darboux [9]. Nous nous intéressons à la manière dont la partie non stationnaire d'une telle variété structure les attracteurs et permet d'envisager leur classification.

## 2 Variété de courbure du flot pour les flots linéaires 3D

Un système dynamique consiste en des équations différentielles le plus souvent non intégrables. Dans ces articles, Poincaré contourne ce problème en étudiant les propriétés des courbes trajectoires dans l'espace des phases [10] :

[...] toute équation différentielle peut être écrite comme  $\frac{dx_1}{dt} = X_1, \frac{dx_2}{dt} = X_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n$  où les  $X_i$  sont des polynômes entiers. Si  $t$  est considéré comme le temps, ces équations définiront le mouvement d'un point variable dans un espace de dimension  $n$ .

Considérons le jeu d'équations différentielles

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathfrak{S}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

avec

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \in E \subset \mathbb{R}^n \quad (2)$$

et

$$\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Le vecteur  $\mathfrak{S}(\mathbf{X})$  définit un champ de vecteurs vitesse dans  $E$  dont les composantes  $f_i$  sont supposées être continues et infiniment différentiables par rapport à tout  $x_i$  et  $t$ , c'est-à-dire qu'elles sont supposées être des fonctions  $C^\infty$  dans  $E$  dont les valeurs sont dans  $\mathbb{R}$ . De plus, ce champ de vecteurs satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Une solution du système (1) est une courbe trajectoire  $\mathbf{X}(t)$  tangente à  $\mathfrak{S}$  — excepté aux points fixes — dont les valeurs définissent les états du système dynamique. Puisqu'aucune des composantes  $f_i$  ne dépend explicitement du temps, le système est dit *autonome*.

Ainsi, les courbes trajectoires — des intégrales du système dynamique (1) — peuvent être regardées comme des courbes de dimension  $n$ . Elles possèdent des propriétés métriques locales, des **courbures**, qui peuvent être analytiquement déduites à partir de la formule de Frénet (voir section suivante) puisque seules les dérivées des courbes trajectoires sont impliquées dans la définition des courbures. Pour tout système dynamique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ , le concept de courbure peut être illustré comme suit. Une courbe de  $\mathbb{R}^2$  est une courbe plane dont la *torsion* s'annule. Une courbe de  $\mathbb{R}^3$  a deux courbures, la *courbure* et la *torsion*, correspondant respectivement à la première et la deuxième courbures. Les courbures mesurent la déviation de la courbe par rapport à une ligne droite en chacun de ces points. Rapidement, la torsion mesure l'intensité et le sens de la déviation de la courbe par rapport au plan osculateur défini comme le plan basé sur les vecteurs vitesse instantanée et accélération. Physiquement, une droite peut être déformée en une courbe tri-dimensionnelle en bandant (courbure) et en tordant (torsion). Une courbe de dimension  $n$  ( $n > 3$ ) a  $n - 1$  courbures qui peuvent être calculées selon une procédure de Gram-Schmidt. La variété de courbure du flot d'un système de dimension  $n$  s'écrit [8] :

$$\phi = \underbrace{\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathcal{J} \cdot \boldsymbol{\gamma})}_{\phi_S} + \underbrace{\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \dot{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{V})}_{\phi_{NS}}$$

où  $\phi_S$  est la composante stationnaire et  $\phi_{NS}$  la composante non stationnaire.

L'ensemble des points où la courbure du flot, c'est-à-dire la courbure de la trajectoire d'un système de dimension  $n$ , s'annule fournit directement une variété invariante de dimension  $n - 1$  dont les équations analytiques sont données par

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left( \ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \wedge \dots \wedge \overset{n}{\ddot{\mathbf{X}}} \right) = \det \left( \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dots, \overset{n}{\ddot{\mathbf{X}}} \right) = 0 \quad (4)$$

où  $\overset{n}{\ddot{\mathbf{X}}}$  représente les dérivées temporelles de  $\mathbf{X}$ . Pour une démonstration, voir [8]. Pour un système dynamique de dimension 3, l'ensemble de ces points forme une variété invariante de dimension 2 et dont les équations sont

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left( \ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \right) = \det \left( \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}} \right) = 0 \quad (5)$$

Dans ce cas, la variété est définie par les points où la torsion s'annule.

Tout système dynamique de dimension  $n$  est tel que

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathcal{J}\dot{\mathbf{X}} \quad (6)$$

où  $\mathcal{J}$  est la matrice Jacobienne du système. Dériver (6) par rapport au temps  $t$  conduit à

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathcal{J}\ddot{\mathbf{X}} + \frac{d\mathcal{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}}. \quad (7)$$

En injectant cette expression dans (4), nous obtenons

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left( \mathcal{J}\dot{\mathbf{X}} \wedge \mathcal{J}\ddot{\mathbf{X}} \right) + \dot{\mathbf{X}} \cdot \left( \ddot{\mathbf{X}} \wedge \frac{d\mathcal{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}} \right) \quad (8)$$

Ainsi, la partie stationnaire — non dépendante du temps — de  $\phi(\mathbf{X})$  s'écrit

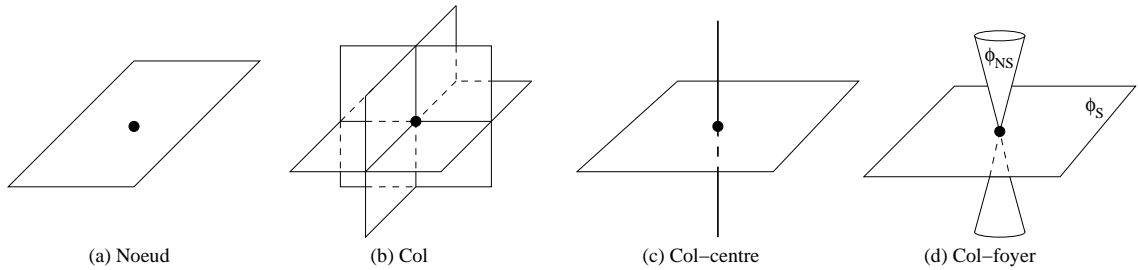
$$\phi_S(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left( \mathcal{J}\dot{\mathbf{X}} \wedge \mathcal{J}\ddot{\mathbf{X}} \right) \quad (9)$$

et la partie non stationnaire comme

$$\phi_{NS} = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left( \ddot{\mathbf{X}} \wedge \frac{d\mathcal{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}} \right). \quad (10)$$

Naturellement,  $\phi_S$  est associé à la composante linéaire du champ de vecteurs vitesse et  $\phi_{NS}$  à la composante non linéaire. Il a été établi [8] qu'au voisinage des points singuliers  $\mathbf{X}^*$  du flot, la variété de courbure du système (1) se confond avec le plan osculateur.

Il peut être montré que la composante stationnaire correspond au plan osculateur d'un point singulier intérieur (entouré par le flot). En conséquence, l'attracteur prend l'allure de  $\phi_S$  au voisinage de ce point singulier. Cette partie  $\phi_S$  ne peut être traversée par la trajectoire puisqu'elle est invariante sous l'action du flot. Dans le cas d'un point singulier de type col-foyer, la composante non stationnaire n'est pas nulle et définit deux ellipsoïdes prenant naissance sur le point singulier (Fig. 1d).



**Fig. 1.** Allures génériques de la variété de courbure du flot au voisinage des points singuliers.

### 3 Système de type Rössler

Le système de Rössler s'écrit [13] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}. \quad (11)$$

Le système est centré *via* un déplacement rigide, c'est-à-dire que le point singulier intérieur,  $F_-$ , est placé à l'origine de l'espace des phases  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Dans le nouveau système de coordonnées, les équations sont

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z - y_- - z_- \\ \dot{y} = x + ay + x_- + ay_- \\ \dot{z} = b + z(x + x_- - c) + z_-x + z_-(x - c) \end{cases} \quad (12)$$

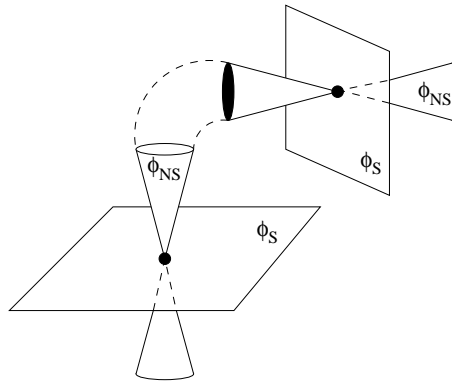
où  $\frac{x_-}{a} = -y_- = z_- = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$  sont les coordonnées du point singulier intérieur du système (11). Le système peut ensuite être réécrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = \tilde{b}x + z(x - \tilde{c}) \end{cases} \quad (13)$$

où  $\tilde{b} = z_-$  et  $\tilde{c} = c - x_-$ . Le système de Rössler (13) a un point singulier  $F_+$  localisé à l'origine de l'espace des phases et un autre localisé à

$$F_- = \begin{cases} x_- = \tilde{c} - a\tilde{b} \\ y_- = -\frac{x_+}{a} \\ z_- = \frac{x_+}{a} \end{cases} \quad (14)$$

La structure du flot au voisinage de l'origine du plan  $x$ - $y$  est gouvernée dans une large mesure par le point singulier de type col-foyer situé à l'origine de l'espace des phases (par la suite désigné comme point singulier intérieur). En conséquence le flot « spirale » autour de ce point. A plus grande échelle, le flot s'organise autour de la variété unidimensionnelle stable du second point singulier  $F_-$ . Selon les allures génériques des composantes stationnaires de la variété de courbure du flot identifiées dans la section précédente, un schéma pour cette variété peut être tracé comme cela est représenté Fig. 2. Le point singulier intérieur  $F_+$  a un plan associé à sa variété bidimensionnelle instable et un ellipsoïde est centré sur la variété unidimensionnelle stable. Le point extérieur  $F_-$  présente un ellipsoïde associé à la variété unidimensionnelle instable et un plan correspondant à la variété bidimensionnelle stable. Dans tous les systèmes étudiés ici, le point singulier intérieur a une variété bidimensionnelle instable et le point extérieur a une variété instable de dimension 1. A notre connaissance, il n'existe pas de système ayant un attracteur topologiquement équivalent à celui du système de Rössler qui serait organisé autour d'une variété stable de dimension 2.

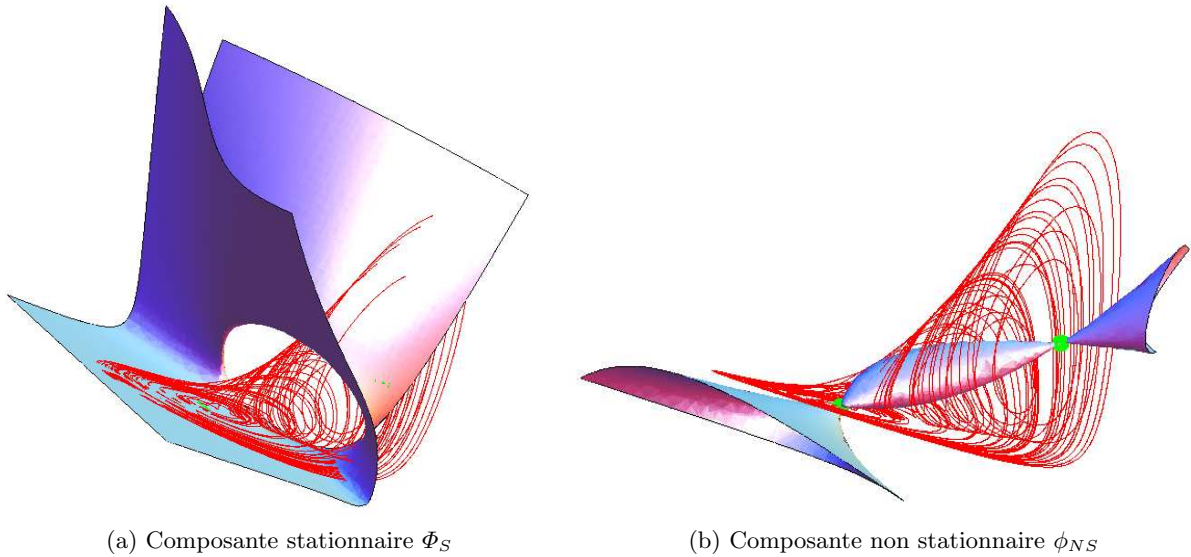


**Fig. 2.** Schéma de la variété de courbure du flot pour le système de Rössler. Deux ellipsoïdes issus des différents points singuliers se rejoignent pour former une « bulle ».

Ainsi, pour tout système à deux points singuliers, deux des quatre ellipsoïdes se rejoignent pour former une unique surface fermée. Puisque l'ellipsoïde émanant du point singulier extérieur se développe autour



de la variété unidimensionnelle instable, une courbe solution traversera cette surface excepté lorsqu'une connection hétérocline sera observée. Dans tous les autres cas, il existera un voisinage de la surface traversé par une courbe solution ; par conséquent, la surface n'est pas globalement solution du flot. Une première conséquence est qu'il n'est pas possible de plonger l'attracteur de Rössler à l'intérieur d'un tore de genre 1 dont le « trou » central se développerait selon cette portion fermée de la composante non stationnaire. La frontière toroïdale qui borne l'attracteur de Rössler doit nécessairement se structurer autour de la variété unidimensionnelle stable du point singulier intérieur, c'est-à-dire, en première approximation, l'axe  $z$ .



**Fig. 3.** Variété de courbure du flot pour le système de Rössler avec les valeurs de paramètres :  $a = 0.556$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$ .

La variété de courbure du flot est alors calculée analytiquement pour le système de Rössler. Elle est représentée avec l'attracteur chaotique Fig. 3. Lorsque la trajectoire se développe dans le plan  $x-y$ , elle est gouvernée principalement par la partie linéaire du système (13) : la composante stationnaire  $\Phi_S$  est alors tangente à l'attracteur. La trajectoire décolle du plan  $x-y$  sous l'action de la nonlinéarité et c'est la composante non stationnaire qui prend le relais dans la structuration de la trajectoire solution du système de Rössler. Elle pilote la trajectoire en la contraignant à « spiraler » autour. Nous remarquons par ailleurs, que la partie nonlinéaire présente la structure attendue, deux ellipsoïdes ouverts et deux ellipsoïdes formant une surface fermée. Cette structure a été retrouvée sur l'ensemble des systèmes à deux points singuliers ayant un attracteur de Rössler pour solution (Tab. 1).

## 4 Conclusion

La variété de courbure du flot peut être décomposée en deux composantes, l'une stationnaire correspondant à la partie linéaire du flot, et l'autre instationnaire associée à la partie nonlinéaire du flot. Lorsque la trajectoire solution du système est principalement gouvernée par la partie linéaire du système, la variété de courbure de flot est tangente à l'attracteur ; en d'autres termes, elle correspond au plan osculateur de la trajectoire. Lorsque la trajectoire est principalement sous l'action de la nonlinéarité, la composante instationnaire pilote la trajectoire et la contraint à s'enrouler autour d'elle. Cette variété se révèle un complément de choix aux points singuliers — par ailleurs solution de cette variété — dans la structuration de la trajectoire dans l'espace des phases. Si les points singuliers permettent de donner les grandes lignes de l'organisation des trajectoires dans l'espace des phases, la variété de courbure du flot

**Tab.1.** Coefficients spécifiques de chaque système étudié et présentant un attracteur de Rössler pour solution. Les coefficients ici reportés correspondent au système centré, c'est-à-dire lorsque le point singulier intérieur est localisé à l'origine de l'espace des phases.

Système	$\dot{x} =$					$\dot{y} =$					$\dot{z} =$							# points singuliers	Référence
	$x$	$y$	$z$	$xz$	$z^2$	$x$	$y$	$z$	$y^2$	$z^2$	$x$	$y$	$z$	$xy$	$xz$	$x^2$	$y^2$		
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$		
(1) Rössler	0	-1	-1	0	0	+1	+a	0	0	0	$\tilde{b}$	0	$-\tilde{c}$	0	+1	0	0	2	[13]
(2) Sprott F	0	-1	+1	0	0	+1	+a	0	0	0	0	0	-1	0	0	+1	0	2	[14]
(3) Sprott G	0	-1	+1	0	0	+1	+a	0	0	0	0	0	-b	+1	0	0	0	2	[14]
(4) Sprott H	0	-1	0	0	+1	+1	+a	0	0	0	+1	0	-1	0	0	0	0	2	[14]
(5) Sprott K	0	-1	0	+1	0	+1	+a	0	0	0	+1	0	-b	0	0	0	0	2	[14]
(6) Sprott M	0	-1	0	0	0	+a	0	+1	0	0	+b	0	-1	0	0	-1	0	2	[14]
(7) Sprott O	0	+1	0	0	0	+1	0	-1	0	0	+1	+a	0	0	+1	0	0	2	[14]
(8) Sprott P	0	+a	+1	0	0	-1	0	0	+1	0	+1	+1	0	0	0	0	0	2	[14]
(9) Sprott Q	0	-1	0	0	0	+a	+b	0	0	+1	+1	0	-1	0	0	0	0	2	[14]
(10) Sprott S	0	+1	0	0	0	0	-a	-b	0	0	+2	+1	0	0	0	+1	0	2	[14]

permet de profiler l'allure de l'attracteur. Il se révèle particulièrement utile de décomposer cette variété en ses composantes stationnaire et instationnaire.

### Références

1. J. P. ECKMANN & D. RUELLE, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Review of Modern Physics*, **57**, 617-656, 1985.
2. H. D. I. ABARBANEL, R. BROWN, J. J. SIDOROWICH & L. SH. TSIMRING. The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Review of Modern Physics*, **65** (4), 1331-1388, 1993.
3. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
4. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Physical Review Letters*, **91** (13), 134104, 2003.
5. C. LETELLIER, E. ROULIN & O. E. RÖSSLER, Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **28**, 337-360, 2006.
6. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Série IV, **2**, 151-217, 1886.
7. J.-M. GINOUX & B. ROSETTO, Differential geometry and mechanics applications to chaotic dynamical systems, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, **16** (4), 887-910, 2006.
8. J.-M. GINOUX, B. ROSSETTO & L. O. CHUA, Slow invariant manifolds as curvature of the flow of dynamical systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **18** (11), 3409-3430, 2008.
9. G. DARBOUX, Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Série 2, **2**, 60-96, 123-143, 151-200, 1878.
10. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Série IV, **1**, 167-244, 1885.
11. Z. FU & J. HEIDEL, Non-chaotic behavior in three-dimensional quadratic systems, *Nonlinearity*, **10**, 1289-1303, 1997.
12. J. C. SPROTT & S. J. LINZ, Algebraically simple chaotic flows, *International Journal in Chaos Theory and Applications*, **5**, 3-22, 2000.
13. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
14. J. C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50** (2), 647-650, 1994.

# Experimental verification of a modified fluctuation-dissipation theorem for a Brownian particle in a non-equilibrium steady state

J. R. Gomez-Solano, A. Petrosyan, S. Ciliberto, R. Chetrite, & K. Gawedzki

Laboratoire de Physique, CNRS UMR 5672, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France  
 juan.gomez.solano@ens-lyon.fr

**Abstract.** We verify experimentally a modified fluctuation-dissipation relation for displacement fluctuations of a micron-sized silica particle immersed in water in a non-equilibrium steady state (NESS) with non-vanishing probability current. A NESS is implemented by means of a toroidal optical trap created by a rotating laser beam with intensity modulation which exerts a constant non-conservative force on the particle against a sinusoidal potential on a circle. We measure the autocorrelation function of an observable related to the angular position of the particle, the corresponding integrated response function due to a small perturbation of the amplitude of the periodic potential, and a corrective term given by the constant probability current. We find that the correlation minus the corrective term times the inverse temperature of the surrounding water is equal to the integrated response. The results can be interpreted as an equilibrium-like fluctuation-dissipation relation in the Lagrangian frame moving at the mean local velocity of the particle determined by the probability current.

## 1 Introduction

The validity of the fluctuation-dissipation theorem (FDT) in systems out of thermal equilibrium has been the subject of intensive study during the last years. We recall that for systems in equilibrium with a thermal bath at temperature  $T$ , the FDT establishes a simple relation between the 2-time correlation function  $C(t-s)$  of a given observable and the linear response function  $R(t-s)$  of this observable to a weak external perturbation

$$\partial_s C(t-s) = k_B T R(t-s). \quad (1)$$

However, Eq. (1) is not necessarily fulfilled out of equilibrium and violations are observed in a variety of systems such as glassy systems [1,2], granular matter [3] and biophysical systems [4].

The lack of a general framework describing FD relations in non-equilibrium situations has motivated some theoretical works devoted to a comprehensive study of this issue in simple stochastic systems [5,6,7,8,9,10]. In this spirit, a modified fluctuation-dissipation theorem (MFDT) has been recently found for non-equilibrium steady systems with few degrees of freedom evolving according to a Langevin equation possibly including non-conservative forces [10]. In particular, this MFDT holds for the overdamped motion of a particle on a circle ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) in the presence of a periodic potential  $U(\theta) = U(\theta + 2\pi)$  and a non-conservative force  $F(\theta) = F(\theta + 2\pi)$

$$\dot{\theta} = -\partial_\theta U(\theta) + F(\theta) + \zeta, \quad (2)$$

where  $\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta \neq 0$ ,  $\zeta$  is a white noise term of mean  $\langle \zeta(t) \rangle = 0$  and covariance  $\langle \zeta(t) \zeta(s) \rangle = 2D\delta(t-s)$ , with  $D$  the diffusivity. The non-equilibrium steady state (NESS) associated to Eq. (2) is described by a constant non-vanishing probability current  $j$  along the circle and by an invariant probability density function  $\rho_0(\theta)$  that allow to define a local mean velocity  $v_0(\theta) = j/\rho_0(\theta)$ . For a stochastic system in NESS evolving according to Eq. (2), the MFDT reads

$$\partial_s C(t-s) - b(t-s) = k_B T R(t-s), \quad (3)$$

where the 2-time correlation of a given observable  $O(\theta)$  is defined by

$$C(t-s) = \langle O(\theta(t))O(\theta(s)) \rangle_0, \quad (4)$$

and the linear response function to a time dependent perturbation  $h(t)$  is given by the functional derivative

$$R(t-s) = \left. \frac{\delta}{\delta h(s)} \right|_{h=0} \langle O(\theta(t)) \rangle_h. \quad (5)$$

In Eq. (4)  $\langle \dots \rangle_0$  stands for an ensemble average over NESS distributed according to  $\rho_0$  whereas in Eq. (5),  $\langle \dots \rangle_h$  denotes the average over the time-dependent perturbed states. In the MFDT (3), the correlation  $b(t-s)$  is given by

$$b(t-s) = \Theta(t-s) \langle O(\theta(t))v_0(\theta(s))\partial_\theta O(\theta(s)) \rangle_0, \quad (6)$$

where  $\Theta$  is the Heaviside step function. This new term plays the role of a corrective term of  $C(t-s)$  in the usual fluctuation-dissipation relation (1) taking into account the effect of the probability current.

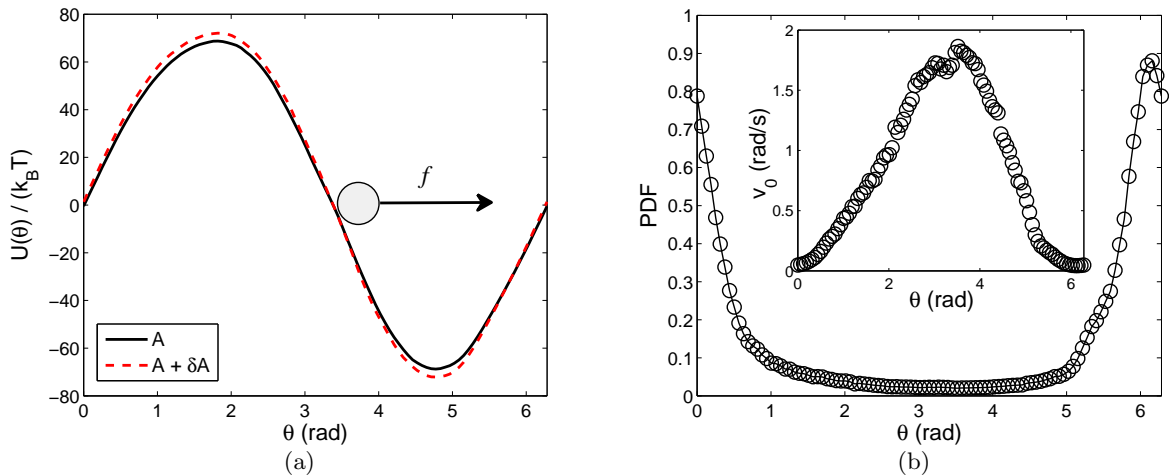
In the present work, we firstly show the experimental results describing the NESS attained by a micron-sized particle moving in a toroidal optical trap whose dynamics is claimed to be modeled by the Langevin dynamics of Eq. (2), namely the constant probability current, the invariant density and the local mean velocity. Further, by computing the correlation function  $C(t)$ , the integrated corrective term  $B(t) \equiv \int_0^t b(t-s)ds$  and by directly measuring the integrated response function  $\chi(t) = \int_0^t R(t-s)ds$  for a proper choice of the observable  $O(\theta)$ , we verify that Eq. (3), in its integral form,

$$C(0) - C(t) - B(t) = k_B T \chi(t), \quad (7)$$

is satisfied by this system within experimental accuracy. Accordingly, we follow the Lagrangian-frame interpretation discussed in [10] which implies that an equilibrium-like FD relation for the particle motion (similar in form to Eq. (1)) can be restored in the reference frame moving with the local mean velocity  $v_0$ .

## 2 Experimental description

In order to create experimentally a system with the Langevin dynamics of Eq. (2) in NESS, we prepare a small sample cell containing a extremely small volume fraction of spherical silica particles of radius  $r = 1 \mu\text{m}$  diluted in ultrapure water. The experiment is performed at a room temperature  $T = 20.0 \pm 0.5^\circ \text{C}$  at which the dynamic viscosity of water is  $\eta = (1.002 \mp 0.010) \times 10^{-3} \text{ Pa s}$ . The sample cell is placed in an optical tweezers system with the purpose of trapping a single particle and isolate it from the rest during the experiment. Once the particle under study is far enough from all sources of perturbations, it is trapped by a toroidal optical trap. This kind of trap consists on a Nd :YAG diode pumped solid state laser beam (Laser Quantum,  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ) focused by a microscope objective ( $63\times$ ,  $\text{NA} = 1.4$ ) whose waist represents the smallest circle of the torus scanning a larger circle of radius  $a = 4.12 \mu\text{m}$  in the horizontal plane at a rotation frequency of 200 Hz. The rotation of the focused beam is accomplished by means of two coupled acousto-optic deflectors working with a  $\pi/2$  phase shift. The toroidal trap is created  $10 \mu\text{m}$  above the inner bottom surface of the sample cell where hydrodynamic boundary-coupling effects on the particle motion are negligible. At a rotation frequency of 200 Hz, the laser beam is not able to hold the particle but drags it regularly a small distance when passing through it [11]. The diffusive motion of the particle along the radial direction during the absence of the beam is small enough so that it remains confined in the circle of radius  $a$ . Therefore the angular position of the particle  $\theta$  (measured modulo  $2\pi$ ) is the only relevant degree of freedom of the dynamics. In addition, the laser power is sinusoidally modulated around 30 mW with an amplitude of 7% of the mean power, synchronously with the deflection of the beam at 200 Hz in such a way that a static sinusoidal intensity profile is created along the circle. This trapping situation acts a constant non-conservative force  $f$  associated to the mean kick which pushes the particle against a periodic sinusoidal potential  $U(\theta) = A \sin \theta$  due to the periodic intensity profile. The



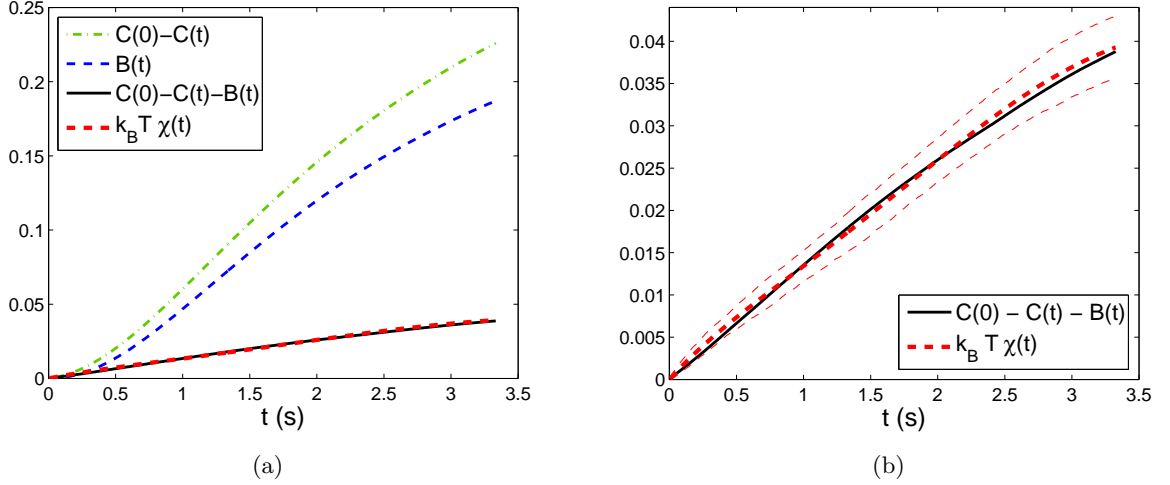
**Fig. 1.** (a) Profile of the periodic potential associated to the laser intensity modulation of the toroidal trap. The arrow indicates the direction of the non-conservative force  $f$ . (b) Invariant probability density function of the angular position of the particle in NESS. Inset : Local mean velocity of the particle.

calibration and the determination of the values of the parameters  $f$  and  $A$  is accomplished by means of the method described in [12]. We obtain  $f = 6.60 \times 10^{-14}$  N and  $A = 68.8k_B T = 2.78 \times 10^{-19}$  J. The experimental potential profile is shown in Fig. 1(a) (black solid line). In this way, the time evolution of  $\theta$  is claimed to follow the Langevin dynamics of Eq. (2) [12] with  $F = f/(6\pi\eta r a) = 0.85$  rad s $^{-1}$ ,  $B = A/(6\pi\eta r a^2) = 0.87$  rad s $^{-1}$ , and  $D = k_B T/(6\pi\eta r a^2) = 1.26 \times 10^{-2}$  rad $^2$  s $^{-1}$ . Images of the intensity contrast of the particle on the focal plane  $x - y$  determined by the circle of radius  $a$  are recorded with a resolution of  $160 \times 130$  pixels at a sampling rate of 150 frames per second for detection.

Tracking of the particle barycenter  $(x(t), y(t))$  is achieved with an accuracy of a few nanometers from which the angular position of the particle  $\theta(t)$  with respect to the trap center is found. We obtained 200 time series  $\{\theta(t)\}$  of duration 66.67 s with different initial conditions  $\{\theta_0 = \theta(0)\}$  sampled every 5 minutes for the determination of the stationary quantities  $C$  and  $B$  of Eq. (3). Additionally, 500 times series of duration 100 s were specially devoted for the determination of  $\chi$ . In this case during each interval of 100 s we apply a Heaviside step-like perturbation to the amplitude of the potential  $A(t) = A + \delta A[\Theta(t - t_0) - \Theta(t - (t_0 + T))]$  with  $T = 33.33$  s the duration of the perturbation,  $0 < t_0 < 66.67$  s the instant at which it is switched on, and  $\delta A$  the intensity of the perturbation. This is accomplished by suddenly switching the laser power modulation from 7% to 7.35% of the mean power (30 mW). By keeping constant the mean power during the switch we assure that the value of  $f$  remains also constant. The experimental shape of the perturbed potential of amplitude  $A + \delta A$  is shown in Fig. 1(a) (red dashed line). In this way, we extracted 500 *perturbed* trajectories  $\{\theta(t)\}_{\delta A}$  of duration  $T = 33.33$  s. This duration is long enough to assure that after switching off the perturbation the system actually has attained a NESS before the beginning of the next step-like perturbation. We checked that the value of  $\delta A$  obtained by means of this procedure ( $\delta A = 0.05A$ ) is small enough to remain within the linear response regime for time lags  $0 \leq t \leq 3.5$  s. For  $3.5 \text{ s} < t$  nonlinearities become important. Consequently, the response function is only measured for the first 3.5 s of the perturbed trajectories where linear response regime holds.

### 3 Results

We check that after a short transient, the particle motion attains a NESS described by a non-vanishing constant probability current  $j$  along the torus in the orientation of the laser beam rotation and by an



**Fig. 2.** a) Comparison between the different terms needed to verify Eq. (7), as functions on the time lag  $t$ . b) Expanded view of the comparison between  $C(0) - C(t) - B(t)$  and  $k_B T \chi(t)$  in Fig 2(a). The thin red dashed lines represent the error bars of the measurement of the integrated response.

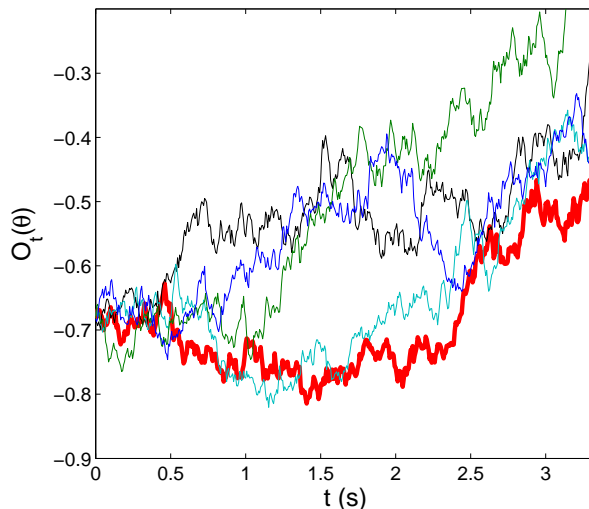
invariant probability density function  $\rho_0(\theta)$ . The probability current is related to the global mean velocity of the particle by the expression  $j = \langle \dot{\theta} \rangle_0 / (2\pi)$ . Hence, we determine the value of  $\langle \dot{\theta} \rangle_0$  from the slope of the linear fit of the 200 trajectories (not taken modulo  $2\pi$ ) leading to  $j = 3.76 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . The invariant density shown in Fig. 1(b) is computed from the histogram of each time series  $\{\theta(t)\}$  averaged over the 200 different initial conditions. Note that in the corresponding equilibrium situation ( $f = 0$ ) the probability maximum would be located at the minimum of  $U(\theta)$  ( $\theta = 3\pi/2$ ). However, in NESS the presence of the non-conservative force  $f > 0$  shifts the maximum of  $\rho_0(\theta)$  in its own direction. The position of the maximum depends on the value of  $f$ . In order to enhance the stochastic nature of the dynamics, by choosing  $F < B$  we purposely created a situation in which the particle stays long time around the maximum  $\theta \approx 6$  whereas the rest of the circle is rarely visited during the mean rotation. In Fig. 1(b) we also show the local mean velocity  $v_0(\theta)$  of the particle associated to the probability current through the torus. The local mean velocity is given by  $v_0(\theta) = j / \rho_0(\theta)$  and its value at a given position  $\theta$  represents the average of the instantaneous velocity  $\dot{\theta}$  restricted to the ensemble of trajectories passing through  $\theta$ .

With the purpose of determining correctly the different terms involved in Eq. (3), the observable  $O(\theta)$  must be chosen consistently in both sides of such relation. The change of the potential  $U(\theta) \rightarrow U(\theta) + \delta A \sin \theta$  due the application of the Heaviside step perturbation of its amplitude implies that  $O(\theta) = \sin \theta$  is the observable that must be studied with  $-\delta A$  as its conjugate variable. Hence, we compute the correlation function  $C(t)$ , the corrective term  $B(t)$  (with  $\partial_\theta O(\theta) = \cos \theta$  and the experimental curve  $v_0(\theta)$  shown in Fig. 1(b)) and the integrated response  $\chi(t)$  for this observable as a function of the time lag  $t$ .

The determination of  $C(t)$  and  $B(t)$  is straightforward according to Eqs. (4) and Eqs. (6). The stationarity of the system allows to perform an average over the time origin in addition to the ensemble average  $\langle \dots \rangle_0$  over the 200 different time series devoted to this purpose, which increases enormously the statistics. The dependence of the correlation term  $C(0) - C(t)$  and the term  $B(t)$  on the time lag  $t$  is shown in Fig. 2(a) in dotted-dashed green and blue dashed lines, respectively.

On the other hand, some subtleties must be taken into account for the determination of  $\chi$  in the current non-equilibrium situation. From the linear response function defined in Eq. (5), the integrated response  $\chi$  is given by

$$\chi(t) = \frac{\langle O(\theta(t)) \rangle_{\delta A} - \langle O(\theta(t)) \rangle_0}{-\delta A}. \quad (8)$$



**Fig. 3.** Example of trajectories used to compute the intergrated response. For a given perturbed trajectory (thick red line) a set of unperturbed trajectories whose initial value is equal to that of the perturbed one at  $t = 0$  (thin lines) is found.

In Eq. (8) the value  $t = 0$  corresponds to instant when the perturbation of the potential amplitude  $\delta A$  is switched on. The numerator represents the mean deviation of the perturbed trajectories with respect to the unperturbed ones and its expression is exact only for a continuous sample of trajectories. However, due to the finite number of trajectories available in practice, some care is needed in order to compute it correctly. For a given perturbed trajectory  $\theta(t)_{\delta A}$  we look for an unperturbed one  $\theta(t)$  among the 200 time series  $\{\theta(t)\}$  starting at a time  $t^*$  such that  $O(\theta(t^*)) = O(\theta(0)_{\delta A})$ . In order to improve the statistics, for each  $\theta(t)_{\delta A}$  among the 500 perturbed time series  $\{\theta(t)\}_{\delta A}$  we seek as many unperturbed trajectories as possible satisfying the initial condition for  $t^*$ , as shown in Fig. 3. The unperturbed trajectories found in this way allow us to define a subensemble over which the average  $\langle O(\theta(t)) \rangle_0$  in Eq. (8) is computed at a given  $t$ . The average  $\langle O(\theta(t)) \rangle_{\delta A}$  is simply computed over the 500 perturbed time series. In Fig. 2(a) we show in thick dashed red line the dependence of the integrated response on  $t$ .

The comparison between the different terms needed to verify Eq. (7) is shown in Fig. 2(a), for the time lag interval  $0 < t < 3.5$  s where the linear response regime is valid. As expected, the usual FD relation (1) is strongly violated in this NESS with the correlation term  $C(0) - C(t)$  being one order of magnitude larger than the response term  $k_B T \chi(t)$ . However, when we take into account the term  $B(t)$  associated to the probability current as a correction of  $C(0) - C(t)$ , the term  $C(0) - C(t) - B(t)$  shown in solid black line in Fig. 2(a), becomes equal to  $k_B T \chi(t)$ . In Fig. 2(b) we show an expanded view of the of the curves  $C(0) - C(t) - B(t)$  and  $k_B T \chi(t)$ . We observe that within experimental accuracy, the agreement between both terms is quite good, verifying the integral form of the MFD relation given by Eq. (7). The error bars of the integrated response curve at each time lag  $t$  are obtained from the standard deviation of the subensemble of unperturbed trajectories found for each perturbed trajectory, like the ones shown in thin solid lines in Fig. 3. As shown in [10], a direct interpretation of the verification of this MFDT for the fluctuations of the angular position of the silica particle in NESS can be rendered in the Lagrangian frame moving with the local mean velocity shown in Fig. 1(b) along the toroidal trap. In this frame, the time-independent observable  $O(\theta) = \sin \theta$  is replaced by an explicitly time-dependent one  $O(t, \theta)$  evolving according to an advection equation with velocity field  $v_0(\theta)$  for which the MFD relation reads

$$\partial_s C(t, s) = k_B T R(t, s). \quad (9)$$

Thus, an FD relation similar in form to the equilibrium one (Eq. (1)), can be restored in the corresponding Lagrangian frame of this experimental system.

## 4 Conclusion

We have verified experimentally a modified fluctuation-dissipation relation describing the dynamics of a system with one degree of freedom in NESS, namely a Brownian particle moving in a toroidal optical trap. We point out that the experimental results reported here represent an alternative approach of a fluctuation-dissipation relation extended to non-equilibrium stationary situations from the one described in [9] for velocity fluctuations relative to the local mean velocity for a similar experimental system. The approach followed in our work relies in an observable related to the particle position and besides quantifying the extent of the violation of the usual FDT by means of the term  $B$ , a transparent interpretation of the violation is possible.

## Références

1. A. CRISANTI & J. RITORT, *Journal of Physics A* **36**, R181 (2003).
2. P. CALABRESE & A. GAMBASSI, *Journal of Physics A* **38**, R133 (2005).
3. A. BARRAT, V. COLIZZA & V. LORETO, *Physical Review E* **66**, 011310.1 (2002).
4. K. HAYASHI & M. TAKANO, *Biophysical Journal*, **93**, 895 (2007).
5. T. HARADA & S. SASA, *Physical Review Letters* **95**, 130602 (2005).
6. C. MAES, K. NETOCNY & B. WYNANTS, *Physica A* **387**, 2675 (2008).
7. T. SPECK & U. SEIFERT, *Europhysics Letters* **74** (2006).
8. T. SPECK, V. BLICKLE, C. BECHINGER & U. SEIFERT, *Europhysics Letters* **79**, 30002 (2007).
9. V. BLICKLE, T. SPECK, C. LUTZ, U. SEIFERT & C. BECHINGER, *Physical Review Letters* **98**, 210601 (2007).
10. R. CHETRITTE, G. FALKOVICH & K. GAWEDZKI, *Journal of Statistical Mechanics*, P08005 (2008).
11. L. FAUCHEUX, G. STOLOVITZKY & A. LIBCHABER, *Physical Review E* **51**, 5239 (1995).
12. V. BLICKLE, T. SPECK, U. SEIFERT & C. BECHINGER, *Physical Review E* **75**, 060101(R) (2007)



# Sur les systèmes à événements discrets non linéaires dans l'algèbre des dioïdes

Samir Hamaci<sup>1</sup> & Jean-Louis Boimond<sup>2</sup>

<sup>1</sup> EPMI/ECS, 13 bvd de l'Hautil, F- 95092 Cergy-Pontoise

<sup>2</sup> LISA, 62 avenue Notre Dame du Lac, F- 49000 Angers  
s.hamaci@epmi.fr, Boimond@istia.univ-angers.fr

**Résumé.** Ce travail porte sur l'analyse des systèmes à événements discrets modélisables par des graphes d'événements temporisés avec multiplicateurs. Ces modèles n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre des dioïdes. Cette non linéarité est due à la présence des poids sur les arcs. Pour pallier à ce problème de non linéarité, on propose une méthode de linéarisation de ces graphes, dans le but d'obtenir des représentations linéaires dans l'algèbre  $(\min, +)$ , ceci afin d'appliquer certains résultats développés dans le cadre de l'analyse des systèmes linéaires dans les dioïdes. Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, nous procédons à un ajout ou à un retrait de jetons (ressources) dans le graphe, afin de satisfaire la condition de linéarisation.

**Abstract.** We are interested to the analysis of timed event graphs with multipliers. The dynamical equation modelling such graphs are nonlinear in  $(\min, +)$  algebra. This nonlinearity is due to multipliers and prevents from applying usual results used in dioid algebra. As an alternative, we propose a linearization method of timed event graphs with multipliers in  $(\min, +)$  algebra. Lower and upper linear approximated models are proposed when linearization condition is not satisfied.

## 1 Introduction

Les réseaux de Petri sont des modèles graphiques souvent utilisés pour représenter les systèmes à événements discrets. Ils sont largement utilisés pour modéliser, évaluer, voire piloter de tels systèmes.

Les systèmes mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation peuvent être modélisés par des réseaux de Petri particuliers, appelés graphes d'événements temporisés (GET). Ces derniers admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique appelée l'algèbre des dioïdes (l'algèbre  $(\min, +)$  étant un exemple de dioïde) [1,4]. Cette représentation est bien adaptée pour aborder notamment les problèmes d'évaluation de performances ou de commande.

Néanmoins, les techniques développées dans le cadre des systèmes à événements discrets atteignent leur limite lorsque la taille du système considéré est importante (du fait du nombre important d'entités). Il s'avère alors utile d'utiliser des GET à arcs pondérés, encore appelés GET avec multiplicateurs (GETM), ce qui permet de réduire la taille du modèle.

Contrairement aux GET, les GETM n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre  $(\min, +)$ . Cette non linéarité — de par les poids sur les arcs — est due à la présence de parties entières dans le modèle  $(\min, +)$  régissant l'évolution dynamique de ces graphes. Pour pallier au problème de non linéarité et pour pouvoir appliquer certains résultats développés dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, une méthode de linéarisation sera présentée. Cette méthode a pour but de linéariser le modèle mathématique régissant l'évolution dynamique des GETM, sous réserve de vérifier une condition de linéarisation sur le marquage initial, ceci afin d'obtenir un modèle  $(\min, +)$  linéaire. Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, nous procédons à un ajout ou à un retrait de jetons (ressources) dans le graphe, afin de satisfaire la condition de linéarisation. Cette technique d'analyse nous permet d'encadrer la dynamique du GETM entre deux bornes : une valeur supérieure obtenue par l'ajout d'un nombre minimal de jetons dans le graphe, et une valeur inférieure obtenue par le retrait d'un nombre minimal de jetons. Pour illustrer cette méthode, un exemple d'application sera présenté.

## 2 Equation récurrentes des GETM's

On introduit brièvement la définition et quelques propriétés d'une classe des réseaux de Petri. Pour plus de détails [2]. Un graphe d'évènements temporisé (GET) est un réseau de Petri tel que toute place a exactement une transition en amont et une transition en aval. Les poids des arcs sont tous unitaires. Ces modèles modélisent les systèmes à évènements discrets mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation. Ils admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique appelée l'algèbre des dioïdes [1].

Un dioïde  $\mathcal{D}$  est un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées  $\oplus$  (addition) et  $\otimes$  (multiplication), associatives et ayant chacune un élément neutre, noté respectivement  $\varepsilon$  et  $e$ , telles que  $\oplus$  est commutative et idempotente (*c'est-à-dire*,  $a \oplus a = a$ ). De plus, la loi  $\otimes$  est distributive par rapport à la loi  $\oplus$ , et l'élément neutre  $\varepsilon$  est absorbant pour le produit (*c'est-à-dire*,  $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ ). Notons que le symbole  $\otimes$  est souvent omis.

### Exemple

$\mathbb{Z}_{min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$  est un dioïde commutatif où la loi additive  $\oplus$  correspond à l'opération  $\min$ ; la loi multiplicative  $\otimes$  est équivalente à l'addition usuelle. L'élément zéro de  $\mathbb{Z}_{min}$  est  $\varepsilon = +\infty$  et l'élément identité est  $e = 0$ . Ce dioïde est appelé *l'algèbre (min, +)*.

On note  $\bullet q$  (resp.,  $q \bullet$ ) l'ensemble des places situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la transition  $n_q$ . Similairement,  $\bullet p$  (resp.,  $p \bullet$ ) représente l'ensemble des transitions situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la place  $p$ .

A la différence du modèle d'état classiquement associé à un RdP, l'état est associé non plus aux places d'un GET mais à ses transitions. La variable d'état considérée est un compteur d'évènements  $x_q(t)$ , défini de  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ ,  $t \mapsto x_q(t)$ , où  $x_q(t) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  correspond au nombre de tirs de la transition  $x_q$  ayant lieu jusqu'à la date  $t$ .

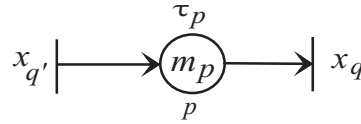


Fig. 1. GET élémentaire.

Pour illustrer l'évolution d'un compteur associé à la transition  $x_q$  d'un GET, considérons le GET élémentaire suivant (Fig. 1) :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (m_p + x_{q'}(t - \tau_p)). \quad (1)$$

On remarque que cette équation est non linéaire dans l'algèbre usuelle de par la présence de l'opérateur  $\min$  qui modélise le phénomène de synchronisation<sup>1</sup> au niveau de la transition  $x_q$ . En revanche, elle se décrit de façon linéaire dans le dioïde  $\mathbb{Z}_{min}$  comme suit :

$$x_q(t) = \bigoplus_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (m_p \otimes x_{q'}(t - \tau_p)). \quad (2)$$

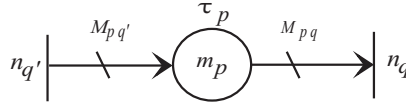
Dans le cas où le poids d'un arcs est supérieur à 1, le GET devient pondéré. Ce type de modèle est appelé graphe d'évènements temporisés avec multiplieurs, noté GETM.

<sup>1</sup> Dans un GET, le phénomène de synchronisation se produit lorsque plusieurs arcs convergent sur une même transition.

*Assertion* L'évolution du compteur associé à la transition  $n_q$  du GETM élémentaire est donnée par l'équation suivante :

$$n_q(t) = \bigoplus_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} [M_{qp}^{-1}(m_p + M_{pq'}n_{q'}(t - \tau_p))]. \quad (3)$$

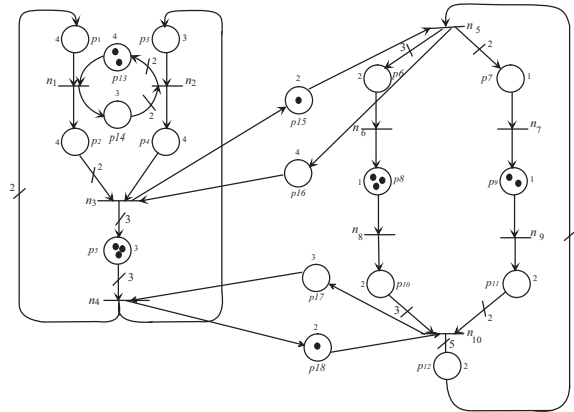
Dans la suite, les GETM considérés sont *consistant* (c'est-à-dire, il existe un T-invariant  ${}^2\theta$  couvrant toutes les transitions :  $\{q \in T | \theta(q) > 0\} = T$ ) et *conservatif* (c'est-à-dire il existe un P-invariant  ${}^3 Y$  couvrant toutes les places :  $\{p \in P | Y(p) > 0\} = P$ ).



**Fig. 2.** GETM élémentaire.

L'évolution dynamique du GETM représenté Fig. 2 est décrite par les équations récurrentes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(t) = \min(2 + 2n_2(t - 4), 2n_4(t - 4)), \\ n_2(t) = \min(\lfloor \frac{n_1(t-3)}{2} \rfloor, n_4(t - 3)), \\ n_3(t) = \min(\lfloor \frac{n_1(t-4)}{2} \rfloor, n_2(t - 4), n_5(t - 4)), \\ n_4(t) = \min(\lfloor \frac{3+3n_3(t-3)}{3} \rfloor, n_{10}(t - 3)), \\ n_5(t) = \min(1 + n_3(t - 2), n_{10}(t - 2)), \\ n_6(t) = 3n_5(t - 2), \\ n_7(t) = 2n_5(t - 1), \\ n_8(t) = 3 + n_6(t - 1), \\ n_9(t) = 2 + n_7(t - 1), \\ n_{10}(t) = \min(\lfloor \frac{n_8(t-2)}{3} \rfloor, \lfloor \frac{n_9(t-2)}{2} \rfloor). \end{array} \right.$$



**Fig. 3.** GETM.

<sup>2</sup> Un vecteur  $\theta \in \mathbb{N}^T$  tel que  $\theta \neq 0$  et  $W\theta = 0$  est un *T-invariant* ( $W$  est la matrice d'incidence).

<sup>3</sup> Un vecteur  $Y \in \mathbb{N}^P$  tel que  $Y \neq 0$  et  $Y^t W = 0$  est un *P-invariant*.

Contrairement aux GET, les GETM n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre  $(\min, +)$ . Cette non linéarité — de par les poids sur les arcs — est due à la présence de parties entières dans le modèle  $(\min, +)$  régissant l'évolution dynamique de ces graphes. Pour pallier à ce problème de non linéarité et pouvoir, en suite, appliquer les résultats développés dans le cadre de l'analyse des systèmes linéaires dans l'algèbre  $(\min, +)$ , on propose une méthode de linéarisation du modèle mathématique associé à la dynamique des ces modèles.

### 3 Linéarisation des graphes d'évènements temporisés avec multipliers

Cette méthode a pour principe d'exprimer chaque composante de  $N$  en fonction d'une composante de  $X$ . Le fait que le GETM considéré soit consistant implique l'existence d'un T-invariant sur les transitions. En effet, chaque compteur  $n_q(t)$  associé à la transition  $n_q$  du GETM s'exprime comme suit :

$$\forall q \in \mathcal{T}, \forall t \in \mathbb{Z}, n_q(t) = \theta_q x_q(t), \quad (4)$$

où

- $n_q(t)$  est le compteur associé à la transition  $n_q$  du GETM,
- $\theta_q$  est la composante  $(\in \mathbb{N}^*)$  du T-invariant associée à la transition  $n_q$  du GETM.

#### 3.1 Linéarisation exacte des graphes d'évènements temporisés discrets avec multipliers

Pour que le changement de variable (4) soit possible, c'est-à-dire pour que le GETM soit linéarisable, chaque compteur  $x_q(t)$  doit appartenir au dioïde  $\mathbb{Z}_{min}$ . La proposition suivante donne la condition pour que le GETM soit linéarisable.

**Proposition** Un GETM est *linéarisable* si :

$$\forall q \in \mathcal{T}, \forall p \in \bullet q, \quad \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}. \quad (5)$$

*Preuve* Chaque compteur  $n_q(t)$  d'un GETM satisfait la relation suivante :

$$n_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \lfloor M_{qp}^{-1} (m_p + M_{pq'} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor.$$

En utilisant le changement de variable (4) et la distributivité de la multiplication par rapport à l'opérateur  $\min$ , on obtient l'expression  $x_q(t)$  suivante :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \frac{M_{pq'}}{M_{qp}} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor.$$

Notons  $\theta = (\theta_1 \ \theta_2 \dots \theta_n)^t$  le vecteur T-invariant. Ce vecteur satisfait l'expression  $C \times \theta = 0$ , où  $C$  est la matrice d'incidence associée au GETM. Il en résulte, sachant que les graphes sont consistants et conservatifs [3], que :

$$\forall q', q \in \mathcal{T} \quad p \in P, M_{qp} \theta_q - \theta_{q'} M_{pq'} = 0.$$

De cette relation, on déduit que :  $\frac{\theta_q}{M_{pq'}} = \frac{\theta_{q'}}{M_{qp}}$ , par conséquent,  $x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \frac{\theta_q}{\theta_{q'}} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor$ , c'est-à-dire,  $x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \theta_q x_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor$ . Puisque  $\theta_q x_{q'}(t - \tau_p)$  est un entier, nous obtenons :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor + x_{q'}(t - \tau_p)), \quad (6)$$

ce qui correspond à une équation récurrente  $(\min, +)$  linéaire dès lors que  $\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor \in \mathbb{N}$ .

### 3.2 Linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons

Cette méthode a pour principe d'approcher autant que possible, en utilisant la condition de linéarisation, le comportement du GETM initial. Il en résulte une approximation par valeur inférieure (resp., supérieure) obtenue par un retrait (resp., ajout) minimal de jetons dans les places ne satisfaisant pas la condition de linéarisation. On note  $\underline{X}$  (resp.,  $\overline{X}$ ) le vecteur d'état du GET ordinaire obtenu à l'issue de la linéarisation approchée par retrait (resp., ajout) de jetons dans le GETM.

En reprenant le même raisonnement que celui permettant d'établir la proposition, nous obtenons :

$$\underline{x}_q(t) = \min_{p \in \bullet_q, q' \in \bullet_p} \left( \frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{(m_p - \underline{m}_p)}{M_{qp}} \rfloor + \underline{x}_{q'}(t - \tau_p) \right), \quad (7)$$

où  $\underline{m}_p$  est le nombre minimum de jetons retirés de la place  $p$  tel que  $\lfloor \frac{m_p - \underline{m}_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}$ . De même, on a :

$$\overline{x}_q(t) = \min_{p \in \bullet_q, q' \in \bullet_p} \left( \frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{(m_p + \overline{m}_p)}{M_{qp}} \rfloor + \overline{x}_{q'}(t - \tau_p) \right), \quad (8)$$

où  $\overline{m}_p$  est le nombre minimum de jetons ajoutés dans la place  $p$  tel que  $\lfloor \frac{m_p + \overline{m}_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}$ . Sachant que le retrait (resp., l'ajout) de jetons dans un GETM ralentit (resp., accélère) l'évolution du graphe, on a par conséquent :

$$\forall q, \quad \theta_q \underline{x}_q(t) = \underline{n}_q(t) \leq n_q(t) \leq \overline{n}_q(t) = \theta_q \overline{x}_q(t).$$

### 3.3 Exemple

Considérons le GETM représenté par la figure 3. Ce graphe admet le T-invariant suivant

$$\theta^t = (2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1).$$

*Linéarisation exacte* On vérifie que chaque marquage d'une place satisfait la condition de linéarisation, ce qui signifie que le GETM est linéarisable. En utilisant le changement de variable (4), on obtient le modèle  $(\min, +)$  linéaire suivant, issu de l'utilisation de l'équation (6) :

$$\begin{cases} x_1(t) = \min(1 + x_2(t-4), x_4(t-4)), \\ x_2(t) = \min(x_1(t-3), x_4(t-3)), \\ x_3(t) = \min(x_1(t-4), x_2(t-4), x_5(t-4)), \\ x_4(t) = \min(1 + x_3(t-3), x_{10}(t-3)), \\ x_5(t) = \min(1 + x_3(t-2), x_{10}(t-2)), \\ x_6(t) = x_5(t-2), \\ x_7(t) = x_5(t-1), \\ x_8(t) = 1 + x_6(t-1), \\ x_9(t) = 1 + x_7(t-1), \\ x_{10}(t) = \min(x_8(t-2), x_9(t-2)). \end{cases}$$

**Linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons :** Pour le marquage initial suivant :  $M(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$ , on note que la place  $p_1$ , marqué avec un jeton, ne satisfait pas la condition de linéarisation, ce qui motive l'utilisation de la méthode de *linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons* dans le graphe. Le retrait d'un jeton dans la place  $p_1$  permet de vérifier la condition de linéarisation, de même que l'ajout d'un jeton dans cette place. L'utilisation des

équations (7) et (8) permet d'obtenir les modèles linéaires approchés suivants :

$$\begin{cases} \underline{x}_1(t) = \min(1 + \underline{x}_2(t-4), \underline{x}_4(t-4)), \\ \underline{x}_2(t) = \min(\underline{x}_1(t-3), \underline{x}_4(t-3)), \\ \underline{x}_3(t) = \min(\underline{x}_1(t-4), \underline{x}_2(t-4), \underline{x}_5(t-4)), \\ \underline{x}_4(t) = \min(1 + \underline{x}_3(t-3), \underline{x}_{10}(t-3)), \\ \underline{x}_5(t) = \min(1 + \underline{x}_3(t-2), \underline{x}_{10}(t-2)), \\ \underline{x}_6(t) = \underline{x}_5(t-2), \\ \underline{x}_7(t) = \underline{x}_5(t-1), \\ \underline{x}_8(t) = 1 + \underline{x}_6(t-1), \\ \underline{x}_9(t) = 1 + \underline{x}_7(t-1), \\ \underline{x}_{10}(t) = \min(\underline{x}_8(t-2), \underline{x}_9(t-2)). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = \min(1 + \bar{x}_2(t-4), 1 + \bar{x}_4(t-4)), \\ \bar{x}_2(t) = \min(\bar{x}_1(t-3), \bar{x}_4(t-3)), \\ \bar{x}_3(t) = \min(\bar{x}_1(t-4), \bar{x}_2(t-4), \bar{x}_5(t-4)), \\ \bar{x}_4(t) = \min(1 + \bar{x}_3(t-3), \bar{x}_{10}(t-3)), \\ \bar{x}_5(t) = \min(1 + \bar{x}_3(t-2), \bar{x}_{10}(t-2)), \\ \bar{x}_6(t) = \bar{x}_5(t-2), \\ \bar{x}_7(t) = \bar{x}_5(t-1), \\ \bar{x}_8(t) = 1 + \bar{x}_6(t-1), \\ \bar{x}_9(t) = 1 + \bar{x}_7(t-1), \\ \bar{x}_{10}(t) = \min(\bar{x}_8(t-2), \bar{x}_9(t-2)). \end{cases}$$

Il reste à établir le lien entre le GETM et le GET résultant de la linéarisation. Ce lien est donné par la relation (4) qui lie le vecteur d'état  $N$  au vecteur d'état normalisé  $X$ . Pour cet exemple, nous avons  $n_1(t) = 2x_1(t)$ , autrement dit, à un tir de la transition  $x_1$  correspond à deux tirs de la transition  $n_1$ . Ainsi, le comportement dynamique du GETM se déduit facilement de celui du GET projeté sur les transitions  $x_1, \dots, x_{10}$ .

## 4 Conclusion

Dans cet article, on a présenté une méthode de linéarisation des GETM dans le but d'obtenir un modèle ( $\min, +$ ) linéaire. Dans le cas où la condition de linéarisation n'est pas vérifiée, nous procédons à un ajout ou à un retrait de jetons (ressources) dans le graphe, afin de satisfaire la condition de linéarisation.

## Références

1. F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER & J.-P. QUADRAT, *Synchronization and linearity : An algebra for discrete event systems*. Wiley, 1992.
2. T. MURATA, Petri Nets : properties, analysis and applications, *IEEE Proceedings*, **77** (4), 541–580, 1989.
3. A. MUNIER, A. (1993). Régime asymptotique optimal d'un graphe d'événements temporisé généralisé : Application à un problème d'assemblage, In *RAIPO-APII*, **27** (5), 487–513, 1993.
4. G. COHEN, S. GAUBERT, & J.-P. QUADRAT, Algebraic system analysis of timed petri nets, In : *Idempotency*, J. Gunawardena Ed., Collection of the Isaac Newton Institute, Cambridge University Press, pp. 145-170, 1998.

# Emergence de structures optiques extrêmes par amplification fibrée basée sur une pompe partiellement incohérente

Kamal Hammani<sup>1</sup>, Christophe Finot<sup>1</sup>, John M. Dudley<sup>2</sup> & Guy Millot<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut Carnot de Bourgogne, UMR 5209 CNRS-Université de Bourgogne, 21078 Dijon Cedex, FRANCE

<sup>2</sup> Institut FEMTO-ST, UMR 6174 CNRS-Université de Franche-Comté, Besançon, FRANCE

kamal.hammani@u-bourgogne.fr

**Résumé.** Nous montrons qu'une amplification fibrée (gain du à l'effet Raman ou à l'instabilité modulationnelle) basée sur une pompe partiellement incohérente mène à l'émergence de structures scélérates. Une étude qualitative est réalisée par l'utilisation d'un signal initial continu et complétée par des mesures quantitatives enregistrées à partir d'un signal initial impulsionnel. Des simulations numériques basées sur l'équation de Schrödinger non-linéaire confirment ces résultats. Nous discutons également des stratégies qui permettent d'isoler ces événements rares et intenses.

**Abstract.** We show that fibered-amplification (by Raman gain or by modulation instability) based on a partially incoherent pump leads to the emergence of rogue structures. A qualitative study is achieved by using an initial continuous signal supplemented by quantitative measurements recorded for an initial pulsed signal. Numerical simulations based on the equation of nonlinear Schrödinger confirm these results. We also discuss how these rare and intense events can be isolated.

## Introduction

Il existe, dans la nature, un grand nombre de phénomènes extrêmes aux conséquences parfois dramatiques. C'est pourquoi de nombreux chercheurs à travers le monde les étudient activement dans des domaines allant de la biologie à l'économie. En hydrodynamique, si le tsunami est maintenant connu et relativement bien compris, d'autres événements extrêmes restent encore mystérieux et incompris. C'est, en particulier, le cas pour les vagues scélérates. Ces vagues géantes et "monstrueuses" ont toujours peuplé le récit des pêcheurs et autres navigateurs tout en restant au stade de légende pour la communauté scientifique.

Toutefois, en 1995, la plateforme pétrolière Draupner, située en mer du Nord, détecta une vague de 31 mètres. Cette première mesure scientifique confirma l'existence des vagues scélérates. C'est ainsi qu'en décembre 2000, l'Union Européenne a lancé le projet MaxWave pour confirmer la réalité de ces vagues et pour mieux comprendre leur apparition. Si ce projet n'a pas permis de définir clairement les causes du phénomène, il a néanmoins permis d'établir définitivement leur existence et leur rareté. Et surtout, ce projet a montré que l'utilisation d'un modèle non-linéaire, s'avère nécessaire.

Toutefois, la rareté des vagues scélérates limite fortement toute étude en milieu naturel. Il s'avère extrêmement intéressant de pouvoir disposer de systèmes physiques analogues permettant de reproduire en laboratoire un comportement similaire. Les récentes recherches initiées par Solli et al. [1] apportent une réponse à ce besoin : lors de la génération de supercontinuum dans les fibres optiques, des impulsions lumineuses rares peuvent émerger et se détacher très significativement du comportement moyen. Au vu du rôle clé que jouerait l'instabilité de Benjamin-Feir dans l'apparition des vagues scélérates, l'appellation "ondes scélérates optiques" a alors été choisie pour qualifier un tel comportement qui naît de l'instabilité modulationnelle. Ainsi la fibre optique peut, à travers la complexité des phénomènes qui y résident, servir de système de laboratoire pour reproduire, de façon non-destructive à des échelles de temps beaucoup plus courtes, ces événements rares.

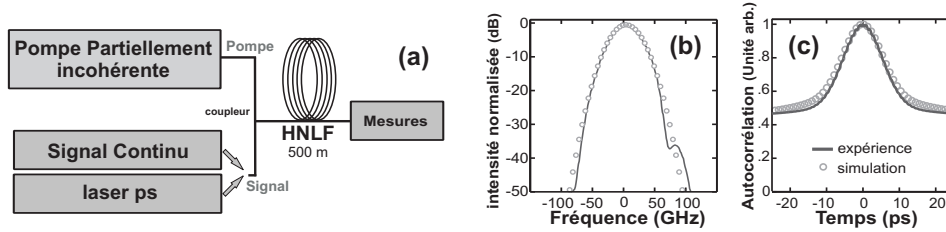
Dans notre cas, nous avons cherché à nous démarquer du cas de la génération de supercontinuum où les ondes scélérates sont incarnées par un soliton ayant subi un très fort auto-décalage fréquentiel. En d'autres termes, nous avons évité les effets solitoniques. Dans notre cas, la génération d'ondes scélérates optiques repose sur l'utilisation d'un amplificateur fibré basé sur une pompe partiellement incohérente. Nous distinguerons deux situations physiques : l'une où c'est le phénomène d'instabilité modulationnelle incohérente qui permet l'émergence de structures scélérates et l'autre se plaçant dans un régime fondamentalement différent et faisant appel à l'effet Raman.

## 1 Emergence de structures scélérates par amplification paramétrique incohérente

L'instabilité modulationnelle est un phénomène fondamental menant à la croissance exponentielle d'une faible perturbation [2]. Dans le domaine spectral, l'instabilité modulationnelle est similaire au mélange à quatre ondes durant lequel deux photons pompe sont annihilés pour générer une paire de photon Stokes-anti-Stokes (ou encore signal-idler). Nous voulons, ici, étudier l'influence d'une pompe partiellement incohérente sur un amplificateur paramétrique.

### 1.1 Montage expérimental

Nous utilisons un montage (Fig. 1a) entièrement fibré utilisant exclusivement des composants disponibles commercialement et adapté aux longueurs d'ondes des télécommunications optiques. La source partiellement cohérente est "faite maison" et a un spectre de largeur à mi-hauteur de 40 GHz (Fig. 1a) pour une puissance moyenne de sortie de 110mW. Nous avons analysé ses propriétés temporelles par l'utilisation d'un autocorrélateur optique (Fig. 1c). Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec notre modèle numérique considérant des fluctuations stochastiques ayant une distribution gaussienne avec un temps de cohérence de 9ps.



**Fig. 1.** (a) Montage expérimental. (b) Spectre de la pompe comparé à un spectre gaussien. (c) Auto-corrélation de la pompe. L'expérience (ligne continue noire) est comparée avec l'auto-corrélation calculée numériquement en considérant un temps de cohérence de 9 ps.

La pompe partiellement incohérente et un signal continu d'une puissance moyenne de 140  $\mu W$  sont envoyés dans une fibre hautement non linéaire (HNLf) à dispersion anormale avec un coefficient non-linéaire  $\gamma$  de 10  $W^{-1}.km^{-1}$  et une dispersion d'ordre 2 :  $\beta_2 = -6 \times 10^{-4} ps^2.m^{-1}$ .

### 1.2 Modèle Numérique

Pour reproduire fidèlement l'évolution longitudinale du champ électrique  $\Psi$  dans une fibre optique, l'équation de Schrödinger Non-linéaire Généralisée est un modèle à la validité éprouvée :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2} \Psi + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial T^3} - \gamma \left[ 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} \right] \left( \Psi(z, T) \int_0^\infty R(T') |\Psi(z, T - T')|^2 dT' \right) \quad (1)$$



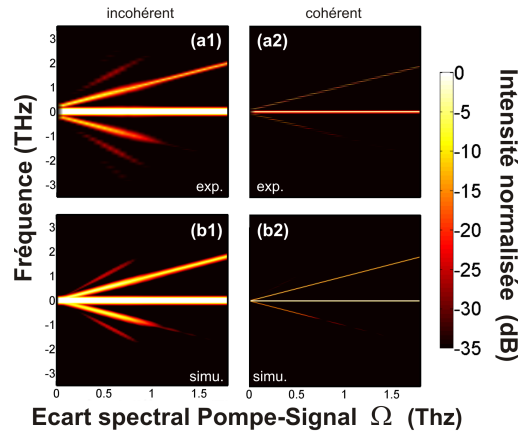
Dans notre configuration expérimentale, les effets d'ordres supérieurs peuvent être négligés si bien que nous pouvons nous contenter de l'équation de Schrödinger non-linéaire sous sa forme standard [3] :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} - \gamma |\Psi|^2 \Psi \quad (2)$$

Pour résoudre numériquement cette équation, nous utiliserons la méthode de la transformée de Fourier à pas divisés.

### 1.3 Etude spectrale de l'amplification paramétrique incohérente

Dans un premier temps, nous commençons par enregistrer les spectres en sortie de l'amplificateur pour différents écarts fréquentiels entre la pompe et le signal  $\Omega = |\nu_s - \nu_p|$  allant de 0.1 à 1.8 THz.



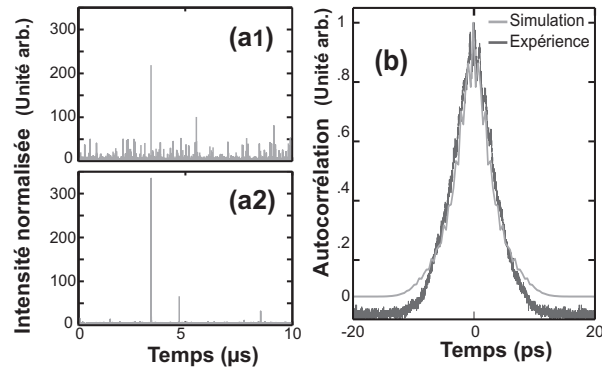
**Fig. 2.** Evolution des spectres en sortie en fonction de l'écart pompe-signal. Les résultats expérimentaux (a) sont comparés aux résultats numériques (b) pour le cas incohérent — (a1) et (b1)) — et le cas cohérent — (a2) et (b2)).

Ces résultats sont comparés au cas d'une pompe cohérente. Des différences majeures apparaissent alors nettement : la bande d'amplification est plus grande dans le cas incohérent (idler visible jusqu'à 1.2 THz contre 0.8 THz dans le cas cohérent), le gain est plus élevé (observation de cascades). Ces résultats sont consistant avec une étude précédente de l'instabilité de modulation d'une source partiellement incohérente [4]. Notre modèle numérique reproduit quantitativement ces résultats expérimentaux.

### 1.4 Etude temporelle

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution temporelle d'un signal que l'on isole de la pompe et de l'onde idler par l'utilisation d'un filtre optique passe bande (de forme supergaussienne et de largeur 1.25 THz). Une photodiode connectée à un oscilloscope enregistre cette évolution. L'émergence de pics intenses est clairement mise en avant sur la Fig. 3. Le décalage  $\Omega$  entre la pompe et le signal a un fort impact sur le nombre et sur l'intensité des pics : un décalage élevé limite le nombre de pics observés. Par conséquent, un contrôle des structures extrêmes est envisageable et simple à mettre en oeuvre par l'ajustement de l'écart fréquentiel entre la pompe et le signal.

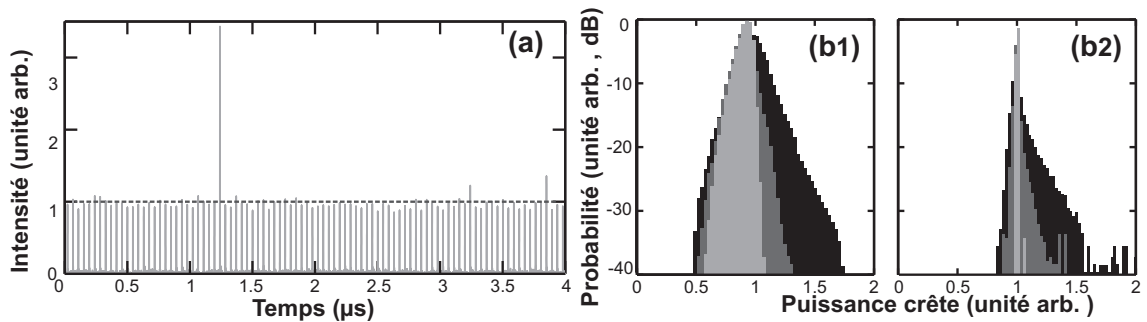
Pour déterminer, plus finement, la structure temporelle des pics avec, en particulier, leur largeur caractéristique, un signal d'autocorrélation est enregistré. La fig. 3 permet d'estimer cette largeur temporelle à environ 5 ps ce qui est environ deux fois inférieur à la largeur de l'autocorrélation de la pompe (9 ps). Ceci s'explique par le gain exponentiel subi par les structures localisées du signal. De plus, le contraste a radicalement changé avec le niveau bas du signal qui est descendu vers zéro, et qui laisse présager d'une différence de statistiques. Nos simulations reproduisent bien ce comportement.



**Fig. 3.** Signal amplifié pour différents écarts  $\Omega$  (a1) 0.75 THz (a2) 1.25 THz. (b) Autocorrelation expérimentale du signal amplifié comparée à l'auto-corrélation numérique.

### 1.5 Etude statistique

Pour compléter cette étude spectro-temporelle, nous présentons une étude statistique obtenue par substitution du signal continu par un train d'impulsions picosecondes. L'écart pompe-signal  $\Omega$  est fixé à 1 THz. Dans cette configuration, la plupart des impulsions ne sont pas amplifiées (Fig. 4a). Seules de rares impulsions sont amplifiées, par conséquent, ces impulsions dévient fortement du comportement moyen. Les statistiques correspondantes sont enregistrées pour des puissances de pompe allant de 10mW à 100mW. Elles mettent clairement en évidence qu'une augmentation de la puissance de pompe entraîne une probabilité de distribution asymétrique qui s'éloigne d'une forme purement gaussienne avec une queue se développant vers les hautes puissances. Cette évolution est qualitativement bien reproduite par une série de simulations (plus de 10 000). Toutefois une différence (dans la partie centrale) est notable. Celle-ci est liée aux différents bruits électroniques des systèmes de détection qui ont été négligés dans nos simulations.



**Fig. 4.** (a) Train d'impulsion après amplification. Distribution statistique des puissance crêtes pour des puissance de pompe de 10mW, 50mW et 100mW obtenues expérimentalement (b1) et numériquement (b2).

## 2 Emergence de structures extrêmes par amplification Raman

La génération d'événements extrêmes dans les fibres optiques dans le cadre des supercontinua vise à comprendre et mieux définir l'origine des vagues scélérates hydrodynamiques. Si la première partie de cet article permettait une analogie avec l'hydrodynamique, dans cette seconde partie, nous étudions une configuration très différente dans laquelle l'instabilité modulationnelle scalaire ne peut pas se développer. Cette étude est donc d'un intérêt plus général et a pour but de montrer l'universalité des phénomènes et ainsi de démontrer que de tels phénomènes extrêmes ne sont pas restreints au régime anormal.

## 2.1 Montage expérimental

Le montage expérimental reste assez similaire à celui de la Fig. 1a. Nous remplaçons la précédente source partiellement incohérente par un laser Raman fibré qui présente lui-même une incohérence partielle. En sortie, le signal amplifié est séparé du résidu de pompe par simple démultiplexage en longueurs d'ondes (le signal et la pompe étant séparés d'environ 100 nm). Le signal d'autocorrélation de la pompe garde la même forme que précédemment (Fig. 1b) ce qui confirme le caractère incohérent de notre pompe. Numériquement, nous avons reproduit un tel signal d'autocorrélation en considérant des fluctuations stochastiques ayant une distribution gaussienne de temps de cohérence 25ps. Nous utilisons, maintenant, une fibre hautement non linéaire (HNLF) à dispersion normale ( $\beta_2 = 7 \times 10^{-4} \text{ps}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ ).

## 2.2 Modèle numérique

Pour interpréter nos résultats, nous avons développé des simulations numériques basées sur un système d'équations de Schrödinger non-linéaire couplées :

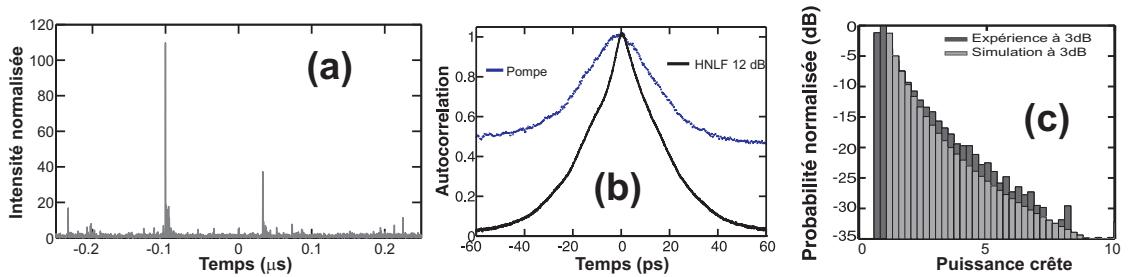
$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial z} = \frac{g_r}{2} |\Psi_p|^2 \Psi_s + i\gamma [|\Psi_s|^2 + 2|\Psi_p|^2] \Psi_s \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial z} = -\frac{g_r}{2} |\Psi_s|^2 \Psi_p + i\gamma [|\Psi_p|^2 + 2|\Psi_s|^2] \Psi_p - \delta \frac{\partial \Psi_p}{\partial T} \quad (4)$$

Ce système est équivalent à l'équation de Schrödinger Non linéaire Généralisée (1) tant qu'aucune nouvelle fréquence optique n'est générée ce que nous avons vérifié expérimentalement (la dispersion d'ordre 3 :  $\beta_3$  et l'auto-raïdissement ont été négligés). Ce modèle permet un traitement plus rapide en utilisant des fenêtres spectrales plus petites.

## 2.3 Etude temporelle

Dans un premier temps, le signal injecté est continu. Cela nous permet de voir (Fig. 5 a) l'émergence de pics intenses (atteignant jusqu'à 120 fois la valeur moyenne) sans aucune périodicité. L'enregistrement de l'autocorrélation nous montre un changement radical de contraste par rapport à la pompe tout comme pour l'amplification paramétrique incohérente. Toutefois, à l'inverse de celle-ci, la largeur temporelle du signal est similaire à celle de la pompe en raison d'effets de déplétion.

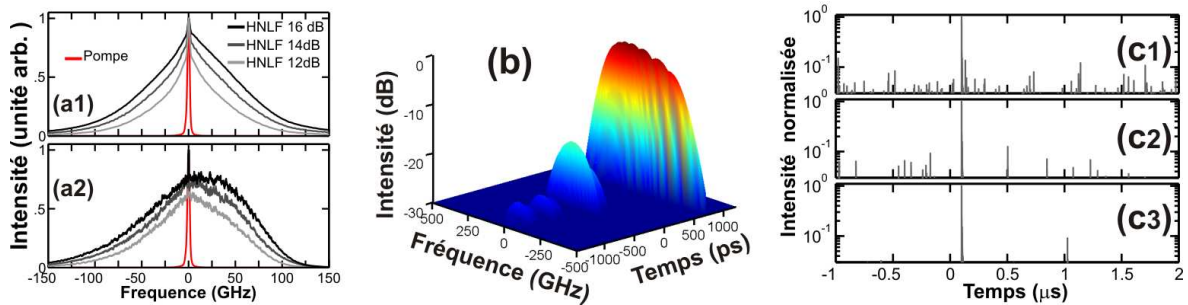


**Fig. 5.** (a) Signal amplifié (12dB de gain). (b) Autocorrélation du signal amplifié comparé à l'autocorrélation de la pompe. (c) Distribution des puissances crêtes en sortie pour une puissance de pompe de 350 mW (soit 3 dB de gain) obtenue expérimentalement et numériquement.

Comme précédemment, nous remplaçons le signal continu par un train d'impulsions picosecondes pour déterminer quantitativement des statistiques. Nous remarquons (Fig. 5) que la queue de cette distribution s'éloigne largement d'une statistique gaussienne. Nous avons vérifié que cette queue s'étale en direction des grandes puissances avec l'augmentation de la puissance de pompe. Ce comportement est typique des processus à valeurs extrêmes et est de ce fait, similaire aux ondes scélérates optiques rencontrées dans les supercontinua.

## 2.4 Evolution spectrale et contrôle des événements rares

Nous reprenons un signal continu et observons le spectre en sortie de l'amplificateur Raman. Nous notons un fort élargissement spectral ( 6a). Les simulations ont reproduit ce comportement et nous ont permis de montrer que l'origine de cette expansion est la modulation de phase croisée de la pompe sur le signal. Une représentation spectro-temporelle ( 6b) montre que les événements les plus extrêmes ont également le spectre le plus élargi. Ceci nous laisse envisager un filtrage spectral décalé en fréquence pour isoler les pics les plus extrêmes. En utilisant un filtre de 9 GHz, nous parvenons alors à isoler un unique événement.



**Fig. 6.** (a) Spectre optique du signal amplifié pour différents gains. Les résultats expérimentaux (a1) sont comparés aux résultats numériques (a2). (b) Représentation spectro-temporelle d'un événement extrême. (c) Signal temporel expérimental après filtrage pour différents décalages : (c1) 0 GHz (c2) 150 GHz (c3) 350 GHz.

## 3 Conclusion

Nous avons étudié numériquement et expérimentalement deux configurations mettant en jeu des événements extrêmes. L'utilisation d'un signal initial continu nous a ainsi permis de mettre qualitativement en évidence la génération de structures scélérates. Ces résultats ont pu être complétés par des mesures quantitatives enregistrées à partir d'un signal initial impulsionnel. Des simulations numériques basées sur l'équation de Schrödinger non-linéaire ont confirmé ces résultats. Nous avons également montré qu'il était possible d'isoler ces événements rares et intenses. Ces études confirment que les fibres optiques peuvent servir de système de laboratoire pour la compréhension des vagues scélérates. De plus, dans le domaine des amplificateurs, ces études soulignent les limites et les conditions à éviter dans la conception de tels amplificateurs.

## Références

1. D.R. SOLLI, C. COPERS, P. KOONATH & B. JALALI, Optical rogue waves, *Nature*, **450**, 1057 (2007).
2. K. TAI, A. HASEGAWA & A. TOMITA, Observation of modulational instability in optical fibers, *Physical Review Letters*, **56**, 135-138 (1986).
3. G.P. AGRAWAL, *Nonlinear fiber Optics*, Third Edition, Academic Press, San Francisco, (2001).
4. A. SAUTER, S. PITOIS, G. MILLOT & A. PICOZZI, Incoherent modulation instability in instantaneous nonlinear Kerr media, *Optics. Letters*, **30**, 2143-2145 (2005).
5. J.M.DUDLEY ET AL., Maîtrise des vagues optiques extrêmes, *11<sup>ème</sup> Rencontre du non-linéaire*, 37-41 (2008).
6. K. HAMMANI, C. FINOT, J. M. DUDLEY & G. MILLOT, Optical rogue-wave-like extreme value fluctuations in fiber Raman amplifiers, *Optical Express*, **16**, 16467-16474 (2008).

# Effets d'un forçage spatial sur la dynamique des fronts

F. Haudin<sup>1</sup>, R. G. Elías<sup>2</sup>, M. G. Clerc<sup>2</sup>, U. Bortolozzo<sup>1</sup>, & S. Residori<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institut Non Linéaire de Nice, Université de Nice Sophia-Antipolis, CNRS, 1361 route des Lucioles 06560 Valbonne, France

<sup>2</sup> Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile

`florence.haudin@inln.cnrs.fr`

**Résumé.** Nous avons étudié les effets d'un forçage périodique sur la dynamique des fronts connectant deux états stables homogènes. Nous avons montré qu'il est possible d'obtenir un effet d'*agrafage*. Nous avons utilisé une valve à cristaux liquides avec rétroaction optique dans laquelle une géométrie quasi-unidimensionnelle et des modulations spatiales ont été imposées. Nous avons observé l'existence d'une région d'*agrafage* et une propagation avec une vitesse oscillante. Nous avons trouvé un bon accord entre les observations expérimentales et les résultats d'un modèle simple bistable unidimensionnel forcé.

**Abstract.** In a bistable system, we study the front dynamics induced by a spatially periodic forcing and show that fronts exhibit a pinning effect. We consider a Liquid Crystal Light Valve with optical feedback, in which a quasi one-dimensional geometry and spatial modulations are imposed. We observe the existence of a pinning range and propagation with an oscillatory speed. A good agreement is found between experimental observations and numerical results obtained with a simple one-dimensional forced bistable model.

## 1 Introduction

Les systèmes hors équilibre, de façon générale, possèdent plusieurs états d'équilibre pour des paramètres fixés dépendant des conditions initiales. Cette propriété est appelée multistabilité et on désigne sous le terme de front les ondes non linéaires connectant différents états d'équilibre.

L'apparition de fronts est un phénomène assez général présent dans des diverses branches de la physique mais aussi en chimie ou encore en biologie. Pour ne donner que quelques exemples, on peut citer les fronts de solidification [1], les fronts dans les réactions chimiques oscillantes [2], ceux entre domaines magnétiques de spin différents [3], dans des systèmes mécaniques [4], les fronts de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov observés en dynamique des populations [5] ou bien encore en hydrodynamique entre phase laminaire et phase turbulente [6]. D'un point de vue très général, l'apparition d'un front entre deux états correspond à un processus de nucléation d'une phase dans une autre au cours d'une transition de phase du premier ordre.

Si l'on considère des fronts connectant deux états homogènes stables, la dynamique est caractérisée par une propagation du front visant à diminuer la taille du domaine le moins stable énergétiquement. Il existe une seule valeur du paramètre de contrôle agissant sur la stabilité du front, pour laquelle il est immobile. Ce point pour lequel les deux états ont la même énergie, est appelé point de Maxwell [7]. La situation est complètement différente quand la bistabilité se produit entre un état homogène et un état périodique. Les systèmes ayant une telle propriété montrent un effet de blocage du front sur le réseau, appelé *agrafage* d'après Pomeau [8]. Indépendamment du fait qu'un état est plus favorable que l'autre, c'est la brisure de symétrie qui induit l'*agrafage* sur le réseau périodique. A notre connaissance, aucune mise en évidence expérimentale claire de cet effet n'a été présentée à ce jour. Nous proposons par la présente étude de montrer qu'il est possible d'observer le phénomène d'*agrafage* avec des fronts connectant deux états homogènes stables en présence d'une forçage spatial périodique. Dans une expérience d'optique non linéaire, nous avons étudié la dynamique de ce type de fronts en présence de modulations spatiales périodiques. Cette expérience est constituée d'un dispositif à cristaux liquides inséré dans une boucle de rétroaction optique. Une modulation spatiale sur les deux états du système est alors induite.

Nous observons une région d'agrafage du front et au-delà de cette région, le front se propage avec une vitesse oscillante. Nous avons comparé ces résultats expérimentaux à ceux obtenus avec un modèle unidimensionnel simple présentant de la bistabilité entre deux états homogènes (bifurcation fourche imparfaite étendue) en présence d'un forçage périodique. Pour ce modèle phénoménologique, nous avons trouvé une dynamique des fronts similaire à celle observée expérimentalement.

## 2 Dispositif et résultats expérimentaux

### 2.1 Expérience de la valve à cristaux liquides avec rétroaction optique

L'expérience que nous avons utilisée pour étudier la propagation de fronts est l'expérience de la valve à cristaux liquides avec rétroaction optique. Cette expérience permet d'avoir multistabilité entre différents états étendus et de générer des structures spatiales de géométrie plus ou moins complexe [9]. Un schéma du dispositif est donné par Fig.1. Dans cette étude, nous nous intéressons aux fronts entre deux états homogènes stables obtenus en l'absence de propagation libre ( $L = 0 \text{ cm}$ ) et en présence d'interférences de polarisation dans la boucle de rétroaction.

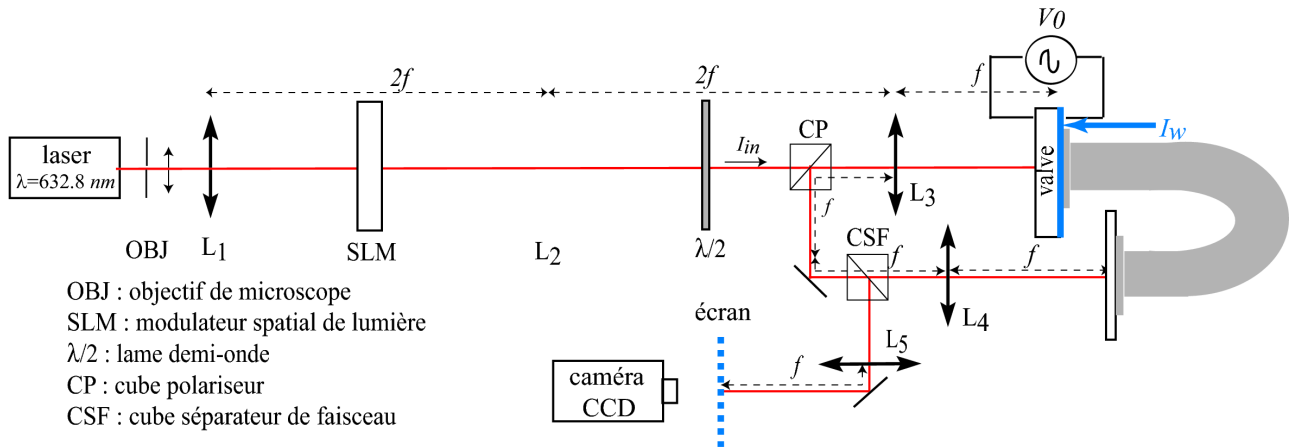


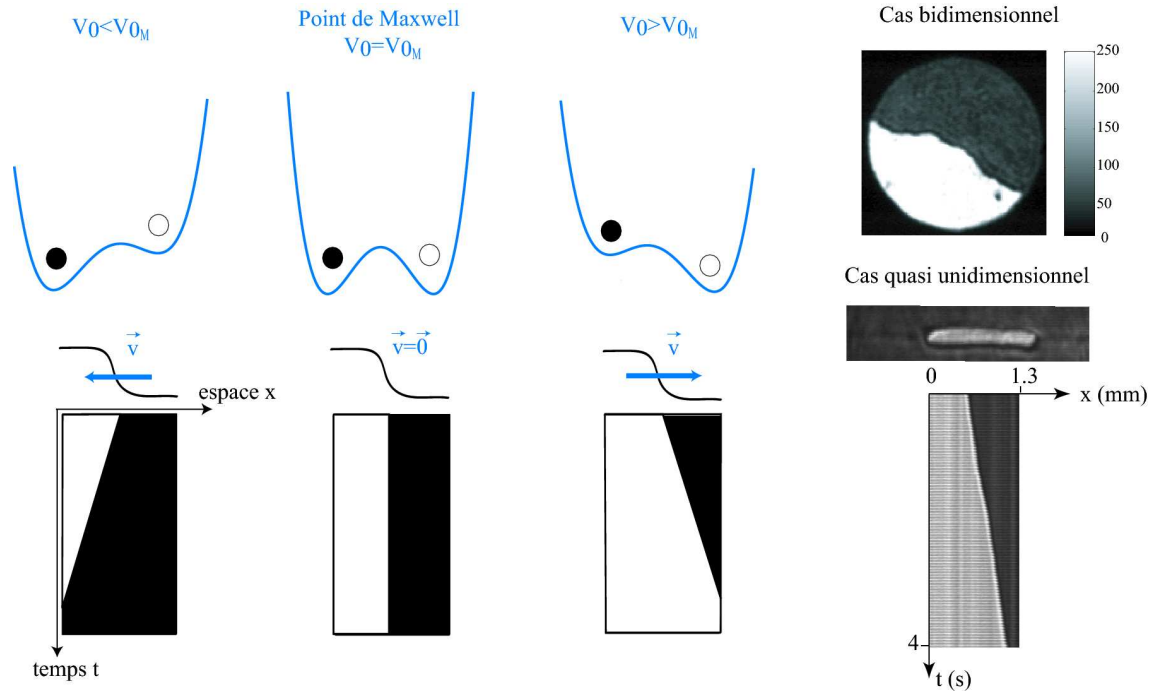
Fig. 1. Dispositif de la valve à cristaux liquides avec rétroaction optique.

La valve est constituée par un film mince de cristaux liquides nématiques interposé entre une lame de verre et une paroi photoconductrice. Elle se comporte comme un milieu de type Kerr et entraîne un changement d'indice de réfraction proportionnel à l'intensité lumineuse arrivant sur le photoconducteur. Une tension  $V_0$  est appliquée aux bornes de la valve ; elle induit un champ électrique dans la direction duquel les molécules tendent à s'aligner. Lorsque la lumière traverse la valve, elle acquiert un déphasage  $\phi = kdn_2|E|^2$  avec  $k$  le nombre d'onde de la lumière,  $d$  l'épaisseur du film de cristaux liquides,  $n_2 < 0$  le coefficient non linéaire de la valve, qui est négatif ici car le milieu étant défocalisant et  $E$  l'amplitude de champ électrique.

### 2.2 Fronts entre états homogènes stables

En présence d'interférences de polarisation, on peut avoir bistabilité entre deux états d'orientation des molécules de cristaux liquides [9]. On observe alors dans la direction transverse un front entre les deux états, l'un que l'on qualifiera d'état bas et correspondant à l'état de plus basse intensité lumineuse et l'autre que l'on qualifiera d'état haut et correspondant à l'état de plus grande intensité. Pour une valeur

donnée du paramètre de contrôle  $V_0$ , l'état le plus stable tend à envahir tout l'espace. Cette idée est illustrée par Fig.2 qui montre de façon schématique la forme du potentiel à gauche, au point de Maxwell  $V_{0M}$  et à droite de celui-ci, les diagrammes spatio-temporels correspondants ainsi que la direction de propagation du front. Les images à droite sont des profils d'intensité extraits de l'expérience.



**Fig. 2.** A gauche : allure du potentiel et diagrammes spatio-temporels au point de Maxwell  $V_{0M}$  et de part et d'autre de celui-ci. A droite : fronts bidimensionnel, quasi-unidimensionnel et diagramme spatio-temporel associé.

### 2.3 Contrôle des fronts

Pour contrôler la dynamique des fronts et imposer un forçage périodique quasi-unidimensionnel, nous utilisons un modulateur spatial de lumière (SLM comme Spatial Light Modulator en anglais). Il s'agit d'un dispositif à cristaux liquides de résolution  $1024 \times 768$  *XVGA* codé en 8 bits. Le SLM est placé dans le plan focal commun aux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  (Fig.1) de façon à ce que son profil d'intensité soit envoyée directement dans la valve à cristaux liquides. Par ailleurs, le SLM est connecté à un ordinateur dont l'écran est reproduit sur l'écran du modulateur avec la même résolution. De cette façon, en affichant un profil d'intensité approprié sur l'écran de l'ordinateur et en ajustant sa position, on peut forcer une région de la valve avec un masque d'intensité parfaitement contrôlé. Les masques créés sous Matlab sont des images codées en niveaux de gris de 0 à 255 et sont ouvertes avec le logiciel ImageJ. Ils sont d'intensité nulle sauf sur une fine largeur  $2d$  d'environ  $100 \mu\text{m}$  et créent une modulation d'amplitude  $B$  et de longueur d'onde  $p$  autour de la valeur moyenne  $A$  soit :

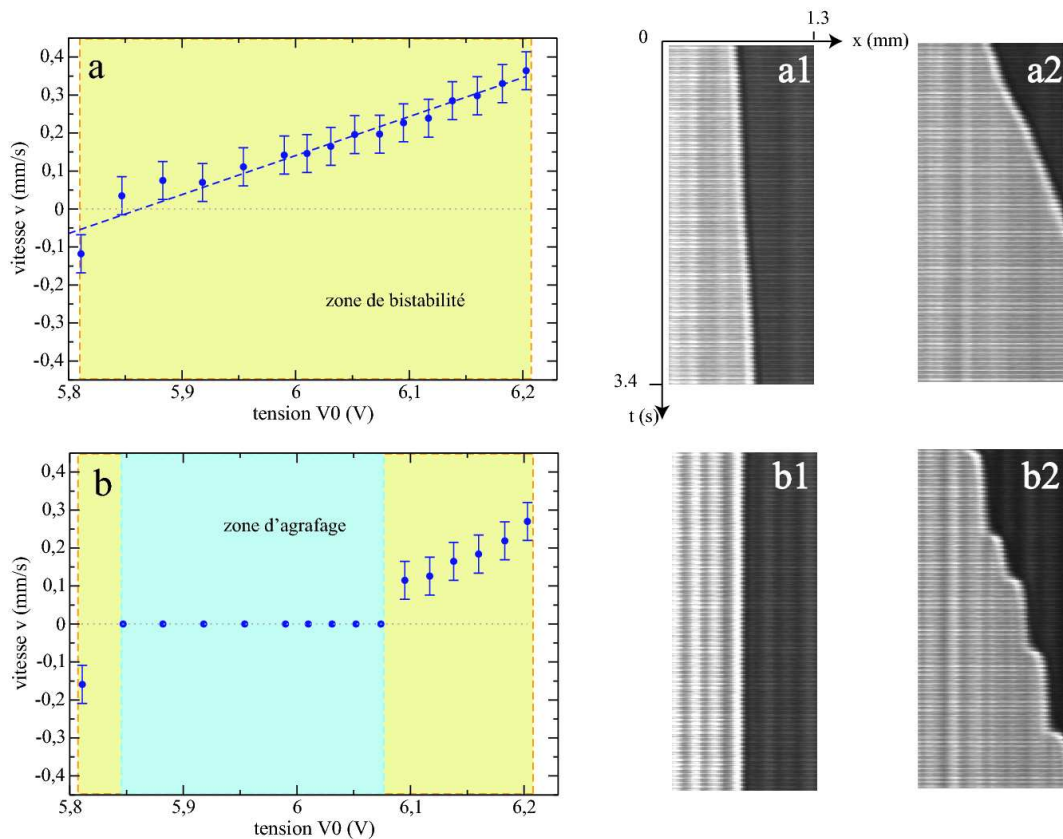
$$I(x) = A + B \sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right). \quad (1)$$

Pour  $B = 0$ , le masque est homogène le long de la bande de largeur  $2d$ . La tension  $V_0$  joue le rôle de paramètre de contrôle et nous fixons l'intensité  $I_{in}$  à l'entrée de la valve. Nous pouvons aussi jouer sur les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $p$  du forçage spatial. Pour des valeurs de  $V_0$  variant dans la zone de bistabilité

notée  $[V_{B_1}, V_{B_2}]$ , nous générons comme condition initiale un front de niveau de gris maximal soit 255 dont on ajuste la largeur en fonction des valeurs du paramètre de contrôle  $V_0$ . Nous l'éteignons sur le masque homogène ( $B = 0$ ) puis on recommence avec le masque périodique ( $B$  non nul). On vérifie si le système est bien bistable autour de  $V_{B_1}$  en envoyant un flash lumineux et en regardant si on peut allumer et éteindre le front. Autour de  $V_{B_2}$ , on procède de même mais en s'assurant surtout que l'état haut n'apparaît pas spontanément.

## 2.4 Résultats

Nous avons fait varier  $V_0$  sur toute la zone de bistabilité et observé la propagation des fronts sans et avec forçage spatial. A partir des diagrammes spatio-temporels pour les différentes valeurs de tension,



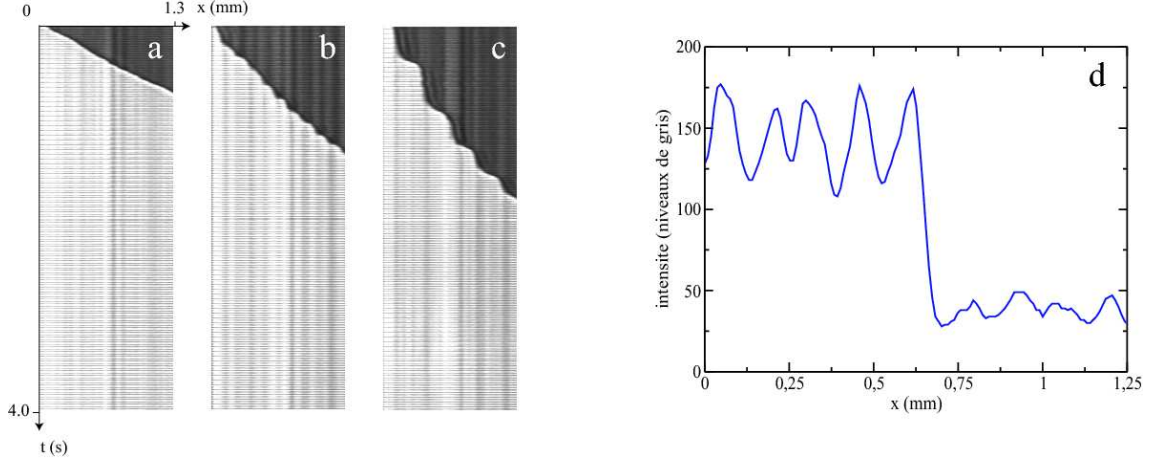
**Fig. 3.** a : vitesse moyenne du front en l'absence du forçage périodique ( $B = 0$ ) ; b : vitesse moyenne du front en présence du forçage périodique ( $B$  non nul). a1-a2 : diagrammes spatio-temporels proche du point de Maxwell et pour  $V_0 > V_{0,M}$  respectivement ; b1-b2 : diagrammes spatio-temporels à l'intérieur et à droite respectivement de la région d'agrafage.

nous avons mesuré la vitesse de propagation en fonction de  $V_0$  (Fig 3.a.) et nous avons vérifié qu'autour du point de Maxwell la vitesse varie linéairement avec  $V_0$ . En présence du forçage spatial, les mesures ont montré l'existence d'une plage de valeurs de  $V_0$  pour laquelle le front ne se propage : il est agrafé sur le réseau. De part et d'autre de la région d'agrafage, le front se propage avec une vitesse oscillante (Fig 3.b.). Des diagrammes spatio-temporels pour les différentes régions de paramètres avec et sans forçage sont également donnés par Fig.3.

Nous avons testé l'influence de la longueur d'onde  $p$  du forçage périodique. Nous avons constaté que plus



$p$  est grande, plus la région d'agrafage du front est étendue et plus la vitesse moyenne diminue comme l'illustre Fig.4. Un profil d'intensité suivant  $x$  est donné Fig.4.d.



**Fig. 4.** Diagrammes spatio-temporels : a : sans forçage périodique ( $B = 0$ ) ; b et c : avec forçage périodique pour  $p \approx 0.14 \text{ mm}$  et  $p = 0.28 \text{ mm}$  respectivement ; d : profil d'intensité suivant  $x$ .

### 3 Modèle phénoménologique

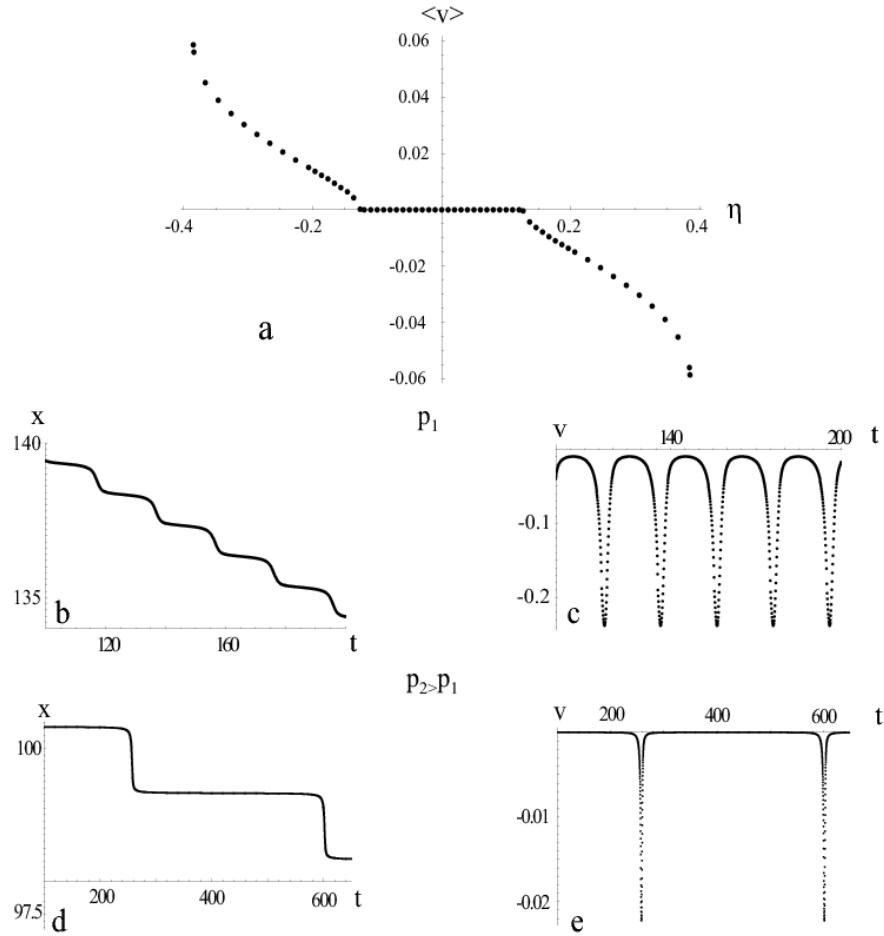
Le modèle prototype unidimensionnel que nous avons considéré est un modèle phénoménologique simple présentant bistabilité entre deux états homogènes stables en présence d'un forçage périodique. Il correspond à la forme normale d'une bifurcation fourche imparfaite étendue à laquelle on a rajouté une modulation périodique :

$$\partial_t u = \eta + \varepsilon u - u^3 + \partial_{xx} u + B \sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \quad (2)$$

où  $u$  est le paramètre d'ordre,  $\eta$  le paramètre de brisure de symétrie,  $\varepsilon$  le paramètre de bifurcation,  $B$  l'amplitude du forçage périodique et  $p$  sa longueur d'onde. En l'absence de forçage, l'équation peut être caractérisée analytiquement. En particulier, la vitesse de propagation du coeur du front varie linéairement avec le paramètre  $\eta$  autour du point de Maxwell. En présence du forçage, les simulations numériques ont montré le même type de propagation que dans l'expérience : sur toute une plage de valeurs de  $\eta$ , le front ne se déplace pas à cause du phénomène d'agrafage (Fig.5 a). De part et d'autre de la région de blocage, le front se déplace avec une vitesse oscillante. Fig.5 b et d montrent pour deux longueurs d'ondes  $p_1$  et  $p_2$  différentes, la position du coeur du front en fonction du temps. On constate que plus la longueur d'onde  $p$  du forçage périodique est grande, plus la propagation en escalier est marquée et donc plus la vitesse est discontinue (Fig. 5 c et e). La caractérisation de la relation entre  $\eta$  et  $\varepsilon$  est en cours.

### 4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons observé l'existence d'un phénomène d'agrafage pour des fronts connectant deux états homogènes stables en présence d'un forçage périodique. En particulier, dans l'expérience, nous avons montré qu'il est possible de réaliser un contrôle précis des fronts à l'aide du modulateur spatial de lumière. Cette étude ouvre de nombreuses perspectives concernant notamment les structures localisées de tailles différentes que l'on doit être possible de stabiliser dans la région d'agrafage. On devrait aussi pouvoir caractériser expérimentalement la bifurcation de type *serpent* [10]. Enfin, il serait intéressant de tester l'effet d'un bruit sur la propagation du front et le phénomène d'agrafage.



**Fig. 5.** a : vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  du coeur du front en fonction du paramètre de brisure de symétrie en présence d'un forçage périodique ; b et d (respectivement c et e) : position  $x$  (respectivement vitesse  $v$ ) du coeur du front en fonction du temps pour deux valeurs différentes  $p_1$  et  $p_2$  de la longueur d'onde  $p$ , avec  $p_1 < p_2$ .

*Remerciements* R. G. Elías remercie la bourse "Becas de Estadías Cortas de Investigación de la Universidad de Chile" pour son soutien financier.

## Références

1. J. S. LANGER, *Review of Modern Physics*, **52**, 1 (1980).
2. V. PETROV, Q. OUYANG & H. L. SWINNEY, *Nature*, **388**, 655 (1997).
3. A. H. ESCHENFELDER, *Magnetic bubble technology*, Springer series of solid states science, Springer-Verlag Berlin (1983).
4. P. B. UMBANHOWAR, F. MELO & H.L. SWINNEY, *Nature*, **382**, 793 (1996).
5. R. A. FISHER, *Ann. Eugenics*, **7**, 355 (1937) — A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKY & P. PISKUNOV, *Bull. Univ. Moskou Ser. Int. Se. A*, **1**, 1 (1937).
6. M. SUSAN BLOOR, *Journal of Fluid Mechanics*, **19**, 290 (1963).
7. R. E. GOLDSTEIN, G. H. GUNARATNE, L. GIL & P. COULLET, *Physical Review A*, **43**, 6700 (1991).
8. Y. POMEAU, *Physica D*, **23**, 3 (1986).
9. S. RESIDORI, *Physics Report*, **416**, 201 (2005).
10. P. D. WOODS & A. R. CHAMPNEYS, *Physica D*, **129**, 147 (1999).

# Sédimentation de particules en présence de convection thermique. Application à la séparation métal-silicate dans l'océan de magma terrestre initial

Guillaume Lavorel & Michael Le Bars

IRPHE - UMR 6594 Technopôle de Château-Gombert  
49, rue Joliot Curie - B.P. 146 13384 Marseille Cedex 13, France  
lavorel@irphe.univ-mrs.fr

**Résumé.** L'étude de la sédimentation de particules dans un fluide en convection est d'un grand intérêt pour la compréhension de certains processus intervenant dans les systèmes géophysiques, comme la dynamique de la séparation métal-silicate dans l'océan de magma apparu durant la formation de la Terre. Dans cette perspective, nous avons mis au point une expérience permettant de quantifier au cours du temps la vitesse de sédimentation de billes denses dans un fluide en convection ainsi que la fraction solide en suspension en fonction de la vigueur de la convection (caractérisée par le nombre de Rayleigh  $Ra$ ) et l'intensité de la stratification (caractérisée par le rapport  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ ). Nous observons systématiquement deux phases : (i) une sédimentation initiale, rapide où l'inertie du mélange initial est prépondérante ; (ii) un régime final où l'évolution de la fraction solide en suspension au cours du temps est correctement décrite par une équation de convection-diffusion, obtenue en introduisant un flux diffusif de particules dû à la turbulence. Nous pouvons alors obtenir des lois d'échelle des grandeurs physiques en fonction de  $Ra$  et  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ , en accord avec les résultats expérimentaux.

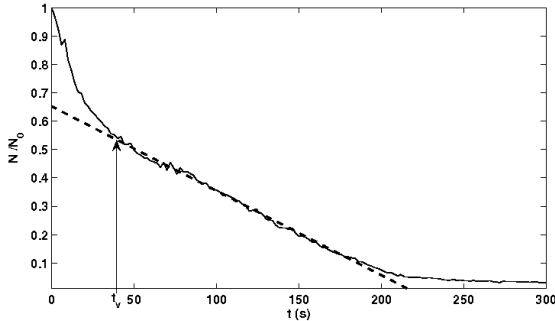
**Abstract.** The sedimentation of particles from a convecting fluid is a process of great interest in geophysics, as for instance to understand the dynamics of metal-silicate separation in a terrestrial magma ocean during the Earth's formation. Our work is based on an experimental approach which permits to quantify the settling velocity of the particles in a convecting fluid and the solid fraction of particles in suspension, as a function of the vigor of the convection (characterized by the Rayleigh number  $Ra$ ) and the intensity of the buoyancy (characterized by the ratio  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ ). We systematically observed two stages : (i) a rapid initial settling, where the inertia of the initial stirring is predominant ; (ii) a final regime where the evolution of the solid fraction in suspension through time is correctly described by a diffusion-convection equation, where we have introduced a diffusive flux of particles due to the turbulent convection. We define scaling laws for the physical parameters as a function of  $Ra$  and  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ , in agreement with the experimental results.

## 1 Introduction.

L'étude de la sédimentation de particules dans un fluide mis en mouvement sous l'effet de la convection présente un intérêt majeur, notamment en géophysique. Par exemple, une description des mécanismes mis en jeu est fondamentale pour mieux comprendre la dynamique de la séparation métal-silicate dans l'océan de magma apparu pendant la formation de la Terre. Durant cette période, des impacts de planétésimaux sur la proto-Terre ont engendré l'augmentation de la température de plusieurs milliers de degrés, formant alors, par fusion de l'enveloppe terrestre, des océans de magma constitué de silicate et de gouttelettes de fer. Un des objectifs de notre étude est de comprendre dans quelle mesure la convection thermique, présente dans l'océan de magma terrestre initial, a pu influencer la sédimentation des gouttelettes métalliques. Nos résultats peuvent aussi s'appliquer à la cristallisation des chambres magmatiques. Ici, il s'agit d'étudier l'influence de la convection thermo-chimique sur la cristallisation, en particulier de savoir si elle permet de maintenir les cristaux en suspension jusqu'à la solidification complète de l'alliage. De tels problèmes faisant intervenir la convection et la sédimentation apparaissent également dans de nombreux autres systèmes naturels, par exemple la dispersion des particules polluantes dans l'atmosphère.

Notre travail, de nature expérimentale, a pour but de compléter et relier les résultats de trois articles précédents. Premièrement, dans le papier [6], Martin et Nokes ont étudié expérimentalement la sédimentation de billes de polystyrène dans une cuve d'eau en convection turbulente. Ils ont démontré que le nombre de particules  $N$  en suspension décroît exponentiellement en fonction du temps :  $N = N_0 \exp(-\frac{v_s t}{H})$ , où  $H$  est la hauteur de la cuve,  $N_0$  le nombre de particules en suspension à l'instant initial,  $v_s$  la vitesse de Stokes définie par  $v_s = \frac{2}{9} \frac{\Delta \rho g R^2}{\eta}$ ,  $\Delta \rho$  la différence de masse volumique entre les particules et le fluide,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $R$  le rayon moyen des billes et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide. Leur étude suggère que la convection n'a aucune influence sur la sédimentation. Solomatov *et al.* [8] se sont ensuite concentrés sur le mécanisme de réentraînement des billes par la convection à partir d'un lit de particules. En fonction du rapport entre la contrainte de cisaillement due à la convection et la poussée d'Archimède sur la particule, ils démontrent (i) qu'il existe une valeur critique discriminant le régime sans mouvement dans le lit de particules du régime d'entraînement des particules et (ii) qu'il est possible de quantifier la fraction volumique de particules en suspension une fois l'état statistiquement stationnaire atteint. Enfin, Hoink *et al.* [4] ont étudié numériquement le problème et distingué deux cas : le "temperature-dominated case" (T-dominated), où les gouttelettes sont advectées par l'écoulement, et le "droplet-dominated case" (C-dominated), où les mouvements de convection ne sont pas suffisamment vigoureux pour maintenir les particules en suspension. Selon leur diagramme de phase, la distinction entre les deux régimes dépend (i) du nombre de Rayleigh  $Ra = \frac{\alpha_T g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$ , où  $\alpha_T$  est le coefficient de dilatation thermique du fluide,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\kappa$  la diffusivité thermique du fluide et  $\Delta T$  la différence de température entre le bas et le haut de la cuve et (ii) du nombre de flottabilité  $B = \frac{\Delta \rho}{\rho \alpha_T \Delta T}$ . Ces trois études traitent du même problème mais il n'existe pas de contexte général qui permet de les unifier, ce que nous allons faire dans ce papier.

## 2 Dispositif expérimental.



**Fig. 1.** Proportion de particules par rapport au nombre de particules initial  $N_0$  en fonction du temps, sans convection.  $t_v$  correspond au temps visqueux de dissipation du mélange initial. Après  $t_v$ , la sédimentation suit une loi de Stokes décrite par  $N(t) = N_{t_v} (1 + \frac{v_s}{H}(t - t_v))$  (droite en traits pointillés).

tendance à rester à la surface, à cause de la tension superficielle existant à l'interface eau/air. Enfin, les particules de PMMA sont légèrement poreuses et peuvent s'entourer d'un film d'air, changeant leur densité apparente entre deux expériences. Afin de minimiser ces désagréments, nous avons choisi de laisser les particules à demeure dans l'eau salée de façon à les saturer. Pour distribuer initialement les particules, nous agitons la solution avec un système de deux aimants, un à l'intérieur et un à l'extérieur de la cuve. Nous suivons ensuite l'évolution statistique des particules en suspension avec une camera. Un traitement numérique des images permet de quantifier le nombre de particules en suspension. Notre système est caractérisé par quatre nombres sans dimension : le nombre de Rayleigh défini précédemment, l'intensité de

Notre dispositif est constitué d'une cuve (dimensions  $20 \times 4 \times 20$  cm) chauffée par le dessous et refroidie par le dessus grâce à deux plaques de cuivre dont la température est régulée. Les particules qui sédimentent sont des billes de PMMA de rayon  $R$  égal à  $(300 \pm 50) \mu\text{m}$  et de densité  $\rho_p$  égale à  $(1.188 \pm 0.001)$ . Le fluide utilisé est de l'eau dans laquelle a été dissout du sel NaCl à différentes concentrations de façon à augmenter la densité  $\rho$  (jusqu'à 1.200). La cuve est éclairée par son côté court par un plan lumineux rendant les particules clairement visibles. Initialement, les particules sont distribuées uniformément dans toute la cuve. Pour se faire, nous avons essayé deux méthodes. La première consiste à introduire les particules par le haut, ce qui rompt l'équilibre de la convection thermique. En outre, les particules ont

la flottabilité chimique est quant à elle caractérisée par le rapport  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ . Ensuite, le rapport d'aspect  $R/H$  caractérise la taille relative des particules par rapport à la taille typique du système. Enfin, le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$  compare la diffusion de la quantité de mouvement à la diffusion thermique. Nous avons choisi ces nombres typiques pour décrire le système parce qu'ils présentent l'avantage de pouvoir être modifiés expérimentalement de façon indépendante, contrairement au nombre  $B$  défini en introduction.

### 3 Observations et modélisation.

Nous avons d'abord étudié le comportement statistique des billes en l'absence de convection. Lors de la décroissance du nombre de particules  $N$  en suspension en fonction du temps  $t$ , nous avons systématiquement observé deux phases (Fig. 1). La première correspond à la sédimentation en présence des mouvements liés au mélange initial nécessaire pour mettre les billes en suspension. Elle disparaît au bout d'un temps visqueux correspondant au temps mis par le mélange initial pour s'atténuer par dissipation. Cette phase est très sensible aux caractéristiques du mélange, en particulier à la longueur caractéristique sur laquelle il est effectué. Nous avons donc pris soin d'effectuer le mélange toujours de la même façon. Après  $t_v$ , les particules sédimentent à la vitesse de Stokes  $v_s$ , créant ainsi un front de sédimentation. Une simple loi de conservation du nombre de particules total au cours du temps permet de retrouver une loi de décroissance linéaire :

$$N(t + dt) = N(t) - A\phi v_s dt \quad (1)$$

où  $A$  désigne l'aire de la base de la cuve et  $\phi$  est la concentration volumique de particules dans le fluide. La distribution de particules dans le front étant quasi-uniforme et constante dans le temps,  $\phi$  est égale à  $\frac{N_{t_v}}{AH}$  où  $N_{t_v} = N(t = t_v)$  est le nombre de particules présentes en suspension au moment où la sédimentation de Stokes devient prépondérante sur l'inertie du mélange initial. La résolution de l'équation 1 donne

$$N(t) = N_{t_v} \left( 1 + \frac{v_s}{H}(t_v - t) \right) \quad (2)$$

Sur la figure 1, nous montrons la décroissance observée expérimentalement ainsi que le résultat de l'ajustement par l'équation 2 en prenant  $t_v$  et  $v_s$  comme inconnues. Nous retrouvons systématiquement une valeur de  $v_s$  en accord avec la formule de Stokes, avec une erreur relative moyenne de 17 % provenant sans doute de la dispersion sur la taille des billes.

En présence de convection, nous observons aussi un mécanisme en deux étapes. Cependant, la transition entre les deux régimes ne s'effectue plus à l'instant où les structures initiales ont été dissipées par la viscosité mais plutôt au retour des mouvements convectifs tués par le mélange initial. Ce temps caractéristique correspond au temps thermique typique  $t_{th} = \frac{H^2}{\pi\kappa} \left( \frac{Ra_c}{Ra} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 10 s$ .

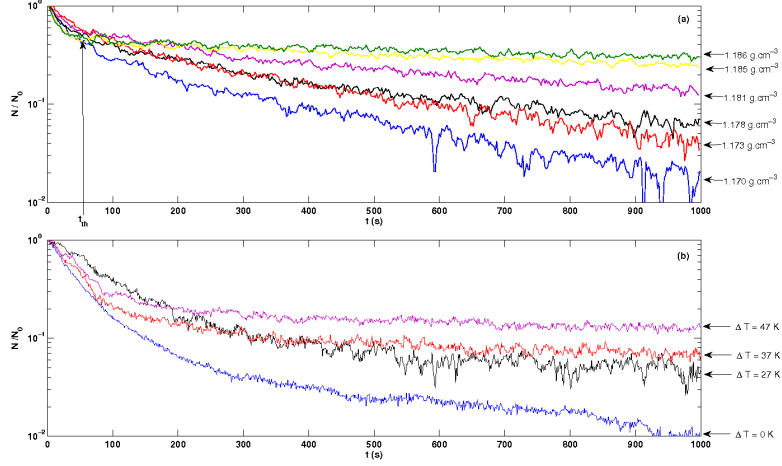
A partir de  $t_{th}$ , le comportement statistique des billes en suspension dépend fortement de  $\Delta\rho$  et  $\Delta T$  (Fig. 2). Plus la convection est vigoureuse, plus la fraction volumique finale de particules en suspension est importante. Plus  $\Delta\rho$  augmente, plus la fraction volumique diminue. Ces observations ne sont pas en accord avec la simple décroissance exponentielle prédite par Martin et Nokes [6] (Fig. 3).

En se plaçant par la pensée dans le référentiel d'une particule, le champ de vitesse de l'écoulement de convection turbulente apparaît isotrope et a tendance à disperser les particules. Il paraît alors possible de modéliser ce phénomène comme un processus classique de diffusion [3], à l'exception des couches limites thermiques où les mouvements convectifs sont absents. L'équation de conservation pour les particules, après moyennage selon les directions horizontales  $x$  et  $y$ , s'écrit alors :

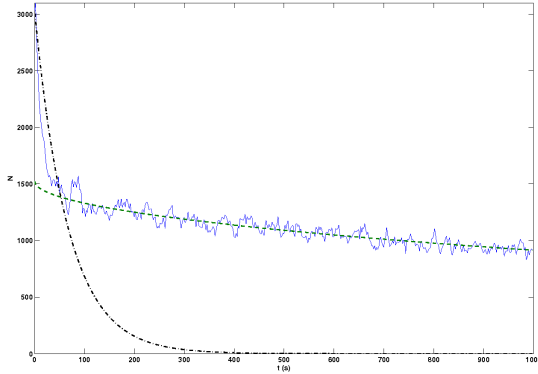
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - v_s \frac{\partial\phi}{\partial z} - D \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

valable une fois que la convection turbulente est rétablie (i.e. après  $t_{th}$ ). Après intégration de l'équation 3 entre  $\delta_{th}$  et  $H - \delta_{th}$  (correspondant à la partie convective du fluide), nous obtenons l'équation suivante :

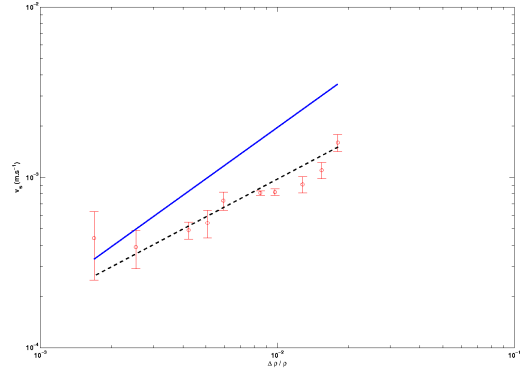
$$\frac{\partial N}{\partial t} - v_s(\phi(H - \delta_{th}) - \phi(\delta_{th})) - D \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{H-\delta_{th}} - \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{\delta_{th}} \right] = 0 \quad (4)$$



**Fig. 2.** Proportion de particules par rapport au nombre de particules initial  $N_0$  en fonction du temps : (a) avec convection ( $Ra = 3 \cdot 10^9$ ) et pour différentes densités de fluide (indiquées sur la droite de la figure) et (b) avec convection et pour différents  $\Delta T$  (indiquées sur la droite de la figure) et avec une valeur constante de  $\rho = 1.157$ . Initialement, toutes les courbes sont superposées à cause de l’inertie du mélange. Après le temps thermique  $t_{th}$  correspondant à la réapparition des mouvements de convection, l’évolution de  $\frac{N}{N_0}$  dépend de  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ .



**Fig. 3.** Nombre de particules en suspension,  $N$ , en fonction du temps et en présence de convection ( $Ra = 6 \cdot 10^9$ ). La courbe pointillée représente le fit des données par notre modèle, valable pour  $t > t_{th}$ . Les données sont mieux fittées par notre modèle que par une simple décroissance exponentielle (en trait discontinu).



**Fig. 4.** Vitesse de Stokes en fonction de  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ . Les données expérimentales sont correctement ajustées lorsqu’on considère une viscosité effective de  $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (droite en traits discontinus). En trait continu, le calcul de  $v_s$  fait avec une viscosité cinématique de  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

En accord avec l’étude de Belinsky *et al.* [1], le flux de particules à l’interface entre la couche limite thermique du haut et la partie convective est nul. De plus, si la convection est suffisamment forte pour que la concentration dans le fluide soit uniforme,  $\phi(\delta_{th}) = \frac{N}{H}$ . L’équation 4 s’écrit alors :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{v_s N}{H} = -D \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{\delta_{th}} \quad (5)$$

Il reste à évaluer le terme de droite de l’équation 5. Il s’agit en fait du flux diffusif à l’interface couche limite thermique du bas/couche convective. L’hypothèse que nous avons faite est de considérer que ce flux diffusif, qui correspond en réalité à un nombre de particules réentraînées par unité de temps, est constant après le temps thermique  $t_{th}$ . Nous le noterons  $R_{conv}$ . Lorsque l’état statistiquement stationnaire est

atteint,  $N = N_{eq} = \text{constante}$  et  $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ , donc  $R_{conv} = \frac{v_s N_{eq}}{H}$ . L'équation 5 s'écrit alors :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{v_s N}{H} = R_{conv} = \frac{v_s N_{eq}}{H} \quad (6)$$

La résolution habituelle de cette équation différentielle donne :

$$N(t) = (N_{t_{th}} - N_{eq}) \exp\left(-\frac{v_s}{H}(t - t_{th})\right) + N_{eq} \quad (7)$$

avec  $N_{t_{th}} = N(t = t_{th})$ . Cette expression simple nous permet de décrire l'ensemble de nos données, à condition d'ajuster  $N_{eq}$  et  $v_s$  en fonction de  $Ra$  et  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  (cf. par exemple figure 3). Sur la figure 4, nous avons porté  $v_s$  obtenue par cet ajustement en fonction de  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ . Nous constatons que les données expérimentales sont linéaires en  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ , comme attendu selon l'expression de la vitesse de Stokes. En revanche, la pente obtenue est plus faible que la pente théorique calculée avec une viscosité cinématique  $\nu$  de  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et correspond à une viscosité apparente de  $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , pouvant s'expliquer par le fait qu'aux nombres de Rayleigh auxquels nous travaillons (entre  $10^8$  et  $10^{10}$ ), la turbulence est pleinement développée et la viscosité pertinente dans le calcul de  $v_s$  n'est plus la viscosité cinématique mais la viscosité turbulente, notée  $\nu_t$  (cf. [2]).

Il reste maintenant à quantifier  $N_{eq}$ . Afin cependant de présenter un résultat indépendant de la taille du système, nous cherchons plutôt une loi d'échelle concernant la fraction volumique de billes en suspension à l'équilibre  $\xi_{eq} = \frac{V_b}{V_{obs}} N_{eq}$ , où  $V_b = \frac{4}{3}\pi R^3$  est le volume d'une bille et  $V_{obs}$  le volume d'observation. D'un point de vue énergétique, l'état statistiquement stationnaire est atteint lorsque l'on peut extraire par friction visqueuse une énergie suffisante pour équilibrer l'énergie potentielle de pesanteur contenue dans les particules en suspension. Ce transfert d'énergie présente une certaine quantité de pertes, traduit par un coefficient d'efficacité  $\epsilon$ . Cet équilibre se traduit mathématiquement par :

$$\epsilon \iiint_{\text{all fluid volume } V} \vec{v}_c \cdot \eta \nabla^2 \vec{v}_c dV = \iiint_{\text{all particles}} \vec{v}_s \cdot \Delta\rho \vec{g} dV \quad (8)$$

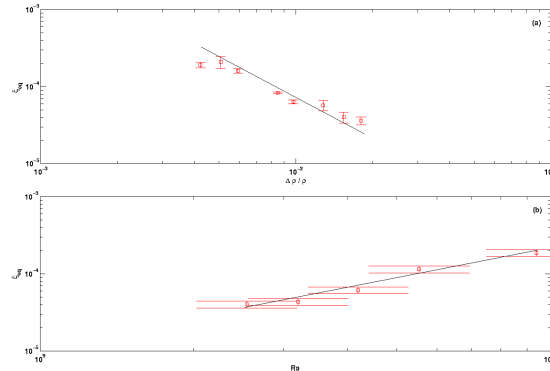
soit en ordre de grandeur  $\epsilon v_c \eta \frac{v_c}{l^2} V_{obs} = v_s \Delta\rho g \xi_{eq} V_{obs}$  où  $v_c$ , la vitesse convective, s'exprime comme  $v_c = \frac{\pi\kappa}{H} \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{\frac{1}{3}}$  et  $l = \delta_{th} = H \left(\frac{Ra_c}{Ra}\right)^{\frac{1}{3}}$  est la longueur typique thermique. Après calculs, nous obtenons :

$$\xi_{eq} = \epsilon \frac{9\pi^2}{2} \frac{\kappa^2 \nu_t^2}{H^4 g^2 R^2} \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{-2} \quad (9)$$

Sur la figure 5(a), nous portons en échelle log-log,  $\xi_{eq}$  mesurée expérimentalement en fonction de  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  ainsi que le meilleur fit correspondant. Un coefficient directeur de  $-2$ , en accord avec l'équation 9, est compatible avec nos données. L'ordonnée à l'origine donnée par le fit est de  $-18.9$ . Cette valeur permet, à l'aide de l'équation (9), de calculer le coefficient d'efficacité  $\epsilon$ . En utilisant  $\nu_t = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , nous déterminons une efficacité de 0.87 %. De la même façon, la figure 5(b) montre la dépendance de  $\xi_{eq}$  en fonction de  $Ra$  en échelle log-log. Nos données valident la loi d'échelle (9) avec une pente mesurée de 1.35, à comparer avec la pente théorique de  $4/3$ . De même, l'ordonnée à l'origine permet de calculer  $\epsilon$ . Nous trouvons dans ce cas une valeur de 4.8 %, plus grande que celle trouvée précédemment. A noter cependant que les incertitudes sur l'efficacité sont grandes, liées à la précision du fit -notamment celui en fonction de  $Ra$  qui court sur une gamme réduite-, à la dispersion dans la taille des particules et à la précision sur les mesures de températures et de densités. Pour comparaison, le facteur d'efficacité a été estimé entre 0.2 et 0.9 % par Solomatov *et al.* [8].

## 4 Conclusion, application à l'océan de magma terrestre initial

Grâce à nos expériences, nous avons donc réconcilié entre elles les études de Martin et Nokes [6] et de Solomatov *et al.* [8] en proposant un modèle unique, faisant intervenir un terme de ré-entraînement,



**Fig. 5.** Fraction volumique en suspension à l'équilibre  $\xi_{eq}$  mesurée expérimentalement : (a) en fonction du rapport  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ , à  $Ra = 3.10^9$ . La droite, de pente  $-2$  correspondant à notre loi d'échelle, s'aligne correctement avec les points expérimentaux. (b) en fonction du nombre de Rayleigh  $Ra$ , pour une densité de fluide de 1.150. La droite, de pente  $4/3$  est en accord avec notre modèle.

décrivant l'évolution temporelle du nombre de particules en suspension. Par ailleurs, à partir de l'équation 3, il est possible de définir un nombre de Peclet  $Pe = \frac{v_s H}{D}$  qui permet de séparer deux régimes : quand  $Pe \ll Pe_s$ , la diffusion turbulente est dominante et les particules ont tendance à rester en suspension, ce qui correspond au cas "T-dominated" introduit par Hoïnk *et al.* [4]. Au contraire les particules sédimentent quand  $Pe \gg Pe_s$ , ce qui correspond au cas "C-dominated" de Hoïnk *et al.*. Par analogie avec le modèle d'Einstein décrivant le mouvement brownien, nous pouvons calculer  $D$  par analyse dimensionnelle :  $D = v_c \times H$ , où  $H$  correspond au libre parcours moyen des mouvements convectifs et  $v_c = \frac{\kappa}{\pi H} \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^\beta$ . Alors,  $Pe_s = \frac{2}{9\pi} B_s Ra_c^\beta \left(\frac{R}{H}\right)^2 Ra_s^{1-\beta}$  avec  $\beta = 2/3$  dans le cas considéré numériquement où  $Pr = \infty$  (cf. Korenaga et Jordan [5]), en accord avec le diagramme des régimes décrit par Hoïnk *et al.* pour  $Pe_s = 3.10^{-3}$ . Pour les paramètres typiques d'un océan de magma et en utilisant  $\beta = 1/3$ , nous confirmons alors que les gouttelettes de fer de diamètre 1 cm [7] sédimentent systématiquement et que la fraction volumique en suspension reste négligeable, inférieure à  $10^{-4}$  %.

## Références

1. M. BELINSKY, H. RUBIN, Y. AGNON, E. KIT & J. ATKINSON, Characteristics of resuspension, settling and diffusion of particulate matter in a water column, *Environmental Fluid Mechanics*, **5**, 415–441 (2005).
2. D. BRITO, J. AURNOU & P. CARDIN, Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics, *Phys. Earth Planet. Int.*, **141**, 3–8 (2004).
3. L. DEIKE, *Suspension de particules dans un écoulement turbulent*, Master's thesis, Université de Provence — IUSTI, July 2007.
4. T. HOÏNK, J. SCHMALZL & U. HANSEN, Dynamics of metal-silicate separation in a terrestrial magma ocean, *G<sup>3</sup>*, **7** (9), September 2006.
5. J. KORENAGA AND T. JORDAN, Effects of vertical boundaries on infinite prandtl number thermal convection, *Geophys. J. Int.*, **147**, 639–659 (2001).
6. D. MARTIN AND R. NOKES, Crystal settling in a vigorously convecting magma chamber, *Nature*, **332**, April (1988).
7. D.C. RUBIE, H. MELOSH, J. REID, C. LIEBSKE & K. RIGHTER, Mechanisms of metal-silicate equilibration in the terrestrial magma ocean, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **205**, 239–255 (2003).
8. V. SOLOMATOV, P. OLSON & D. STEVENSON, Entrainment from a bed of particles by thermal convection, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **120**, 387–393 (1993).



# Conditions nécessaires de chaos pour le système de Sprott E

Jean-Marc Malasoma

Université de Lyon, DGCB URA CNRS 1652  
ENTPE, Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx en Velin Cedex  
malasoma@entpe.fr

**Résumé.** Nous établissons de façon rigoureuse des conditions nécessaires pour que le système de Sprott E puisse admettre des solutions chaotiques. L'utilisation de ces conditions, permet de changer l'échelle du temps en respectant son sens, ainsi que les échelles des trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On obtient alors quatre paramètres unitaires et il reste un unique paramètre positif contrôlant la dissipation du flot. Cette méthode conduit à deux formes réduites. Dans un cas le système n'est jamais chaotique, tandis que l'autre il peut l'être pour certaines valeurs de son paramètre.

**Abstract.** In this paper we study the nonchaotic and chaotic behavior of the Sprott system E. We prove theorems which provide necessary conditions for solutions being chaotic. By using these necessary conditions, the system is rescaled in order to eliminate four parameters, possibly leaving an arbitrary  $\pm$  sign on one term. This rescaling cannot reverse the time. Two reduced systems are obtained. One is never chaotic, the second one may be chaotic for some values of its control parameter.

## 1 Introduction

Le système dynamique décrit en 1963 par Lorenz [1] possède une symétrie de rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $Oz$ , symétrie qui n'est pas essentielle pour l'existence de solutions chaotiques. Son champ de vecteurs présente de plus une structure algébrique assez complexe comportant sept monômes dont deux sont quadratiques. En 1976, Rössler découvre un premier système chaotique [2] dépourvu de symétrie et possédant une structure algébrique plus simple que celle du système de Lorenz. Il est encore constitué de sept monômes mais un seul d'entre eux est quadratique. Trois ans plus tard, deux nouveaux modèles chaotiques constitués seulement de six monômes, dont un seul quadratique, ont été étudiés indépendamment l'un par Rössler [3] et l'autre par Couillet, Tresser et Arnéodo [4].

Depuis, un grand nombre de systèmes chaotiques ont été décrits dans la littérature. Toutefois, ce n'est qu'en 1994 que Sprott, ignorant l'existence des deux systèmes trouvés en 1979, relance la recherche de systèmes chaotiques quadratiques, présentant des structures algébriques plus simples que celle du système de Lorenz et que celle du premier système de Rössler. Après plusieurs mois de simulations numériques, il a mis en évidence [5] quatorze systèmes chaotiques constitués de six monômes dont une nonlinéarité et cinq systèmes chaotiques constitués de cinq monômes dont deux nonlinéarités.

Cette étude purement numérique n'est pas exhaustive, ainsi par exemple les deux systèmes de 1979 n'ont pas été retrouvés. Parmi ces dix-neuf systèmes, deux d'entre eux présentent la même symétrie que le système de Lorenz. Ils constituent les représentants de deux classes d'équivalence de systèmes quadratiques, équivariants par rotation de  $\pi$  autour de l'axe  $Oz$  et présentant une structure algébrique minimale autorisant des comportements chaotiques et j'ai proposé récemment une troisième classe de systèmes minimaux de type Lorenz [6].

Les dix-sept autres systèmes de 1994 ne sont pas minimaux. Toutefois en 1997 Sprott a mis en évidence deux nouveaux flots [7], équivalents et dépourvus de symétrie, avec une structure algébrique minimale c'est-à-dire constituée de cinq monômes dont un seul quadratique. Enfin en 2002 j'ai montré l'existence de sept nouveaux systèmes minimaux et chaotiques qui peuvent être regroupés avec les deux flots de Sprott de 1997 en deux classes d'équivalence [8].

## 2 Systèmes de Sprott à un seul point fixe : exemple du système E

Les sept systèmes de Sprott possédant un unique point d'équilibre sont désignés par D,E,I,J,L,N et R dans [5]. Ils peuvent être traités de façon similaire, bien que chaque cas nécessite une adaptation de la méthode utilisée. Dans le cadre de cet article, par manque de place, nous ne traiterons qu'un exemple représentatif, celui du système E :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -y + x^2 \\ \dot{z} = 1 - 4x \end{cases} \quad (1)$$

Il possède l'unique point d'équilibre  $P_e = (1/4; 1/16; 0)$  qui est un centre de valeurs propres  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = i/2$  et  $\lambda_3 = -i/2$ .

Le système E est une représentation numérique particulière du système plus général dépendant de cinq paramètres de contrôle réels :

$$\begin{cases} \dot{x} = ayz \\ \dot{y} = by + cx^2 \\ \dot{z} = d + ex \end{cases} \quad (2)$$

Ce dernier est conservatif si  $b = 0$  et dissipatif si  $b < 0$ . Il possède un unique point d'équilibre si  $be \neq 0$ , ce point est alors  $P_e = (-d/e, -cd^2/be^2, 0)$ . Si  $acd = 0$  ce point n'est pas hyperbolique, ses valeurs propres sont  $\lambda_1 = b < 0$  et  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Si  $acd \neq 0$  le point est hyperbolique et sa nature dépend du signe du produit  $abce$ . Si  $abce > 0$  c'est-à-dire si  $b < 0$  et  $ace < 0$  c'est un centre de valeurs propres  $\lambda_1 = b < 0$ ,  $\lambda_2 = id\sqrt{ac/be}$  et  $\lambda_3 = -id\sqrt{ac/be}$  comme dans le cas du système de Sprott d'origine. Si au contraire  $abce < 0$  c'est-à-dire si  $b < 0$  et  $ace > 0$  il s'agit d'un col de valeurs propres  $\lambda_1 = b < 0$ ,  $\lambda_2 = d\sqrt{-ac/be}$  et  $\lambda_3 = -d\sqrt{-ac/be}$  avec une variété stable de dimension 2 et une variété instable de dimension 1.

## 3 conditions nécessaires de chaos

Nous allons dans cette section établir des conditions suffisantes, portant sur les paramètres, pour que le système ne soit pas chaotique.

**Théorème 1 :** *Si l'un des ses cinq paramètres de contrôle est nul, le système de Sprott E généralisé (2) n'admet pas de solution chaotique.*

**Preuve :** examinons successivement les cinq cas possibles. Si  $a = 0$  alors  $\dot{x} = 0$ , par conséquent les solutions sont dans le plan  $x = cte$  donc elles ne peuvent pas être chaotiques d'après le théorème de Poincaré-Bendixson [9,10]. Si  $b = 0$ , alors  $\dot{y} = cx^2$ , par suite soit  $y = cte$  si  $c = 0$ , soit  $y$  est monotone si  $c \neq 0$ , donc admet une limite  $L$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Si cette limite est finie, les solutions sont asymptotiques au plan d'équation  $y = L$ . Sinon  $|y|$  tend vers  $+\infty$ . Dans tous les cas la solution n'est pas chaotique. On peut donc supposer  $b \neq 0$  donc  $b < 0$ , supposons alors que  $c = 0$ , c'est-à-dire que  $\dot{y} = by$ . Par conséquent soit  $y = 0$ , soit  $y$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . On conclut comme précédemment. Nous pouvons maintenant supposer  $abc \neq 0$  et  $d = 0$ . Le système (2) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = ayz \\ \dot{y} = by + cx^2 \\ \dot{z} = ex \end{cases} \quad (3)$$

On peut évidemment supposer  $e \neq 0$  sinon les solutions sont dans le plan  $z = cte$ , donc non chaotiques. Supposons  $c > 0$ , alors d'après la seconde équation de (3)  $y$  est croissant tant qu'il demeure négatif. S'il ne prend pas de valeurs positives  $y$  tend vers une limite  $L \leq 0$ , si au contraire il devient positif, il ne peut plus s'annuler et demeure positif pour  $t > t_1$ . Supposons au contraire  $c < 0$ , alors  $y$  est décroissant tant qu'il demeure positif. S'il ne prend pas de valeurs négatives  $y$  tend vers une limite  $L \geq 0$ , si au contraire il devient négatif, il ne peut plus s'annuler et demeure négatif pour  $t > t_2$ . On peut donc supposer que  $y$  ne s'annule plus pour  $t$  plus grand qu'un certain  $t_0$ . La première équation de (3) donne

$$-2ec \frac{x\dot{x}}{y} = -2acexz \quad (4)$$

La seconde équation de (3) implique

$$e \left( \frac{b}{y} + c \frac{x^2}{y^2} \right) \dot{y} = eb^2 + 2bce \frac{x^2}{y} + ec^2 \frac{x^4}{y^2} \quad (5)$$

Enfin la troisième équation de (3) donne

$$2acz\dot{z} = 2acexz \quad (6)$$

En additionnant membre à membre les trois relations (4), (5) et (6) on obtient facilement

$$\dot{F} = e \left( b + c \frac{x^2}{y} \right)^2 \quad (7)$$

où  $F$  est la fonction définie pour  $t > t_0$  par

$$F(x, y, z) = acz^2 - ec \frac{x^2}{y} + eb \ln |y| \quad (8)$$

cette fonction monotone admet une limite  $L$ . De deux choses l'une, soit  $L$  est finie par conséquent le comportement est asymptotiquement bidimensionnel défini par  $F(x, y, z) = L$ . Soit  $L$  est infinie et alors soit  $y$  tend vers zéro et le comportement asymptotique est dans le plan  $y = 0$ , soit  $x$  ou  $z$  tend vers l'infini. Dans les deux cas les solutions sont non chaotiques.

Enfin il reste le cas  $e = 0$  c'est-à-dire  $\dot{z} = d$ . Si  $d = 0$  les solutions sont dans le plan  $z = cte$ , sinon  $d \neq 0$  et  $|z|$  tend vers  $+\infty$ , dans les deux éventualités les solutions ne sont pas chaotiques •

Ainsi, nous supposons dans la suite que tous les paramètres du système (2) ne sont pas nuls.

**Théorème 2 :** *Le système de Sprott E généralisé (2) n'est pas chaotique si son unique point fixe est un col c'est-à-dire si  $b < 0$  et  $ace > 0$ .*

**Preuve :** la première équation de (2) donne

$$e(2d + 2ex + bz)\dot{x} = 2adeyz + 2ae^2xyz + abeyz^2 \quad (9)$$

La seconde équation de (2) implique évidemment

$$-aez^2\dot{y} = -abeyz^2 - acex^2z^2 \quad (10)$$

Enfin la troisième équation de (2) fournit la relation

$$(bd + bex - 2aeyz)\dot{z} = bd^2 + 2bdex + be^2x^2 - 2adeyz - 2ae^2xyz \quad (11)$$

En additionnant membre à membre les trois relations (9), (10) et (11) on obtient

$$\dot{M} = b(d + ex)^2 - acex^2z^2 \quad (12)$$

où  $M$  est le polynôme de degré trois

$$M(x, y, z) = 2dex + bdz + e^2x^2 + bexz - aeyz^2 \quad (13)$$

Compte tenu de l'hypothèse faite, on a  $\dot{M} \leq 0$  et par conséquent la fonction  $M$  est une fonction décroissante du temps qui admet alors admet une limite  $L$ . Une fois encore, soit  $L$  est finie par conséquent asymptotiquement le comportement est bidimensionnel défini par  $M(x, y, z) = L$  et d'après le théorème de Poincaré-Bendixson il n'est pas chaotique. Soit  $L = -\infty$  et par conséquent au moins une des trois variables tend vers l'infini ce qui exclut aussi tout comportement chaotique •

#### 4 Les deux formes réduites

Compte tenu des résultats que nous venons d'obtenir, nous pouvons définir dans l'espace de ses paramètres deux zones dans lesquelles le comportement du système (2) est bien distinct. La première est définie par les deux inégalités  $b < 0$  et  $ace > 0$ . On effectue alors les changements d'échelles qui respecte le sens du temps :  $x = A\tilde{x}$ ,  $y = B\tilde{y}$ ,  $C\tilde{z}$  et  $t = D\tilde{t}$ , où les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont données par :

$$\begin{cases} A = \frac{d}{e} \\ B = \frac{cd^2}{e^2} \left( \frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ C = d \left( \frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ D = \left( \frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} > 0 \end{cases} \quad (14)$$

En revenant aux anciennes notations, c'est-à-dire aux variables sans les tildes, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -\alpha y + x^2 \\ \dot{z} = 1 + x \end{cases} \quad (15)$$

où  $\alpha$  est un paramètre positif. D'après la section précédente, le système (15) n'est pas chaotique car le polynôme  $M$  défini par :

$$M(x, y, z) = 2x - \alpha z + x^2 - \alpha xz - yz^2 \quad (16)$$

est une fonction décroissante du temps puisque sa dérivée temporelle est négative :

$$\dot{M} = -x^2z^2 - \alpha(1+x)^2 \quad (17)$$

La Fig. 1 illustre deux exemples de surfaces d'équation  $M(x, y, z) = L$  pour deux valeurs opposées de la limite  $L$ . Pour  $L > 0$  la surface est à une seule nappe, mais pour  $L < 0$  elle en possède deux.

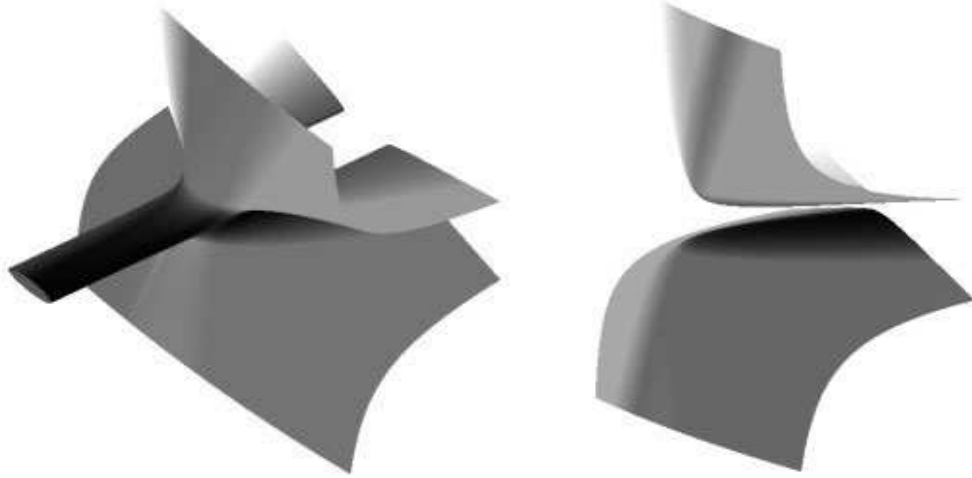
La deuxième zone est définie par les deux inégalités  $b < 0$  et  $ace < 0$  et on effectue cette fois les changements d'échelles qui respecte encore le sens du temps :  $x = A\tilde{x}$ ,  $y = B\tilde{y}$ ,  $C\tilde{z}$  et  $t = D\tilde{t}$ , avec :

$$\begin{cases} A = -\frac{d}{e} \\ B = \frac{cd^2}{e^2} \left( -\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ C = d \left( -\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ D = \left( -\frac{e}{acd^2} \right)^{\frac{1}{3}} > 0 \end{cases} \quad (18)$$

ce qui donne en revenant aux notations sans les tildes :

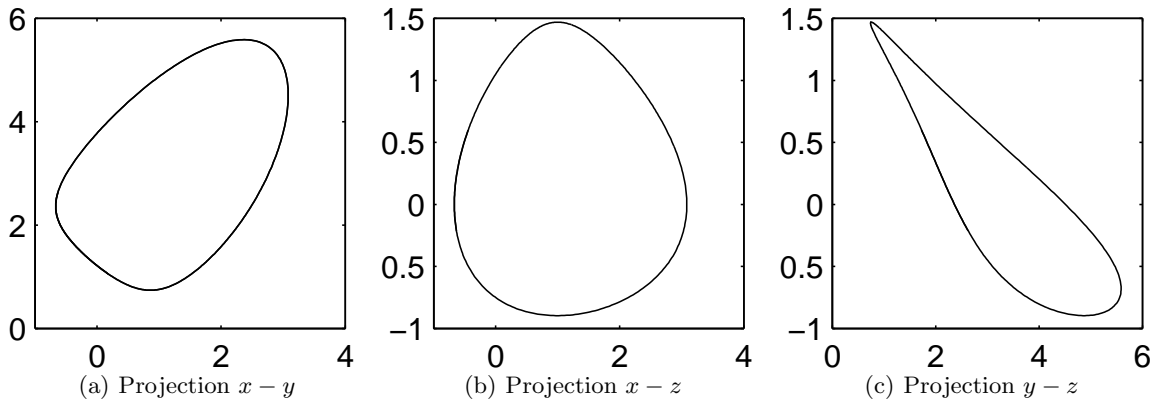
$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -\alpha y + x^2 \\ \dot{z} = 1 - x \end{cases} \quad (19)$$

où l'unique paramètre de contrôle du système est  $\alpha$  est positif. Bien entendu les conditions permettant l'obtention du système (19), ne sont que des conditions nécessaires pour qu'il puisse admettre des solutions chaotiques. En général ce système n'est pas chaotique pour toutes les valeurs positives de son paramètre



(a) Surface à une nappe pour  $L = 10$                       (b) Surface à deux nappes pour  $L = -10$

**Fig. 1.** Surface d'équation  $M(x, y, z) = L$  pour  $\alpha = 1$



**Fig. 2.** Cycle limite asymptotiquement stable du système (19) pour  $\alpha = 1$ .

de contrôle. Illustrons ces propos par deux exemples numériques. Pour  $\alpha = 1$ , l'attracteur du système est un cycle limite asymptotiquement stable, dont les projections sur les trois plans  $x - y$ ,  $x - z$  et  $y - z$  sont représentés sur la Fig. 2.

Les paramètres du système de Sprott E (1), vérifient les conditions nécessaires pour que ce système puisse admettre des solutions chaotiques. On vérifie numériquement qu'elles sont suffisantes dans ce cas. En effectuant des changements d'échelles ce système s'écrit sous la forme réduite (19) suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = -4^{\frac{1}{3}}y + x^2 \\ \dot{z} = 1 - x \end{cases} \quad (20)$$

Le système possède alors un attracteur chaotique dont les projections sont représentées sur la Fig. 3.

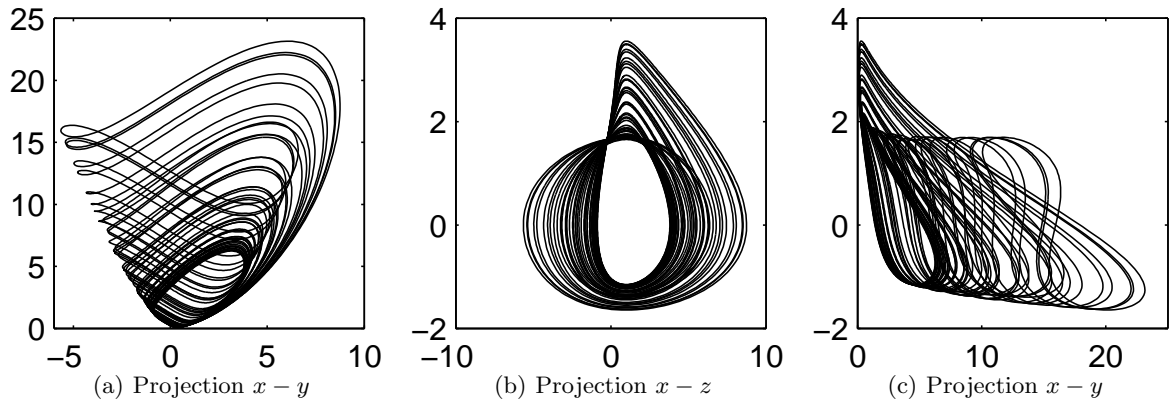


Fig. 3. Attracteur chaotique du système (20).

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré, en illustrant nos propos avec l'exemple du système de Sprott E introduit en 1994, comment effectuer une étude analytique rigoureuse de l'espace de ses cinq paramètres de contrôle. Nous avons obtenu une partition de l'espace des paramètres en deux zones de mesure non nulle, dans lesquelles le comportement du système est bien différent. Dans une de ces zones, il n'admet pas de solution chaotique, alors que dans l'autre, il peut éventuellement en avoir.

Les six autres systèmes de Sprott ne possédant qu'un seul point fixe, peuvent être traités de façon analogue au système E. On obtient ainsi pour chaque système des conditions nécessaires pour qu'il puisse posséder des solutions chaotiques. L'utilisation de ces conditions permet de changer l'échelle du temps, en respectant son sens, ainsi que l'échelle de ses trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Quatre paramètres prennent les valeurs  $\pm 1$  et il reste un ou deux paramètres libres, suivant que le système est constitué de cinq ou six monômes. Le lecteur intéressé trouvera les détails de cette étude dans [11].

## Références

1. E.N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, (1963).
2. O.E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, (1976).
3. O.E. RÖSSLER, Continuous chaos - Four prototype equations, *Annals of the New York Academy of Sciences*, **316**, 376-392, (1979).
4. P. COULLET, C. TRESSER & A. ARNEODO, A transition to stochasticity for a class of forced oscillators, *Physics letters A*, **72** (4-5), 268-270, (1979).
5. J.C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50**, R647-R650, (1994).
6. J.-M. MALASOMA, New Lorenz-like chaotic flows with minimal algebraic structure, *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **1** (2), 1-16, (2008).
7. J.C. SPROTT, Simplest dissipative chaotic flow, *Physics letters A*, **228**, 271-274, (1997).
8. J.-M. MALASOMA, A new class of minimal chaotic flows, *Physics letters A*, **305**, 52-58, (2002).
9. H. POINCARÉ Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **1**, 167-244, (1885).
10. I. BENDIXSON Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Mathematica*, **24**, 1-88, (1901).
11. J.-M. MALASOMA, Necessary conditions for seven Sprott systems to be chaotic, *en préparation*, (2009).

# Instabilité convective en milieu inhomogène : la réponse impulsionnelle dans le sillage sous-critique d'un cylindre.

C. Marais<sup>1</sup>, R. Godoy-Diana<sup>1</sup>, D. Barkley<sup>2</sup> & J.E. Wesfreid<sup>1</sup>

<sup>1</sup> PMMH, Equipe Instabilités, Contrôle et Turbulence  
CNRS ESPCI, Univ. Paris 6 et Paris 7.

<sup>2</sup> Mathematics Institute, University of Warwick  
marais@pmmh.espci.fr

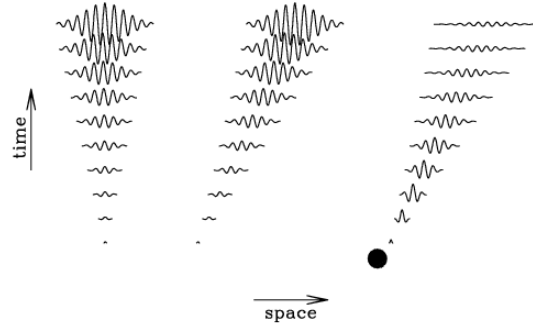
**Abstract.** We study experimentally the impulse response of a cylinder wake below the critical Reynolds number of the Bénard-von Kármán instability. In this subcritical regime, a localized inhomogeneous region of convective instability exists which determines an initial perturbation to be transiently amplified. The aim of this work is to quantify the evolution of this convective instability using 2D particle image velocimetry in a hydrodynamic tunnel experiment. The velocity fields allow us to describe the evolution of the wave packet in terms of two control parameters : the Reynolds number and the strength of the imposed perturbation. Then we could characterize the wave packet's behavior function of these parameters. The temporal evolution of the energy exhibits a transient algebraic growth at short times followed by an exponential decay.

## 1 Introduction

L'écoulement derrière un cylindre est le prototype le plus classique pour l'étude des instabilités hydrodynamiques dans des écoulements décollés. En effet, le cas académique de sillage bidimensionnel peut être utilisé comme modèle de base pour des situations aussi variées que l'écoulement derrière un câble, autour d'une aile d'avion ou de piliers de ponts. Lorsque le nombre de Reynolds atteint une certaine valeur critique ( $Re_c \approx 47$  dans le cas d'un cylindre infiniment long, [3]), il apparait dans le sillage du cylindre une double-allée de tourbillons alternés émis à une fréquence caractéristique globale : la fameuse allée de Bénard-Von Karman. Cette apparition est due à la transition de l'instabilité d'un état initialement convectif vers un état absolu. Une instabilité est dite convective si elle croit tout en étant advectée avec l'écoulement (elle décroît donc pour toute position fixe), et absolue si elle croit sur place (Fig. 1). La vitesse du front de propagation de l'instabilité peut servir de critère pour distinguer une instabilité convective d'une instabilité absolue, celle-ci étant nulle dans le cas absolu [4]. Dans le régime sous-critique ( $Re < Re_c$ ) nous pouvons observer une amplification transitoire de toute perturbation initiale (Fig. 1 (droite)). Très peu d'études expérimentales portent sur ce régime, et la croissance transitoire n'a pas été correctement mise en évidence faute de mesures quantitatives. Nous cherchons donc à analyser ce phénomène afin d'en obtenir ses comportements clé. Après description du montage expérimental, nous nous intéressons tout d'abord à l'évolution du paquet d'ondes instable. La décroissance vers zéro des vitesses de groupe et de front arrière du paquet quand le seuil d'instabilité globale est approché confirme la transition vers une instabilité absolue. De plus, l'évolution du maximum de la perturbation, de sa position dans l'espace et dans le temps en fonction de nos paramètres de contrôle : force de perturbation et écart au seuil, nous permet de caractériser le comportement sous critique du paquet. Ensuite, afin de quantifier le phénomène de croissance transitoire dû à l'inhomogénéité du milieu, nous analysons l'évolution temporelle de l'énergie de perturbation. Celle-ci présente une croissance algébrique transitoire aux temps courts suivie d'une décroissance exponentielle aux temps longs.

## 2 Montage Expérimental

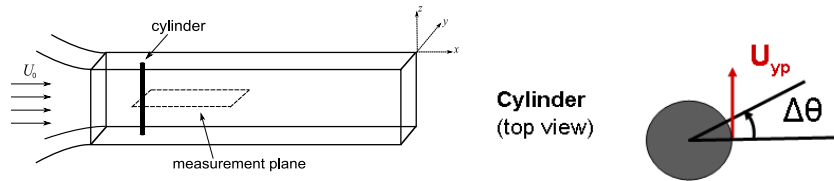
Un cylindre de diamètre 5 mm est placé dans un tunnel hydrodynamique de section 100mm x 100mm (Fig. 2 gauche). En utilisant la vitesse d'écoulement entrante dans le tunnel  $U_0$  (nous avons choisi



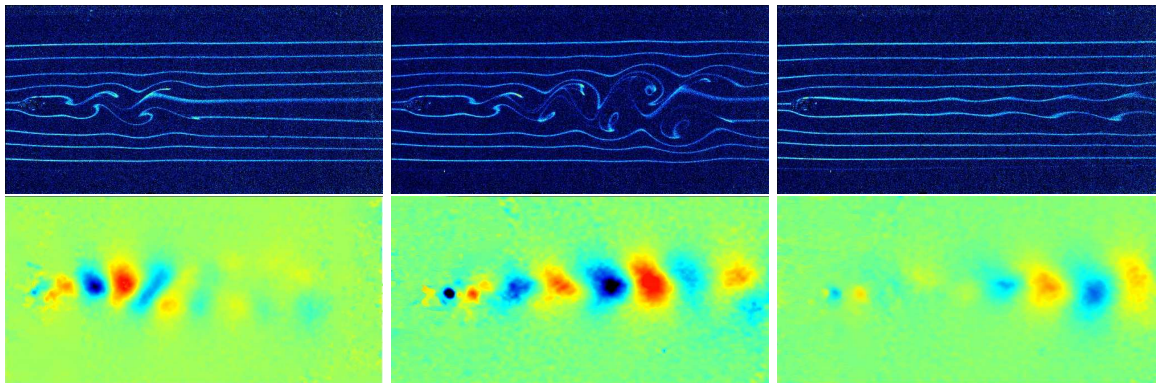
**Fig. 1.** Schéma des instabilités absolue et convective : nous imposons une perturbation infinitésimale, localisée dans l'espace. A gauche, la perturbation croît sur place : l'instabilité est dite absolue. Au milieu, à une position fixée, la perturbation décroît : l'instabilité est dite convective. A droite, en milieu inhomogène, pour des écoulements à géométrie complexe, nous pouvons aussi observer des régions locales d'instabilité convective entourées par des régions de stabilité : la perturbation commence initialement par croître et est simultanément advectée avec l'écoulement jusque dans une région de stabilité dans laquelle la perturbation décroît [1].

la valeur maximale du profil de la vitesse entrante) et la viscosité du fluide  $\nu$ , le nombre de Reynolds est défini par :  $Re = \frac{U_0 * D}{\nu}$ . Le nombre de Reynolds critique pour nos expériences est  $Re_c \approx 64$ , ce qui est supérieur au cas idéal 2D. Cette différence est majoritairement due aux effets de confinement. Nous ajustons le nombre de Reynolds du sillage en contrôlant la vitesse d'écoulement dans le tunnel  $U_0$ . Afin de pouvoir comparer nos résultats avec n'importe quelle autre situation, nous avons défini le nombre de Reynolds réduit  $\epsilon = (Re - Re_c)/Re_c$ , qui correspond à l'écart au seuil d'instabilité globale. Dans nos expériences,  $\epsilon$  varie de -0.30 à -0.04. Pour cet interval de nombre de Reynolds, l'écoulement reste strictement bi-dimensionnel. Ainsi, nous avons choisi de travailler dans le plan à mi-hauteur du cylindre pour faire nos mesures. La hauteur du cylindre est de 98 mm, et couvre donc la quasi-totalité de la hauteur de la section test du tunnel. Nous avons utilisé un système de coordonnées cartésien, dont l'origine est le centre du cylindre, avec l'axe des  $x$  pointant dans la direction de l'écoulement et l'axe des  $z$  parallèle à l'axe du cylindre (donc vertical). L'axe du cylindre peut être mis en rotation par un moteur pas à pas, que l'on contrôle via un module électronique à micro-pas programmable. L'impulsion est un mouvement très bref de rotation du cylindre autour de son axe, avec une amplitude finie choisie, pendant un temps  $\tau$ . Ainsi, nous pouvons varier la perturbation via la vitesse angulaire et/ou l'amplitude du mouvement du cylindre à partir de sa position initiale. Dans nos expériences, nous utilisons trois amplitudes de perturbations, la plus faible étant donnée par la plus petite perturbation nous donnant une réponse observable dans le sillage :  $V_{yp}/U_0 = 75, 100$  et  $125$  (Fig. 2 droite). Ce choix de perturbations nous permet d'obtenir un temps de perturbation adimensionné constant :  $t/\tau_{adv} \approx 0.2$ , où  $\tau_{adv} = d/U_0$  est le temps de convection construit avec la vitesse d'entrée dans le tunnel et le diamètre du cylindre  $d$ . Une observation qualitative de l'évolution du paquet d'ondes généré par la perturbation peut être obtenue par visualisation des lignes d'émissions (Fig. 3 gauche). Nous injectons du colorant (la fluorescéine) à l'aide de tubes capillaires. Plusieurs filets de colorant régulièrement espacés le long de la largeur du tunnel arrivent donc sur le cylindre, de part et d'autre de celui-ci et se déforment à cause du paquet d'ondes instable (voir aussi [2]). Pour faire nos mesures, nous utilisons la méthode de Vélocimétrie par Image de Particules à deux dimensions (PIV 2D) dans le même plan horizontal à mi-hauteur du cylindre (Fig. 3 droite). L'acquisition PIV et le post traitement ont été réalisés par l'intermédiaire du système LaVision, avec une caméra Phantom 1600\*1200 permettant d'enregistrer jusqu'à 1000 images par seconde et un laser continu. L'intervalle de temps ( $\delta t$ ) entre deux images successives a été fixé à 20 ms. Nous avons ensuite utilisé le logiciel Matlab et la boîte à outils PIVMat pour traiter et analyser les données.





**Fig. 2.** Schema du montage expérimental dans le tunnel hydrodynamique (gauche) et vue schématique du dessus du cylindre avec la définition de la perturbation (droite).



**Fig. 3.** Visualisation de la réponse impulsionnelle : (haut) Visualisation avec de la fluoresceine des lignes d'émission (bas) Champ instantané de la vitesse transverse avec la PIV.

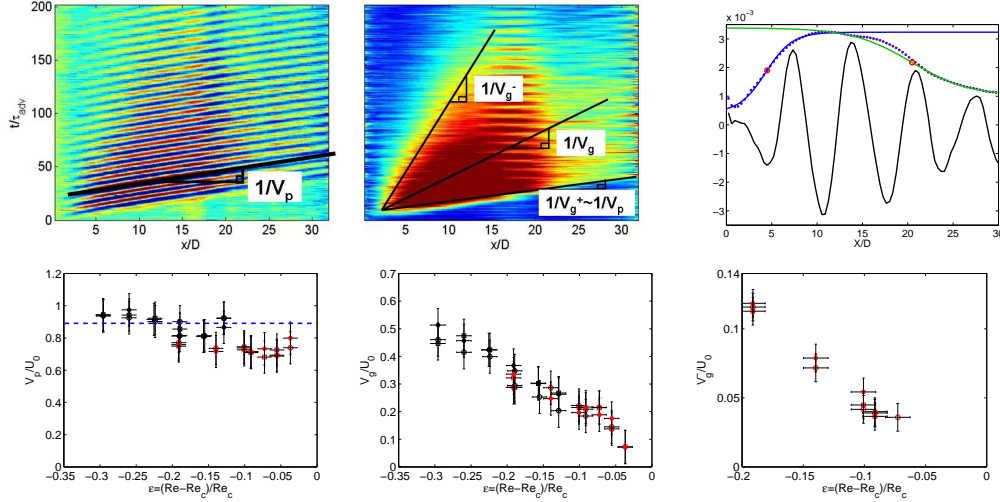
### 3 Evolution du paquet d'ondes instable

La quantité la plus appropriée pour étudier l'évolution du paquet d'onde convectif produit par la perturbation initiale est la vitesse transverse  $V_y$ . En effet, celle-ci est nulle sur l'ensemble de l'axe de symétrie  $y = 0$  lorsque l'écoulement n'est pas perturbé. Ainsi, pour chaque image de champ de vitesse d'une série temporelle, nous avons sélectionné les profils de  $V_y$  le long de l'axe des  $x$ , sur l'axe de symétrie du sillage  $y = 0$ . En empilant ces profils successifs, un diagramme spatio-temporel peut être construit. Nous avons aussi représenté le diagramme spatio-temporel associé aux enveloppes successives des profils de  $V_y$  le long de l'axe des  $x$ <sup>1</sup>, afin de visualiser l'évolution de l'ensemble du paquet d'ondes. La nature convective du sillage est mise clairement en évidence sur les diagrammes spatiotemporels. Un exemple est donné dans la figure 4 (haut gauche et milieu). Ces deux diagrammes nous permettent de définir la vitesse de phase  $V_p$  comme la vitesse de translation de chaque vortex dans le paquet d'ondes, et la vitesse de groupe comme la vitesse de l'ensemble du paquet. Nous avons aussi défini les vitesses de front (avant et arrière), ce qui nous permet d'obtenir une meilleure représentation de l'évolution de la forme globale du paquet d'ondes plutôt que la seule vitesse de groupe. Nous avons défini la position de ces fronts aux points d'inflexion de l'enveloppe de  $V_y$ <sup>2</sup> (Fig. 4 haut droite). Nous pouvons noter que la vitesse du front avant " $V_g^+$ " est équivalente à la vitesse de phase, puisque le front est déterminé par le premier vortex détaché du cylindre. Nous examinons le comportement de ces différentes vitesses quand  $\epsilon \rightarrow 0$  (c'est-à-dire quand  $Re \rightarrow Re_c$ ). Nous nous attendons à ce que les vitesses de groupe et de front arrière se propagent de plus en plus lentement lorsque le seuil d'instabilité global est approché puisque l'instabilité devient absolue au seuil, et que par définition  $V_g$  et " $V_g^+$ " doivent être nulles dans ce cas. L'angle de ces vitesses avec la verticale, c'est-à-dire avec l'axe du temps, devrait donc diminuer.

<sup>1</sup> L'enveloppe des profils de  $V_y$  est obtenue en prenant la valeur absolue de la transformée de Hilbert de  $V_y$ .

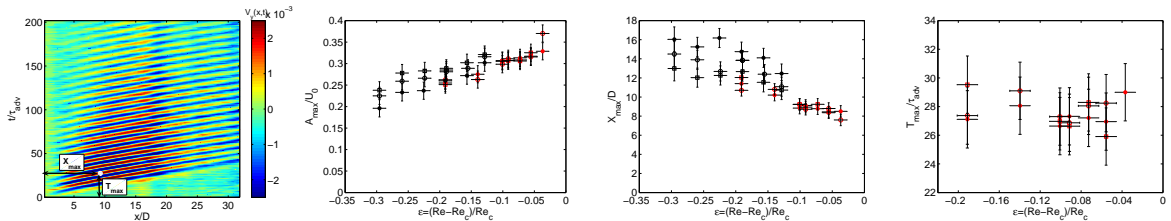
<sup>2</sup> Pour chaque temps, nous appliquons un fit sur chaque partie (croissante et décroissante) du profil de l'enveloppe avec une fonction en tangente hyperbolique. Les points d'inflexion de cette enveloppe nous donnent alors la position des fronts.

D'après la figure 4 (bas gauche) la vitesse de phase, normalisée par la vitesse dans le tunnel, semble légèrement décroître quand le nombre de Reynolds réduit  $\epsilon$  approche la valeur zéro. La valeur de  $V_p/U_0$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$  se compare bien avec la valeur de  $\approx 0.88$  reportée dans la littérature [5] pour le régime supercritique ( $\epsilon > 0$ ). Il est donc raisonnable de supposer que la vitesse de phase tend vers cette valeur constante quand nous approchons le seuil. D'après la figure 4 (bas milieu), nous observons une décroissance de la vitesse de groupe qui tend vers zéro quand  $\epsilon$  approche le seuil. De même sur la figure 4 (bas droite), la vitesse du front arrière décroît vers la valeur zéro. Ce comportement des deux vitesses confirme donc la transition vers une instabilité absolue.



**Fig. 4.** (haut) Diagrammes spatiotemporels avec les différentes vitesses étudiées (droite et milieu) puis Détermination de la position des fronts à un temps fixé (gauche). L'échelle de couleur représente (gauche) l'amplitude  $V_y(x, t)$ , (milieu) l'amplitude de l'enveloppe de  $V_y(x, t)$ . (bas) Evolution des vitesses de phase (gauche), de groupe (milieu), et de front arrière (droite), en fonction du nombre de Reynolds réduit  $\epsilon$ . La ligne en pointillée correspond à la valeur de  $V_p/U_0$  pour le sillage de Bénard-von Kàrmàn ( $Re > Re_c$ ). Les points expérimentaux sont représentés comme suit :  $\bullet$  : petite perturbation,  $\circ$  : moyenne perturbation,  $\square$  : forte perturbation.

De plus, nous avons repéré sur chaque diagramme spatio-temporel le maximum de l'amplitude  $V_y$  de l'instabilité que l'on note  $A_{max}$ , avec sa position en temps  $T_{max}$  et sa position dans l'espace  $X_{max}$  correspondantes comme illustré sur la figure 5 (haut gauche)). Toutes les quantités sont adimensionnées. Nous pouvons observer que plus l'on se rapproche du seuil d'instabilité globale ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), plus  $A_{max}$  croît, tandis que  $X_{max}$  diminue (le maximum de l'instabilité se rapproche donc du cylindre) et  $T_{max}$  reste constant. De plus, pour une valeur donnée de  $\epsilon$ , plus la force de perturbation est importante, plus la réponse  $A_{max}$  augmente, et sa position  $X_{max}$  décroît. Le temps  $T_{max}$  reste indépendant de la force de perturbation (Fig. 5).



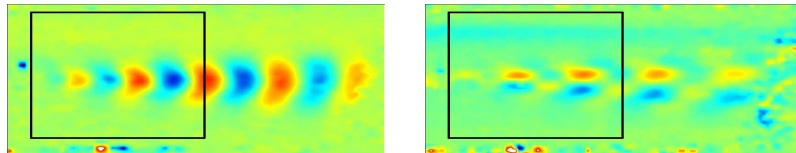
**Fig. 5.** (Respectivement de gauche à droite : Définition du maximum de l'instabilité sur le diagramme spatio-temporel puis evolution du maximum de la perturbation, de sa position dans l'espace et de sa position dans le temps, en fonction du nombre de Reynolds réduit  $\epsilon$ .

## 4 Croissance transitoire

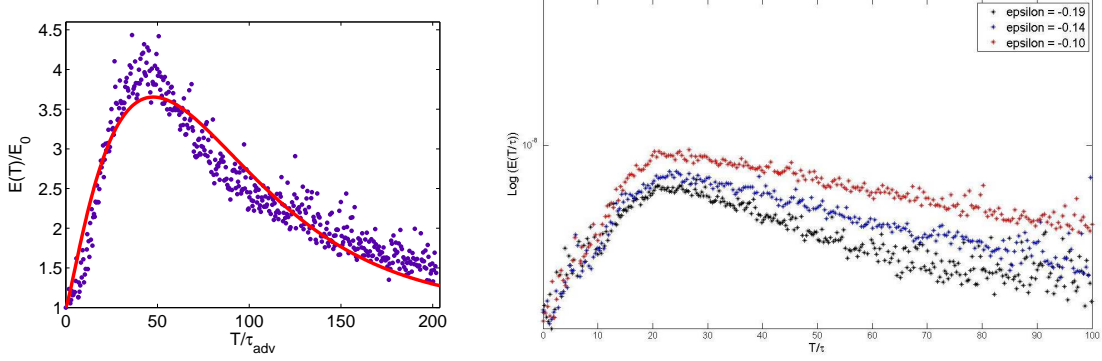
Dans chaque type de diagramme spatiotemporel, en plus du caractère convectif de l'instabilité clairement mis en évidence, nous pouvons remarquer la décroissance de l'instabilité aux temps longs. Cette propriété est due à l'inhomogénéité de la géométrie de l'écoulement : la région localisée derrière le cylindre dans laquelle l'instabilité est convective est entourée en amont et en aval par des régions de stabilité. Ainsi, la perturbation localisée croît initialement, dû aux caractéristiques locales de l'écoulement près du cylindre, et est simultanément advectée en aval dans une région de stabilité dans laquelle la perturbation décroît [1]. Nous observons une réponse transitoire due à cette instabilité convective locale : la croissance transitoire. Pour approfondir notre approche du phénomène de croissance transitoire, nous avons réalisé une étude de l'énergie qui nous permet de la mettre en évidence. Nous définissons l'énergie à partir de nos mesures comme suit :

$$E(t) = \int \int_{\Delta} [v_y^2 + v_x^2] dx dy = \int \int_{\Delta} [(V_y - V_{ybase})^2 + (V_x - V_{xbase})^2] dx dy \quad (1)$$

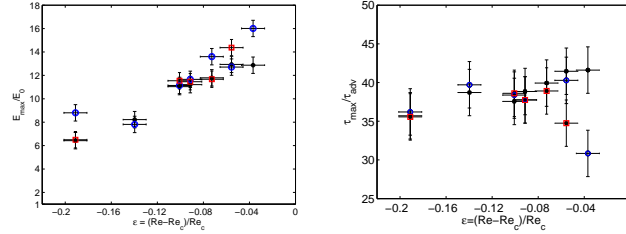
Nous ne pouvons pas accéder à l'énergie réelle de la perturbation à cause de notre fenêtre d'observation fixe, qui ne nous permet pas de calculer la contribution à l'énergie des vortex situés en dehors. Une façon de comparer tout de même l'énergie associée aux différentes expériences, avec des valeurs différentes de  $\epsilon$  est de limiter l'aire d'intégration en aval à la position à laquelle le maximum de l'instabilité est atteint. Ainsi, l'aire d'intégration  $\Delta$  choisie est un rectangle contenu dans notre plan de mesure, qui évite les couches limites des bords du tunnel, et limité en amont par le cylindre et en aval par la position  $X_{max}$  (Fig. 6). Nous adimensionnons l'énergie par sa valeur  $E_0$  avant l'impulsion. Nous avons déterminé cette valeur en extrapolant à zéro les courbes de l'évolution temporelle de l'énergie. La valeur obtenue est la même quelque soit l'expérience. Elle est donc indépendante de  $\epsilon$  et vaut  $0.76 \times 10^{-9} m^4/s^2$ . L'évolution temporelle de l'énergie montre deux comportements différents en fonction du temps : aux temps courts, nous observons une croissance transitoire algébrique, tandis qu'aux temps longs l'énergie décroît vers sa valeur non perturbée initiale (Fig. 7 gauche). Le comportement aux temps longs correspond à la décroissance exponentielle d'un mode normal dans une région stable, ce qui est un problème bien connu. Il est intéressant de représenter sur un même graphe les courbes du logarithme de l'énergie en fonction du temps pour chaque expérience, afin de visualiser l'évolution du taux de décroissance avec  $\epsilon$ . En effet, aux temps longs, le taux de décroissance est donné par la pente de ces courbes. Ainsi nous pouvons clairement observer que lorsque nous approchons le seuil de l'instabilité globale  $\epsilon = 0$ , le taux de décroissance diminue en tendant vers la valeur zéro (Fig. 7 droite). En effet, c'est la définition même du seuil de l'instabilité globale, qui impose un taux de décroissance nul quand le seuil est atteint. Maintenant nous nous concentrons sur le comportement de l'énergie aux temps courts, qui lui n'est pas trivial. Dans notre expérience, c'est l'inhomogénéité du milieu qui entraîne la non-normalité de l'opérateur de stabilité associé, et donc aussi la non-orthogonalité des modes globaux correspondants. Or la superposition de ces modes globaux décroissants peut entraîner une amplification transitoire de l'énergie de perturbation aux temps courts. C'est donc ce que nous observons. Pour essayer de caractériser cette croissance, nous avons repéré sur chaque courbe d'énergie le maximum de l'énergie  $E_{max}$  et le temps pour lequel ce maximum est atteint  $\tau_{max}$ . Nous obtenons pour ces quantités, en fonction de  $\epsilon$  les graphes suivants (Fig. 8) : le maximum  $E_{max}$  croît avec  $\epsilon$  tandis que le temps  $\tau_{max}$  reste constant.



**Fig. 6.** Illustration de l'aire d'intégration utilisée pour le calcul de l'énergie, sur les champs de vitesses instantanés  $V_y$  (gauche) et  $V_x$  (droite) à un temps donné après l'impulsion.



**Fig. 7.** (gauche) Evolution de l'énergie en fonction du temps. La courbe rouge représente le fit :  $a * t * \exp(-bt)$ , qui rend bien compte de la croissance transitoire aux temps courts et de la décroissance exponentielle aux temps longs. (droite) Evolution du logarithme de l'énergie en fonction du temps, pour trois valeurs différentes du nombre de Reynolds réduit  $\epsilon$ . Au fur et à mesure que nous approchons le seuil d'instabilité globale ( $\epsilon = 0$ ), la pente aux temps longs (ie le taux de décroissance de l'instabilité) diminue vers la valeur zéro.



**Fig. 8.** (gauche) Evolution du maximum de l'énergie et (droite) évolution du temps correspondant, en fonction du nombre de Reynolds réduit  $\epsilon$ . Les points expérimentaux sont représentés comme suit :  $\bullet$  : petite perturbation,  $\circ$  : moyenne perturbation,  $\square$  : forte perturbation.

## 5 Conclusions

Cette étude expérimentale nous a permis de caractériser quantitativement la croissance transitoire des paquets d'ondes convectivement instable dans le sillage d'un cylindre en régime sous-critique. L'évolution temporelle de l'énergie montre clairement une croissance transitoire algébrique aux temps courts, suivie d'une décroissance exponentielle aux temps longs. Bien que la croissance transitoire soit souvent associée à une transition vers la turbulence, ce n'est pas le cas ici. Le comportement des vitesses de fronts et de groupe est cohérent avec une transition d'une instabilité convective à absolue au seuil d'instabilité globale, car elles diminuent et tendent vers zéro au seuil. Enfin, il existe dans le sillage un maximum d'instabilité bien défini. La valeur de ce maximum ainsi que sa position en aval du cylindre dépendent du nombre de Reynolds et de la force de perturbation, tandis que sa position en temps reste constante.

## Références

1. H. M. BLACKBURN, D. BARKLEY & S. J. SHERWIN, Convective instability and transient growth in flow over a backward-facing step, *Journal of Fluid Mechanics*, **603** (2008).
2. P. LE GAL & V. CROQUETTE, Visualization of the space-time impulse response of the subcritical wake of a cylinder, *Physical Review E*, **62**, (2000).
3. M. PROVANSAL *et al.*, Benard-von kármán instability : transient and forced regimes, *J. Phys. Lett.*, **45**, (1987).
4. W. VAN SAARLOOS, Front propagation into unstable states, *Physical Reports*, **29**, (2003).
5. C. H. K. WILLIAMSON, Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, **206**, (1989).

# Mesure, sans contact, des forces agissant sur les protéines dans les microdomaines membranaires

J.-B. Masson<sup>1</sup>, D. Casanova<sup>2</sup>, S. Turkcan<sup>2</sup>, G. Voisinne<sup>1</sup>, M.R. Popoff<sup>1</sup>, M. Vergassola<sup>1</sup>, & A. Alexandrou<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Pasteur, 25/28 rue du Docteur Roux, 75116, Paris France

<sup>2</sup> Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

[jbmasson@pasteur.fr](mailto:jbmasson@pasteur.fr)

**Résumé.** Le développement de marqueurs efficaces tel les fluorophores organiques et les nanoparticules, afin de pouvoir suivre leurs trajectoires, a été motivé, entre autres, par la volonté de dresser des cartes de forces agissant sur les biomolécules. Les méthodes usuelles utilisent des observables statistiques, principalement l'écart quadratique moyen, afin d'accéder à certains éléments de la dynamique de ces marqueurs. Dans ce papier, nous introduisons une méthode générale d'inférence [1] pour exploiter complètement toute l'information stockée dans les trajectoires expérimentales. Cette méthode donne accès à des estimations précises des forces ainsi qu'à la diffusivité dans ces microdomaines. Nous avons démontré l'efficacité de ces inférences, à savoir des convergences rapides et très reproductibles, par des simulations reproduisant les conditions expérimentales. La méthode fut ensuite appliquée afin d'extraire les forces et les potentiels agissant sur le récepteur de la toxine  $\epsilon$ , qui fut préalablement marquée par des nanoparticules basées sur des ions lanthanides. La méthode que nous présentons est applicable à n'importe quel biomolécule marquée, de même qu'à n'importe quel système dont on peut suivre la trajectoire confinée, et montre tout son intérêt dans l'analyse des dynamiques prenant place dans les microdomaines membranaires.

**Abstract.** Mapping of the forces acting on biomolecules in cell membranes has spurred the development of effective labels, e.g. organic fluorophores and nanoparticles, to track trajectories of single biomolecules. Standard methods use particular statistical observables, namely the mean square displacement, to extract cues on the underlying dynamics. Here, we introduce general inference methods to fully exploit information hidden in the experimental trajectories, providing sharp estimates of the forces and the diffusion coefficients within membrane microdomains. Rapid and reliable convergence of the inference scheme is demonstrated on trajectories generated numerically with realistic parameters. The inference method is then applied to infer forces and potentials acting on the receptor of the  $\epsilon$ -toxin labeled by lanthanide-ion nanoparticles. Our scheme is applicable to any labeled biomolecule and results presented here show its general relevance to the issue of membrane compartmentation.

## 1 Introduction

L'intérêt pour les relations entre mouvements des protéines et des lipides et les différentes fonctions biologiques associées n'a cessé de grandir ces dernières années [2]. Les différents mouvements sont généralement enregistrés en suivant des biomolécules uniques marquées par des fluorophores organiques ou des nanoparticules qui permettent la détection par fluorescence, diffusion de la lumière etc. [3]. L'analyse des trajectoires est généralement faite en traçant l'écart quadratique moyen (MSD) en fonction du temps. Des paramètres tels les coefficients de diffusion et les tailles de domaines sont mesurés par les modélisations des courbes de MSD suivant différents groupes de modèles, tel la diffusion Brownienne libre, la diffusion dirigée, confinée anormale etc. [3].

Le débat sur la nature du confinement membranaire nourrit l'intérêt pour le suivi des biomolécules. La diffusion libre des protéines dans une mer de lipide fut postulée en premier dans un modèle nommé "fluid mosaic model" [4]. Cependant, suite à diverses observations expérimentales deux nouveaux modèles sont apparus, le modèle "picket and fence" [6] et le modèle "lipid raft" [5]. Ce dernier modèle voit les protéines se placer préférentiellement dans des domaines de composition lipidiques différentes de la plupart des lipides de la membrane. Le premier (nouveau) modèle voit plutôt la compartementalisation naître de l'action combinée du cytosquelette et de protéines transmembranaires figées dans la membrane. D'autres

modèles sont basés sur des interactions plus spécifiques entre protéines [7,8]. La complexité vient aussi du fait que ces modèles ne sont pas mutuellement exclusifs [9].

Les différentes approches basées sur l'analyse du MSD ont été abondamment utilisées. Des approches alternatives telles celles liées au temps de premier passage [10], qui ne sont pas sans rappeler le sempiternel débat de la diffusion des bouées de mer [11,12], et celles basées sur les densités radiales d'occupation [13] se sont avérées donner des résultats intéressants. Cependant, de nombreuses informations supplémentaires sont cachées dans la trajectoire complète. Réduire l'analyse à un moment unique d'une distribution a pour avantage de simplifier l'analyse, mais a pour prix à payer une perte d'information conséquente sur la dynamique de la trajectoire. Tout particulièrement, cela rend la possible analyse de la validité des modèles extrêmement difficile, et la différenciation parmi ceux-ci assez compliquée. Nous avons choisi une approche générale basée sur les inférences bayésiennes [14] dans lequel l'analyse se fera sur les probabilités propres (likelihoods) de ces modèles. Un sens quantitatif de la validité de ces modèles est ainsi obtenu, avec une estimation systématique des paramètres ainsi que de leurs incertitudes.

Notre but est de présenter une approche générale basée sur des inférences bayésiennes donnant accès à des cartes de forces ainsi qu'à des cartes de potentiel impliquées dans le confinement des biomolécules dans la membrane cellulaire. Nous montrerons que ces inférences donnent accès à des estimations très précises des forces agissant dans ces domaines. Nous appliquerons principalement cette méthode aux mouvements de la toxine  $\epsilon$  dans la membrane des cellules "Madin-Darby canine kidney (MDCK)".

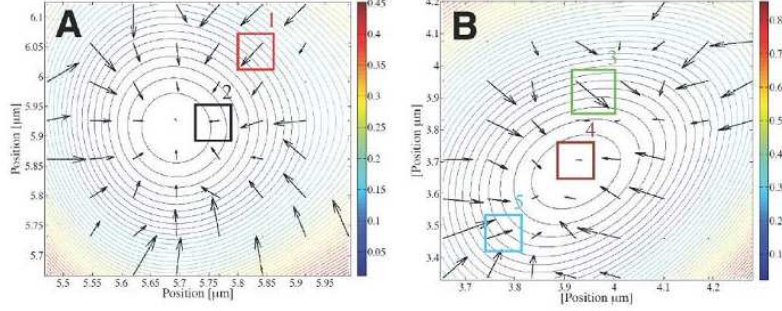
## 2 Expériences

La toxine  $\epsilon$ , sécrétée par *Clostridium perfringens* (type B et D) une bactérie Gram-positive, est responsable de l'enterotoxémie létale. Une prototoxine relativement inactive est synthétisée dans un premier temps, et est convertie ensuite en une protéine dangereuse par clivage et retrait de l'acide aminé terminal. La protéine mature prend pour cible un récepteur spécifique localisé dans des domaines, résistants aux détergents, des cellules MDCK [15]. Cette protéine agit par heptamérisation ; elle forme ainsi des pores dans la membrane provoquant une modification rapide de la perméabilité aux ions, et tue la cellule sans que la protéine ne soit jamais entrée dans le cytosol [16,17].

Des nanoparticules d'oxydes de lanthanides recouvertes de fonctions amines (NPs)  $Y_{0.6}Eu_{0.4}VO_4$  de tailles comprises entre 30 et 50 nm furent utilisées pour marquer la toxine  $\epsilon$ . Une description de la méthode aboutissant à un ratio moyen de 1 :1 de toxine/nanoparticule est exposé dans la référence [18]. Ces nanoparticules ont de nombreux avantages : elles sont très grandement photostables, ne présentent pas d'intermittences d'émissions de lumière, sont synthétisées directement dans l'eau et ont une émission fréquentielle très étroite. Ceci permet un rejet simple de la fluorescence venant de la cellule [20]. Une relation directe permet de lier leurs tailles à la luminosité mesurée [21]. Enfin, différentes couleurs d'émissions sont obtenues en utilisant différents ions lanthanides [19].

Nous utilisâmes un microscope grand champ inversé (Zeiss Axiovert 100) équipé d'un objectif 63x, NA=1.4 "oil-immersion" et l'acquisition des images fut fait par une camera EM-CCD (Roper Scientific QuantEM :512SC). Les ions  $Eu^{3+}$  des nanoparticules furent excités avec la ligne 465.8-nm d'un laser  $Ar^{+}$ -ion et leurs émissions furent détectées en utilisant un filtre 617/8M (Chroma). Les cellules MDCK furent cultivées jusqu'à confluence sur des lamelles en verre. Elles furent rincées, incubées avec 0.04 nM de toxines  $\epsilon$  marquées (ou prototoxins) pendant 20 minutes, rincées trois fois et observées dans un tampon de Hank contenant 1% de sérum de veau fœtal et 1% de pénicillin-streptomycin soit à 20°C soit à 30°C.

Durant toutes les expériences ( $\sim 400$  cellules), nous observâmes les liens entre de nombreuses nanoparticules et un récepteur spécifique sur la surface cellulaire. Nous vérifiâmes la spécificité de ces liens en préincubant la toxine pendant une heure avec un anticorps de la toxine  $\epsilon$  qui empêche la fixation à la membrane (en suivant la même procédure que celle décrite dans la référence [16]) et en constatant l'absence de fixation des nanoparticules à la membrane cellulaire. Les toxines furent gardées à des concentrations suffisamment basses pour être sûre que seule la trajectoire d'une toxine (et pas des oligomères) était suivie. Le ratio moyen de toxine nanoparticule de 1 :1 implique, si l'on suppose une statistique de Poisson, que la fraction de nanoparticules fixée à 0, 1 et 2 ou plus de toxines est respectivement de 37%, 37% et 26%. Les nanoparticules non liées à une toxine ne se fixent pas aux cellules, et sont évacuées par



**Fig. 1.** Champ de forces et potentiels inférés dans deux domaines membranaires. La longueur des flèches est proportionnel à l'amplitude de la force. Le potentiel est tracé par des courbes de niveaux dont la barre d'amplitude est placée à côté. Le schéma d'interpolation décrit dans le texte fut utilisé, aboutissant à un temps effectif entre 2 images de 5 ms. Le coefficient de diffusion pour **A** est  $4.75 \times 10^{-2} \mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}$  et pour **B** est  $8.15 \times 10^{-2} \mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . Les distributions *a posteriori* des 5 zones encadrées sont données dans la figure 4.

un simple rinçage. Etant donné la taille des nanoparticules, il est peu probable que plus d'une toxine soit présente dans la même zone de la surface de la nanoparticule permettant une liaison simultanée à plus d'un récepteur. De plus, la possibilité de lien d'une fraction des toxines peut être réduite par le couplage aux nanoparticules. Nous estimons que la fraction des nanoparticules liées à plus d'un récepteur est moins de 10%. De plus, nous marquâmes des toxines  $\epsilon$  avec un fluorophore organique, le Cy3, et observâmes le même type de trajectoires. Ceci a pour conséquence que le marquage par nanoparticule ne modifie pas le mouvement du récepteur, qui est ainsi déterminé par la masse du récepteur, et par les caractéristiques de la membrane. Le mouvement des récepteurs fut étudié pendant des périodes allant de 150 à 300 secondes. Nous vérifiâmes qu'étant donné le coefficient de diffusion et la taille des domaines, nous ne fûmes pas limités par le temps d'acquisition des images (21.4 à 51.4 ms) [22,23]. Des portions relativement courtes des trajectoires furent utilisées afin d'exclure tout déplacement des domaines membranaires, de la cellule ou du microscope.

### 3 Inférences des forces et du potentiel

L'équation de Langevin pour la position  $\mathbf{r}(t)$  et pour la vitesse  $\mathbf{v}(t)$  d'une biomolécule sujette à la diffusion moléculaire et aux forces engendrées par un potentiel  $V$  sont :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma \mathbf{v} - \nabla V(\mathbf{r}) + \sqrt{2D\gamma^2} \xi. \quad (1)$$

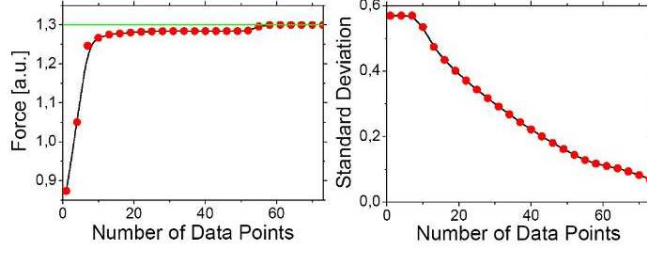
Ici,  $m$  est la masse de la biomolécule,  $\gamma$  et  $D = kT/\gamma$  sont la friction et le coefficient de diffusion dans le microdomaine membranaire. Le bruit gaussien de moyenne nulle  $\xi(t)$  fluctue rapidement avec le temps, à cause du bruit thermique. Le mouvement de la biomolécule permet d'appliquer l'approximation de Smoluchowski [24] à l'équation (1). En effet le temps caractéristique de relaxation de la vitesse vers un équilibre local est  $\tau = \frac{m}{\gamma} \simeq 10^{-16} \text{s}$  (puisque  $m \simeq 10^{-22} \text{kg}$  et  $\gamma \simeq 10^{-6} \text{kg/s}$  [25]). Ainsi la vitesse est mue par le forçage local et l'équation (1) se réduit à :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\nabla V(\mathbf{r})}{\gamma} + \sqrt{2D} \xi. \quad (2)$$

L'équation de Fokker-Planck [26] associée à l'équation (2) est :

$$\partial_t P = -\frac{1}{\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{F} P) + D \Delta P, \quad (3)$$

ou la force satisfait  $\mathbf{F} \equiv -\nabla V$ . L'équation de Kolmogorov (3) décrit la dynamique de la transition de probabilité  $P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$  d'aller au point  $(\mathbf{r}, t)$  sachant que la biomolécule était originellement  $(\mathbf{r}_0, t_0)$ . La



**Fig. 2.** Evolution typique de la valeur d'une force locale inférée (à gauche) et de sa déviation standard (à droite) avec le nombre de points utilisé pour les inférer. Il faut remarquer la convergence rapide vers la vraie valeur de la force (indiquée par la ligne horizontale).

solution de l'équation (3) peut être écrite sous forme d'une intégrale de chemin [27] :

$$P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \propto \int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\int ds Q(\mathbf{r}(s))}. \quad (4)$$

le terme  $Q(\mathbf{r}(s)) \equiv (d\mathbf{r}(s)/ds - \mathbf{F}(\mathbf{r}(s))/\gamma)^2 / 4D$  est le poids quadratique gaussien gouvernant la probabilité des déplacements pour un interval infinitésimal de temps.

En pratique, l'espace est discrétisé en une fine grille régulière de  $n^2$  carrés. La taille caractéristique du grillage est choisie de sorte à ce qu'elle soit suffisamment fine pour que le champ de force soit lisse à cette échelle. À l'ordre le plus bas, les forces sont approximées par des valeurs constantes dans chaque zone carrée, nous montrerons par la suite que les variations d'ordre élevées sont en effet négligeables. L'intégrale apparaissant dans l'exponentielle de l'équation (4) est approximée par la somme discrète de Riemann. Les carrés du grillage  $\mathcal{S}_{i,j}$  sont indexés par la paire  $(i, j)$  (avec  $i, j = 1, \dots, n$ ) et la force agissant dans  $\mathcal{S}_{i,j}$  est notée  $\mathbf{F}_{i,j}$ . Le but est de trouver les  $2n^2 + 1$  inconnues  $U = \{D, \{\mathbf{F}_{i,j}\}\}$ , c'est à dire la diffusivité et les forces agissant dans le domaine membranaire. Les variations de  $D$  peuvent être traitées de la même manière (voir plus bas).

Les méthodes d'inférences [14] font en général appel à deux étapes : a) la dérivation de la probabilité à *posteriori* des paramètres recherchés étant donné une observation expérimentale ; b) l'analyse de la distribution à *posteriori* afin de d'estimer les paramètres. De manière plus spécifique, la formule de Bayes montre que la distribution à *posteriori*  $P(U|T)$  d'un ensemble de paramètres  $U$  suite à une trajectoire  $T$  est  $P(U|T) = P(T|U) \times P_0(U) / P(T)$  ou  $P(T|U)$  est la probabilité (likelihood) d'une trajectoire sachant que les paramètres  $U$  sont connus et  $P(T)$  est une constante de normalisation.  $P_0(U)$  est la probabilité à *priori*, que nous prenons constant. La partie b) fut traitée par la méthode de Monte Carlo afin d'extraire les valeurs moyennes des distributions à *posteriori*. Ces distributions sont généralement bien "piquées" et les valeurs maximales donnent de bonnes estimations des valeurs moyennes.

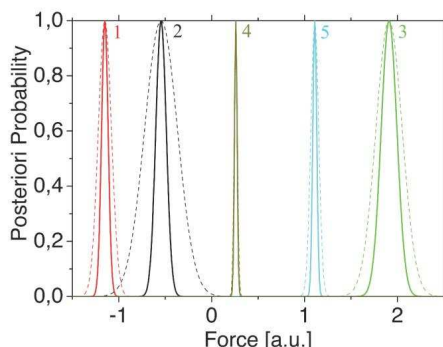
Un des atouts majeurs de ce problème est que seul la diffusivité  $D$  est un paramètre global alors que les  $n^2$  forces  $\mathbf{F}_{i,j}$  apparaissent sous forme additive dans les exponentielles des probabilités à *posteriori*. Ceci a pour effet que les contributions des différents carrés de la grille se factorisent en  $P(U|T) = \prod_{i,j=1}^n P(\mathbf{F}_{i,j}, D|T)$ . La contribution dans chaque carré de la grille :

$$P(\mathbf{F}_{i,j}, D|T) \propto \prod_{\mu: \mathbf{r}_\mu \in \mathcal{S}_{i,j}} \frac{\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}_{\mu+1} - \mathbf{r}_\mu - \mathbf{F}_{i,j} \Delta t / \gamma)^2}{4D \Delta t}\right]}{4\pi D \Delta t}. \quad (5)$$

Ici  $\mu$  indexe les différentes étapes de temps (discrétisé par  $\Delta t$ ), et le produit se réduit aux temps où la biomolécule est présente dans le carré de la grille  $\mathcal{S}_{i,j}$ . Il faut remarquer que la discrétisation introduit une ambiguïté lorsque la biomolécule traverse un carré pour passer dans un autre. Le choix fait dans l'équation (5) est d'utiliser les indices du carré de départ. Les corrections s'avéreront négligeables.

L'élément crucial qui permet ces distributions bien piquées est le confinement des trajectoires. Ainsi chaque carré de la grille est visité de nombreuses fois, ce qui permet une acquisition conséquente d'information. Même les carrés où les forces sont importantes, et donc le temps de résidences court, la quantité





**Fig. 3.** Distribution à *posteriori* des forces aux localisations données par les carrés sur la figure 1. Les courbes pour les composantes horizontales (verticales) des forces sont 2,4,5 (1,3). Les courbes pleines sont obtenues par le schéma d'interpolation décrit dans le texte. Il est bon de noter que les valeurs moyennes sont extrêmement proches de celles obtenues sans cette interpolation (courbes en pointillées) mais la variance est grandement réduite.

d'information acquise est suffisante, pour permettre de bonnes inférences. Il est bon de noter que les distributions à *posteriori* sont gaussiennes, ce qui apparaît directement dans la formule 5.

Afin d'accéder de manière quantitative à la qualité de l'inférence, nous générâmes de manière numérique des ensembles de trajectoires avec les mêmes champs de forces et diffusivités que ceux qui sont rencontrés expérimentalement. Les distributions à *posteriori* furent bien piquées sur les valeurs utilisées pour les générer. Les évolutions typiques des valeurs inférées avec le nombre de points utilisés pour l'inférence sont montrées sur la figure 2. La convergence est rapide et la déviation standard entoure la vraie valeur même pour des nombres réduits de points. Les prédictions issues de la méthode exposée sont plus précises et nécessitent moins de points que celles basées sur des statistiques uniques comme celles issues du MSD ou de la densité radiale d'occupation. Afin de résumer, les simulations confirment la validité de la méthode d'inférence.

Afin de visualiser les résultats il est utile de tracer le potentiel  $V$  comme sur la figure 1. Le potentiel fut interpolé par un polynôme d'ordre  $C$  ( $C = 4$  dans la Figure 1) :  $V(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^C \sum_{i=0}^j \alpha_{ij} x^i y^{j-i}$ . Les constantes  $\alpha_{ij}$  sont déterminées par les champs de forces expérimentaux, en minimisant l'erreur au carré par la méthode des simplex. Les potentiels trouvés sont compatibles avec un modèle de type "fence", mais ce modèle doit être complété afin de comporter des parties non locales. De même un modèle de changement de nature de lipides ne comporterait que des forces extrêmement localisées. Les potentiels trouvés indiquent clairement la présence de forces non locales. Les variations dans chaque microdomaine de la diffusivité furent faibles, de l'ordre de 4% (à comparer au 65% pour les forces), il est donc raisonnable de considérer que les constantes de diffusion sont constantes dans les microdomaines.

Les erreurs de discrétisations furent contrôlées de la manière suivante. étant donné deux acquisitions  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  et  $(\mathbf{x}_2, t_2 = t_1 + \Delta t)$ , nous interpolâmes leur probabilité de transition en sommant sur toutes les positions possibles  $\mathbf{x}'$  aux temps intermédiaires  $t' = t_1 + \Delta t/2$ , c'est à dire  $P(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \int dx' P(x_2, t_2 | x', t') P(x', t' | x_1, t_1)$ . Ce processus peut raffiner en sommant sur de plus nombreux points intermédiaires. L'effet principal de cette interpolation est de réduire les barres d'erreurs, les valeurs restant quasiment constantes (Figure 3).

## 4 Conclusion

Nous développâmes une méthode d'inférence qui permet d'exploiter les informations stockées dans les trajectoires de biomolécules marquées. Cette méthode est applicable à n'importe quelle trajectoire de biomolécule, même celles présentant des intermittences comme celles issues de quantum dots. Nous démontrâmes les avantages de cette méthode en traçant des cartes de forces et de potentiels impliqués dans le mouvement confiné du récepteur de la toxine  $\epsilon$  dans la membrane des cellules MDCK.

## Références

1. J.-B MASSON *et al*, Inferring maps of forces inside cell membrane microdomains, *Phys. Rev. Lett.*, 2009 In Press .
2. M.J. SAXTON, Single-particle tracking : connecting the dots, *Nature Methods.*, **5** 671, 2008.
3. M. J. SAXTON, K. JACOBSON, Single-particle tracking : applications to membrane dynamics, *Annu. Rev. Biophys. Biomol. Struct.*, **26**, 373, 1997.
4. S. J. SINGER, G. L. NICOLSON, The Fluid Mosaic Model of the Structure of Cell Membranes, *Science*, **175**, 720, 1972.
5. K. SIMONS, E. IKONEN, Functional rafts in cell membranes, *Nature*, **387**, 569, 1997.
6. A. KUSUMI *et al.*, Paradigm shift of the plasma membrane concept from the two-dimensional continuum fluid to the partitioned fluid : High-speed single-molecule tracking of membrane molecules, *Annu. Rev. Biophys. Biomol. Struct.*, **34**, 351, 2005.
7. F. DAUMAS *et al.*, Confined diffusion without fences of a G protein coupled receptor as revealed by single particle tracking *Biophys. J.* **84**, 356, 2003.
8. J. J. SIEBER *et al.*, Anatomy and dynamics of a supramolecular membrane protein cluster, *Science*, **317**, 1072, 2007.
9. P.-F. LENNE *et al.*, Dynamic molecular confinement in the plasma membrane by microdomains and the cytoskeleton meshwork, *EMBO J*, **25**, 3245, 2006.
10. S. CONDAMIN *et al.*, First passage times in complex scale invariant media, *Proceedings of the National Academy of Science*, **105**, 5675, 2008.
11. J.H. LACASCE, Statistics from Lagrangian observations, *Progress In Oceanography*, **77**, 1, 1-29, 2008.
12. G. LACORATA, Statistics from Lagrangian observations, *Annales Geophysicae*, **19**, 1, 121-129, 2001.
13. S. JIN *et al.*, Single-Particle Tracking of Membrane Protein Diffusion in a Potential : Simulation, Detection, and Application to Confined Diffusion of CFTR Cl Channels, *Biophys. J.*, **93**, 1079, 2007.
14. D.J.C. MACKAY, *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, Cambridge University Press, 2003.
15. C. CHASSIN *et al.*, Purification and characterization of Clostridium sordellii lethal toxin and cross-reactivity with Clostridium difficile cytotoxin, *Am. J. Pathol. Renal Physiol.*, **293**, F927-F937, 2007.
16. L. PETIT *et al.*, R. Clostridium perfringens epsilon toxin induces a rapid change of cell membrane permeability to ions and forms channels in artificial lipid bilayers, *J. Biol. Chem.*, **276**, 15736, 2001.
17. S. MIYATA *et al.*, Clostridium perfringens epsilon -Toxin Forms a Heptameric Pore within the Detergent-insoluble Microdomains of Madin-Darby Canine Kidney Cells and Rat Synaptosomes, *J. Biol. Chem.* **277**, 39463, 2002.
18. D. CASANOVA *et al.*, Counting the Number of Proteins Coupled to Single Nanoparticles, *J. Am. Chem. Soc.*, **129**, 12592, 2007.
19. V. BUISSETTE *et al.*, Aqueous routes to lanthanide- ; doped oxide nanophosphors, *J. Mat. Chem.*, **16**, 529, 2006.
20. E. BEAUREPAIRE *et al.*, Functionalized Fluorescent Oxide Nanoparticles : Artificial Toxins for Sodium Channel Targeting and Imaging at the Single-Molecule Level, *Nano Lett.*, **4**, 2079, 2004.
21. D. CASANOVA *et al.*, Optical in situ size determination of single lanthanide-ion doped oxide nanoparticles, *Appl. Phys. Lett.*, **89**, 253103, 2006.
22. K. RITCHIE *et al.*, Detection of Non-Brownian Diffusion in the Cell Membrane in Single Molecule Tracking, *Biophys. J.* **88**, 2266, 2005.
23. N. DESTAINVILLE & L. SALOMÉ, Detection of confinement and jumps in single protein membrane trajectories, *Biophys. J.* **90**, L17, 2006.
24. M. SMOLUCHOWSKI, Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen, *Ann. der Physik*, **21**, 756-780, 1906.
25. K. SUZUKI *et al.*, Outer Membrane Monolayer Domains from Two-Dimensional Surface Scanning Resistance Measurements, *Biophys. J.*, **79**, 448, 2000.
26. H. RISKEN, *The Fokker-Planck Equation : Methods of Solutions and Applications*, Springer, 1989.
27. H. KLEINERT, *Path integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*, World Scientific, 2006.

# Une horloge circadienne minimale chez l'algue unicellulaire *Ostreococcus tauri*

P.-E. Morant<sup>1,2</sup>, Q. Thommen<sup>1,2</sup>, F. Corellou<sup>3</sup>, C. Vandermoère<sup>1,2</sup>, F.-Y. Bouget<sup>3</sup>, & M. Lefranc<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules, UMR CNRS 8523, Université Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

<sup>2</sup> Institut de Recherche Interdisciplinaire sur les Réseaux de Régulation Cellulaires, USR CNRS 3078, Université Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

<sup>3</sup> Laboratoire Modèles en Biologie Cellulaire et Evolutive, UMR CNRS-Paris 6 7628, Observatoire Océanologique de Banyuls sur mer, BP44, 66651 Banyuls sur Mer Cedex, France.

marc.lefranc@univ-lille1.fr

**Résumé.** Les horloges circadiennes sont des oscillateurs biologiques, constitués de réseaux de gènes et protéines se régulant de manière cyclique, qui permettent à de nombreux organismes de se synchroniser au cycle jour/nuit. Nous avons étudié les profils temporels d'activité de deux gènes putatifs de l'horloge de l'algue *Ostreococcus tauri*, reconstruits à partir de données expérimentales. Ces profils sont reproduits avec un accord excellent par le modèle mathématique d'un oscillateur minimal dans lequel ces deux gènes se régulent réciproquement. De manière contre-intuitive, le meilleur accord est obtenu pour un modèle non couplé à la lumière, ce qui ouvre des voies dans la compréhension de la structure de l'horloge.

**Abstract.** Circadian clocks are biological oscillators, made of networks of genes and proteins regulating each other cyclically, that allow many organisms to synchronize to the day/night cycle. We have studied temporal activity profiles of two putative genes of the clock of the *Ostreococcus tauri* alga, reconstructed from experimental data. These profiles are reproduced with excellent agreement by the mathematical model of a minimal oscillator, where these two genes regulate each other. Surprisingly, best agreement is obtained when the model is uncoupled to light, which gives insights into the structure of the clock.

## 1 Introduction

Chez de nombreux organismes, activité, température corporelle, alternance veille/sommeil, photosynthèse, et bien d'autres processus biologiques sont rythmés par l'horloge *circadienne*, un oscillateur biologique dont la période est d'environ 24 heures. En se synchronisant au cycle jour/nuit, cette horloge permet d'anticiper les modifications périodiques de l'environnement et de s'y adapter. C'est sa désynchronisation qui est à l'origine du décalage horaire ressenti à l'arrivée d'un vol long-courrier.

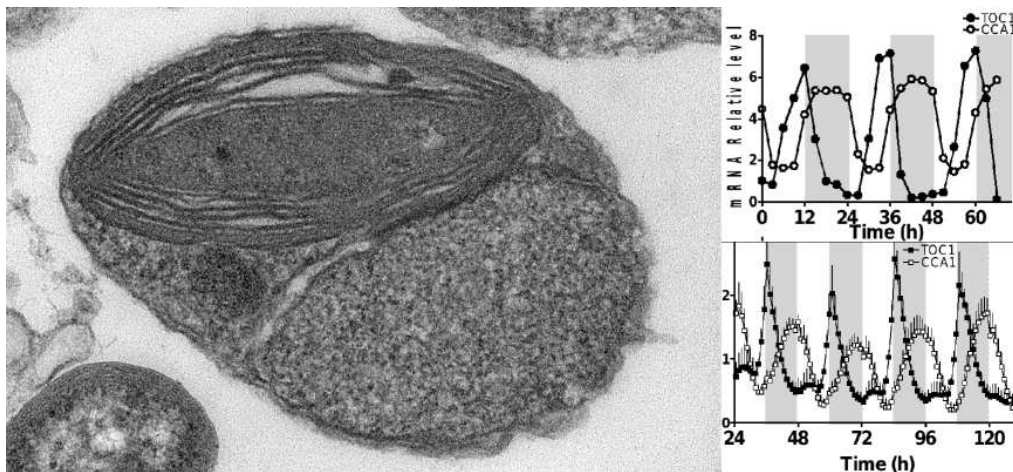
Les rouages de cette horloge sont constitués de réseaux biochimiques où interagissent gènes et protéines. L'activité des gènes, qui gouvernent la synthèse des protéines pour lesquels ils codent, est en effet régulé par d'autres protéines. Les boucles de rétroaction positive et/ou négative ainsi formées sont à l'origine d'oscillations robustes dans ces circuits, de période généralement légèrement différente de 24 heures lorsque l'organisme est placé en conditions constantes. C'est le couplage d'un ou plusieurs acteurs de l'horloge à la lumière du jour (par exemple la dégradation accélérée d'une protéine au jour) qui permet à l'oscillateur de se synchroniser exactement au cycle jour/nuit et de donner en continu une mesure de l'heure qu'il est.

Ces dernières années, les principaux composants des horloges circadiennes de plusieurs organismes modèles (*Arabidopsis*, *Neurospora*, *Drosophila* ...) ont pu être identifiés [1,2]. Cela a permis de constater que si les acteurs moléculaires concernés varient fortement entre deux organismes éloignés sur l'arbre de l'évolution, leurs réseaux d'interaction présentent souvent des structures similaires, probablement parce que fournissant des réponses différentes à un même problème dynamique. Cela a motivé de nombreux travaux de modélisation (par ex. [3,4]), qui ont dans certains cas suggéré des expériences clés menant à l'identification de nouveaux gènes de l'horloge [5]. Les rythmes circadiens constituent donc un champ d'exploration particulièrement prometteur pour la biologie systémique, qui vise non seulement à appréhender

les comportements collectifs résultant de l'interaction des acteurs élémentaires, mais également à favoriser les allers-retours entre expérience et théorie par une modélisation quantitative. Cependant, l'implication de nombreux acteurs moléculaires, l'existence fréquente de redondances entre gènes, ainsi que l'interconnexion des différents modules fonctionnels rend le plus souvent difficile un accord quantitatif. C'est pourquoi il est important d'identifier des organismes où certains circuits génétiques se prêtent particulièrement bien à une modélisation mathématique.

## 2 Les rythmes circadiens d'*Ostreococcus tauri*

Nous nous intéressons ici à la modélisation de l'horloge circadienne d'un nouvel organisme modèle, *Ostreococcus tauri*, découvert en 1994 dans l'étang de Thau, près de Sète (Fig. 1, à gauche). Cette algue verte unicellulaire microscopique est à ce jour le plus petit organisme eukaryote connu. Le séquençage récent de son génome a mis en évidence sa remarquable compaction (environ 11 millions de paires de bases, comparable à celui de la levure) et une très faible redondance génique. Cet organisme présente d'autant plus d'intérêt que l'ancêtre commun d'*O. tauri* et de la plante modèle *Arabidopsis thaliana* se situe vraisemblablement à la base de la lignée verte, d'où sont issus tous les organismes photosynthétiques. Or, de nombreuses études se sont intéressées à l'horloge circadienne d'*A. thaliana*, mettant en évidence plusieurs boucles de rétroaction imbriquées, aux fonctions complémentaires. Il serait donc particulièrement intéressant de comparer deux évolutions d'une même horloge circadienne.



**Fig. 1.** A gauche : photographie au microscope électronique d'*Ostreococcus tauri*. A droite : données expérimentales concernant les gènes *TOC1* et *CCA1* [7] (en haut, données micropuces permettant de remonter aux variations de la quantité d'ARN en fonction du temps, en bas mesures de luminescence émises par des marqueurs bioluminescents permettant de remonter aux variations de la concentration en protéines).

Les rythmes circadiens d'*O. tauri* sont très marqués : les données d'expression de l'immense majorité des 8000 gènes varient de manière cyclique sur 24 heures, et les divisions cellulaires s'opèrent préférentiellement vers la tombée de la nuit, indiquant un contrôle du cycle cellulaire par l'horloge circadienne. Or, si environ 50 % des gènes d'*O. tauri* ont des homologues chez *A. Thaliana*, la recherche bioinformatique d'orthologues de la vingtaine de gènes impliqués dans l'horloge d'*Arabidopsis* n'identifie chez *O. Tauri* que deux gènes, apparentés aux gènes *CCA1* and *TOC1* d'*Arabidopsis* [7]. De plus, ce sont précisément ces deux gènes qui constituent l'ossature du modèle initialement proposé pour l'horloge d'*Arabidopsis* (*CCA1* réprime *TOC1* qui active *CCA1*) [6], jusqu'à ce qu'une analyse quantitative des données expérimentales ne démontre la nécessité de modèles plus complexes [4]. Si les pics d'activité de *TOC1* et *TOC1*-like sont relativement concordants chez les deux organismes, on observe que celui de *CCA1*-like intervient chez *Ostreococcus* au milieu de la nuit plutôt qu'au lever du jour. Or, c'est justement un intervalle de temps trop grand entre les pics qui invalide chez *Arabidopsis* le modèle de la boucle à

deux gènes. Tout cela conduit naturellement à se demander si ce modèle ne serait pas en fin de compte adapté à l'horloge d'*Ostreococcus* et à essayer de l'ajuster aux données expérimentales.

### 3 Données expérimentales

Nous utiliserons ici deux types de données expérimentales pour chacun des deux gènes. Les premières sont des mesures micropuces de la quantité d'ARN relativement à une référence, effectuées sur des extraits cellulaires prélevés toutes les trois heures (Fig. 1, en haut à droite) [7]. Ce sont des mesures difficilement reproductibles en raison de leur coût. Les deuxièmes nécessitent un travail important de constitution de lignées de cellules modifiées génétiquement, dans le génome desquelles ont été insérées un gène additionnel codant pour la protéine fonctionnelle (TOC1 ou CCA1) fusionnée à la luciférase, qui catalyse l'émission de photons par la luciférine. En fonction des constantes de temps des différents processus concernés, le signal de luminescence émis est proportionnel soit à la quantité de protéines nouvellement synthétisées, soit à la quantité totale de protéines, comme c'est le cas ici. Une fois les lignées stabilisées, le suivi automatisé de la variation de luminescence au cours d'une expérience permet donc d'obtenir des séries temporelles des variations de concentrations en protéines à intervalles d'une heure (Fig. 1, en bas à droite) [7]. D'autres lignées permettant de suivre l'activité transcriptionnelle des deux gènes au cours du temps ont également été construites mais ne sont pas utilisées ici [7].

Les données brutes ont été traitées afin de reconstruire des profils temporels en ARN et protéines qui puissent être ajustés par un modèle mathématique. Les données micropuces sont reproductibles avec une bonne précision, ce qui permet d'obtenir facilement un profil type, qui est ensuite interpolé avec des splines cubiques. Les données de luminescence présentent quant à elles d'importantes variations d'amplitude dans le temps, qui sont liées aux variations des conditions expérimentales, comme par exemple le nombre de cellules dans un puits ou leur arrangement. Nous avons ajusté les séries temporelles de luminescence par le produit d'une série de Fourier, représentant la composante périodique stationnaire que nous désirons étudier, par une fonction lentement variable correspondant aux variations expérimentales. Afin de se concentrer sur la dynamique à l'échelle de 24 heures de la boucle à deux gènes, et de laisser de côté les variations rapides qui correspondraient soit à des dynamiques transitoires soit tout simplement à du bruit, le nombre d'harmoniques de la série de Fourier est limité à 5.

### 4 Ajustement par un modèle minimal

Le modèle minimal de la boucle à deux gènes, où *CCA1* réprime *TOC1* qui active *CCA1*, est décrit par les quatre équations différentielles suivantes, où  $M_{T,C}$  et  $P_{T,C}$  représentent les concentrations en ARN et protéines pour chacun des deux gènes :

$$\dot{M}_T = \mu_T + \frac{\lambda_T}{1 + (P_C/P_{C_0})^{n_C}} - \delta_{M_T} \frac{K_{M_T} M_T}{K_{M_T} + M_T} \quad (1a)$$

$$\dot{P}_T = \beta_T M_T - \delta_{P_T} \frac{K_{P_T} P_T}{K_{P_T} + P_T} \quad (1b)$$

$$\dot{M}_C = \mu_C + \frac{\lambda_C (P_T/P_{T_0})^{n_T}}{1 + (P_T/P_{T_0})^{n_T}} - \delta_{M_C} \frac{K_{M_C} M_C}{K_{M_C} + M_C} \quad (1c)$$

$$\dot{P}_C = \beta_C M_C - \delta_{P_C} \frac{K_{P_C} P_C}{K_{P_C} + P_C} \quad (1d)$$

Les paramètres  $\lambda_X$  et  $\mu_X$  représentent respectivement les fractions du taux de transcription du gène  $X$  régulée et non régulée par l'autre protéine,  $\beta_X$  est le taux de traduction de l'ARN en protéine, les  $P_{X_0}$  sont les seuils de protéines où les activations ou répressions transcriptionnelles sont à moitié effectives. Les termes négatifs décrivent une dégradation enzymatique classique de type Michaelis-Menten, où  $\delta_Y$  représente le taux de dégradation à faible concentration et  $K_Y$  le seuil de saturation de la dégradation. La

présence d'une non-linéarité dans un ou plusieurs de ces termes de dégradation est essentielle pour l'existence d'oscillations auto-entretenues dans les équations (1), celles-ci disparaissant quand toutes constantes  $K_Y$  tendent simultanément vers l'infini.

Les profils temporels en ARN et protéines ne sont déterminés expérimentalement qu'à un facteur près. Deux jeux de paramètres différents qui mènent à des solutions se déduisant l'une de l'autre par une transformation d'échelle doivent donc être considérés comme équivalents du point de vue de l'ajustement. Nous sommes donc libres de fixer quatre paramètres arbitrairement, par exemple  $\beta_C = \beta_T = 1$ ,  $P_{C_0} = P_{T_0} = 100$ , ce qui revient à fixer une échelle pour chacune des quatre variables des équations (1).

Afin que la procédure d'ajustement ne dépende pas outre mesure des détails de la méthode de reconstruction des profils temporels, nous avons défini la fonction de score comme étant l'erreur quadratique moyenne des temps de passage des quatre profils à 20 % et 80 % de leurs amplitudes maximales respectives, en supposant que le début de la montée et l'arrivée près du pic, ainsi que leurs équivalents à la descente, étaient des événements pertinents biologiquement. En pratique, l'ajustement sur ces temps de passage a en général mené à un bon ajustement sur toute la courbe.

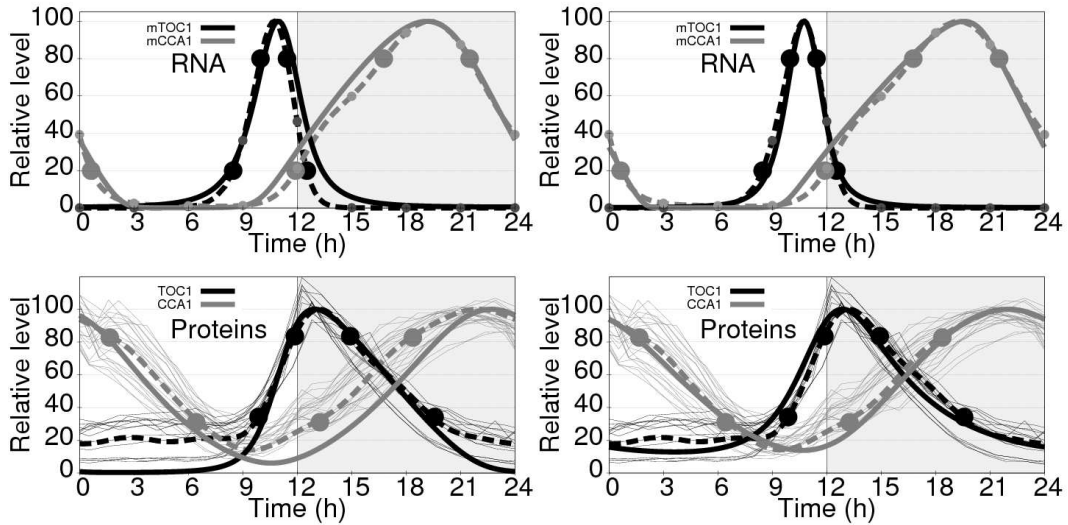
Enfin, la procédure d'ajustement doit pouvoir faire varier un ou plusieurs paramètres des équations (1) entre le jour et la nuit (par exemple, une protéine peut voir sa dégradation s'accélérer au jour), car c'est précisément par ce mécanisme que l'horloge circadienne se synchronise au cycle jour/nuit. Il faut donc considérer successivement différents modes de couplage à la lumière, et les classer en fonction du meilleur score obtenu. On observe en pratique des solutions assez différentes selon les couplages retenus, et il est évidemment naturel d'espérer que l'on puisse par la modélisation mathématique obtenir des informations sur la voie d'entrée de la lumière.

## 5 Résultats

L'ajustement des quatre courbes expérimentales par le modèle (1) au moyen d'une exploration systématique de l'espace des paramètres mène à un accord surprenant entre données expérimentales et solutions numériques (Fig. 2, à gauche). On a supposé lors de cet ajustement que la période d'oscillation libre est de 24 heures, ce qui correspond à la moyenne des observations expérimentales. Cet accord est d'autant plus remarquable que les données ARN et protéine ont été acquises dans des expériences différentes, et par des techniques totalement distinctes. Les profils ARN sont reproduits avec une précision sans équivalent dans la littérature, et les caractéristiques principales des profils protéines sont également bien reproduites, notamment la position des pics de concentration. On note juste une difficulté pour le modèle théorique à reproduire le niveau bas de la protéine TOC1 (les simulations numériques le prédisent plus bas qu'il n'est observé expérimentalement) et le début de la montée de la protéine CCA1.

Il est difficile en l'état de pouvoir affirmer si ces désaccords mineurs sont dus à un modèle trop sommaire ou à des biais expérimentaux non pris en compte. Il serait naïf de croire que les équations (1) rendent compte de toute la réalité. Toujours est-il que si on ajuste les données ARN et protéines séparément, ce qui n'est pas illogique puisqu'il s'agit d'expériences différentes, on obtient des accords qui sont difficilement perfectibles compte tenu des difficultés d'obtention des données expérimentales (Fig. 2, à droite), même s'ils sont bien sûr obtenus pour des jeux de paramètres différents. Bien plus, on observe que l'ajustement simultané des données ARN et protéine, notamment pour ces dernières, s'améliore significativement si on suppose que le zéro des signaux de luminescence est biaisé et qu'on le considère comme paramètre libre de la procédure d'ajustement. Tout cela encourage à penser que l'accord de données expérimentales issues d'un organisme vivant, forcément complexe quelle que soit son relatif dépouillement, avec un modèle mathématique aussi caricatural ne peut être le fruit du hasard.

Mais il y a encore plus surprenant. En fait, les accords optimaux montrés à la figure 2 ont été obtenus pour des modèles non couplés à la lumière. Plus précisément, la procédure d'ajustement a, pour tous les modes de dépendance à l'éclairement possibles, systématiquement ramené la constante de couplage à 0 lors de l'optimisation. C'est un modèle d'oscillateur libre, décrit par les équations (1) sans aucune modulation des paramètres, qui reproduit le mieux des données expérimentales obtenues en réponse à une forte modulation de l'éclairement entre le jour et la nuit, tout au moins sur l'échelle de temps de 24



**Fig. 2.** A gauche : ajustement simultané des quatre courbes correspondant aux données ARN et protéine de la figure 1 après traitement ( $n_c = 2$ ,  $n_T = 2$ ,  $1/\delta_{M_T} = 13.1$  mn,  $1/\delta_{M_C} = 18.9$  mn,  $1/\delta_{P_T} = 43.3$  mn,  $1/\delta_{P_C} = 105.9$  mn,  $K_{M_T} = 5.8nM$ ,  $K_{M_C} = 0.61nM$ ,  $K_{P_T} = 44nM$ ,  $K_{P_C} = 800nM$ ,  $\lambda_T = 25$  nM/h,  $\lambda_C = 3.1$  nM/h,  $\mu_T = 0.021$  nM/h,  $\mu_C = 0.021$  nM/h). A droite : ajustement séparé des deux types de données (ARN d'un côté, protéines de l'autre), correspondant à deux expériences différentes. Les courbes cibles reconstruites à partir des données expérimentales sont indiquées en pointillés, les courbes issues des simulations numériques du modèle (1) en traits pleins. Dans le cas des données protéines, les lignes fines représentent les données brutes, normalisées par la fonction lentement variable obtenue lors du traitement.

heures à laquelle nous nous intéressons ici! Ce résultat est tout à fait contre-intuitif, et nous essaierons dans la prochaine section d'en tirer quelques pistes pour l'étude de l'horloge circadienne d'*Ostreococcus*.

Pour conclure, nous noterons que la qualité de l'ajustement ne dépend pas de la fréquence naturelle supposée. Nous avons effectué plusieurs ajustements pour des fréquences naturelles hors accrochage variant entre 23.8 et 25 heures et avons trouvé essentiellement les mêmes résultats, excepté bien sûr le fait qu'un couplage minimal est nécessaire à la synchronisation dès que période naturelle et période de forçage sont légèrement différentes. Les taux de couplages obtenus sont dans tous les cas très modestes, confirmant le résultat obtenu pour une fréquence naturelle supposée de 24 heures.

## 6 Discussion

Il nous faut d'abord insister sur le fait qu'il n'y a absolument rien d'évident au fait que le meilleur ajustement soit obtenu pour un couplage nul lorsque la période naturelle est supposée de 24 heures. Tout ce que permet l'égalité des périodes naturelle et de forçage, c'est qu'un verrouillage de fréquence puisse être obtenu dès un couplage infinitésimal. Mais il n'en reste pas moins que même dans ces conditions, le meilleur ajustement, c'est-à-dire non seulement le verrouillage en fréquence mais surtout le recouvrement optimal des signaux expérimentaux et numériques, doit se produire en général pour un couplage différent de zéro. Le fait que l'ajustement optimal soit obtenu pour un couplage nul révèle donc une propriété caractéristique de l'horloge circadienne d'*Ostreococcus tauri*.

Il faut ensuite souligner qu'il est impossible que l'horloge ne soit pas couplée au cycle jour/nuit, car on observe expérimentalement que la relation de phase entre l'horloge et le cycle de forçage met au plus deux à trois jours à s'établir lorsqu'on part d'une condition initiale quelconque. Il nous faut donc comprendre comment concilier le couplage nul de l'ajustement optimal et un couplage effectif bien réel.

Une première hypothèse de travail part de la remarque que tous les couplages qui ont été invalidés par la procédure d'ajustement agissent sur une échelle de temps de 24 heures. Ils sont en effet appliqués en imposant une certaine valeur d'un paramètre pendant les 12 heures du jour, puis une autre pendant

les 12 heures de nuit. Que l'absence de couplage soit préférable à un couplage de ce genre ne signifie pas qu'il n'y a aucun couplage, mais peut-être tout simplement que le couplage qui permet à l'horloge de se synchroniser n'est effectif que pendant de courts intervalles de temps. Un couplage qui n'agirait que pendant une petite fraction du cycle jour/nuit pourrait être quasiment invisible à l'échelle de 24 heures tout en contribuant efficacement à verrouiller la phase de l'horloge. Il est tentant de se demander si ces intervalles de couplage actif ne seraient pas localisés autour des transitions jour/nuit et nuit/jour, car c'est précisément à ces moments de la journée qu'un léger décalage de phase serait le plus facilement mesurable. Imaginons pour simplifier que les photorécepteurs ne soient allumés que pendant une heure de part et d'autre de la tombée de la nuit. Un décalage de 10 minutes fait passer le rapport jour/nuit de la période de mesure de 60 :60 à 70 :50 ou 50 :70, soit un changement facilement mesurable. Or, que représentent 10 minutes à l'échelle d'une journée? Dans le même temps, l'effet des corrections d'un tel couplage serait très faible et difficilement perceptible sur les signaux expérimentaux.

Mais cette idée d'un couplage localisé dans le temps n'est qu'un cas particulier d'une hypothèse plus générale. Les données expérimentales que nous avons utilisées pour ajuster le modèle théorique ont été enregistrées en régime permanent, alors que l'horloge est verrouillée en phase au cycle jour/nuit de manière stable. Peut-on imaginer que le couplage disparaît, ou tout au moins devient infime, dès que la relation de phase recherchée est atteinte? Cette hypothèse permettrait de concilier la relaxation rapide vers une relation de phase fixe que l'on observe expérimentalement avec l'ajustement à un oscillateur libre.

Un tel mécanisme dynamique présenterait un grand avantage. Dans la nature, l'éclairement reçu d'un jour sur l'autre peut varier de façon notable. Le signal que l'horloge reçoit en entrée et auquel elle doit se synchroniser est extrêmement régulier en phase, mais très bruyant en amplitude. A partir du moment où l'on a un couplage qui dépend de l'amplitude de ce signal (via l'intensité lumineuse), il n'est pas interdit de penser que la meilleure stratégie pour s'isoler de ce bruit soit précisément de débrancher le couplage lorsque la relation de phase recherchée est atteinte.

## 7 Conclusion

L'ajustement des données disponibles pour l'horloge circadienne de l'algue *Ostreococcus tauri* semble indiquer qu'un oscillateur génétique extrêmement simple, basé sur la régulation réciproque de deux gènes, est à l'œuvre au cœur de cette horloge. Il nous reste à expliciter les circuits qui permettent à cet oscillateur à se synchroniser au cycle jour/nuit et à comprendre pourquoi aucun couplage n'est apparent en régime synchronisé. S'agit-il d'une stratégie pour s'affranchir du bruit d'amplitude du cycle jour/nuit? Quoi qu'il en soit, *Ostreococcus* apparaît comme un organisme modèle particulièrement prometteur pour la biologie circadienne et la biologie systémique en général.

## Références

1. J.C. DUNLAP, Molecular bases for circadian clocks, *Cell*, **96**, 271–290 (1999).
2. M.W. YOUNG & S. KAY, Time zones : a comparative genetics of circadian clocks, *Nature Genetics*, **2**, 702–715 (2001).
3. P. FRANÇOIS, A model for the neurospora circadian clock, *Biophysical Journal*, **88**, 2369–2383 (2005).
4. J. CW LOCKE *et al*, Extension of a genetic network model by iterative experimentation and mathematical analysis, *Molecular Systems Biology*, **88**, 4100018 (2005).
5. J. CW LOCKE *et al*, Experimental validation of a predicted feedback loop in the multi-oscillator clock of arabidopsis thaliana, *Molecular Systems Biology*, **88**, 59 (2006).
6. D. ALABADÍ, T. OYAMA, M. J. YANOVSKY, F. G. HARMON, P. MÁZ & S. A. KAY, Reciprocal Regulation Between *TOC1* and *LHY/CCA1* Within the Arabidopsis Circadian Clock, *Science*, **293**, 880–883 (2001).
7. F. CORELLOU, CH. SCHWARTZ, J.-P. MOTTA, F. SANCHEZ & F.-Y. BOUGET, A reduced version of the plant circadian clock relies on fine tuned diurnal and circadian regulations of the *TOC1/CCA1* feedback loop in the picocaryote, *Ostreococcus*, soumis.



# Etude expérimentale des implications des marées dans les systèmes planétaires

Cyprien Morize<sup>1</sup>, Michael Le Bars<sup>1</sup>, Patrice Le Gal<sup>1</sup> & Andreas Tilgner<sup>2</sup>

<sup>1</sup> IRPHE — UMR 6594 - Marseille University

<sup>2</sup> University of Göttingen

lebars@irphe.univ-mrs.fr

**Résumé.** Le rôle fondamental des effets de marées en géo- et astrophysique a été l'objet de multiples études depuis plusieurs siècles. Ces études ont permis de déterminer les conditions d'apparition de l'instabilité elliptique correspondant à une résonance d'ondes inertielles avec les marées. Nous nous concentrons ici sur le mode de spin-over et son comportement dans le régime où le nombre d'Ekman et l'excentricité de la déformation sont petits, régime pertinent pour les planètes. Nous présenterons également un nouveau phénomène de génération de vents zonaux par un forçage de marées. Suivant une récente analyse théorique et numérique de Tilgner [1], nous observons pour la première fois expérimentalement que l'auto-interaction non-linéaire d'un mode inertiel avec lui-même peut conduire à un écoulement axisymétrique intense dans une sphère en rotation sous forme de zones de cisaillement. La trace en surface de ces structures pourrait donner naissance à des vents zonaux dans les planètes et les étoiles.

**Abstract.** The fundamental role of tides in geo and astrophysics has been the subject of multiple studies for several centuries. Beyond the well known quasi periodic flows of ocean water on our shores, tides are also responsible for phenomena as varied as the intense volcanism on the Jovian satellite Io, or the synchronization of the Moon spin on its rotation around the Earth. We describe here (i) the behaviour of the so-called spin-over mode of the elliptical instability in the parameter range relevant to planetary applications and (ii) a new phenomenon of zonal wind generation by tidal forcing. Following a recent theoretical and numerical analysis of Tilgner [1], we present the first experimental evidence that the nonlinear self-interaction of a tidally forced inertial mode can drive an intense axisymmetric flow in a rotating sphere. These results are relevant for zonal wind generation in planets and stars.

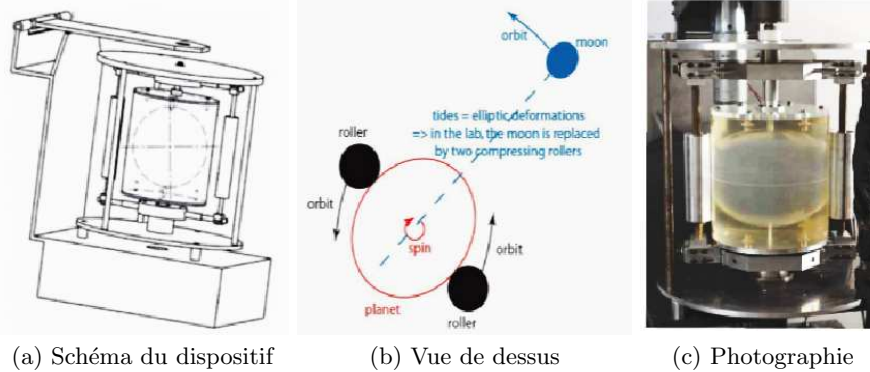
## 1 Introduction

Le rôle fondamental des effets de marées en géo- et astrophysique a été le sujet de multiples études depuis plusieurs siècles. Au-delà du phénomène bien connu de flux et de reflux de la mer sur nos rivages, les marées gravitationnelles s'appliquent à toutes les enveloppes de la Terre, depuis son atmosphère jusqu'à son noyau liquide. On peut montrer que la forme de la Terre correspond à une ellipsoïde dont le grand axe est dirigé vers la Lune. Ce phénomène de marées concerne d'ailleurs tous les corps célestes (lunes, planètes, étoiles, disques d'accrétion...), les effets étant d'autant plus grands que les masses attirantes sont importantes et que les distances entre les corps sont petites. Dans certains systèmes, les forces de marées peuvent atteindre des valeurs colossales et avoir des répercussions phénoménales, pouvant provoquer, par exemple, le volcanisme intense de Io, satellite de Jupiter, par un échauffement permanent de son manteau solide. Les marées agissent également sur l'évolution des trajectoires orbitales et sur les vitesses de rotation des corps célestes. L'exemple le plus connu est la synchronisation de la vitesse orbitale de la Lune sur la vitesse de spin de la Terre.

Les forces de marées peuvent également exciter, dans les étoiles et les noyaux liquides des planètes, une instabilité hydrodynamique, dite elliptique. La présence d'une telle instabilité dans les systèmes planétaires et stellaires déformés a été suggérée depuis plusieurs années [2]. Cependant ses possibles répercussions sur les systèmes naturels demeurent encore largement spéculatives.

Cette instabilité intervient dans de nombreux systèmes et est bien connue dans le domaine de la dynamique des vortex : elle correspond à la déstabilisation 3D d'écoulements tournants 2D dont les

lignes de courant sont déformées elliptiquement par des interactions entre tourbillons. Dans les systèmes planétaires, l'ellipticité des lignes de courant est directement assurée par les forces de marées. D'un point de vue plus rigoureux, l'instabilité elliptique est due à un mécanisme de résonance paramétrique entre trois ondes : l'onde due aux marées, de période temporelle égale à la période orbitale et de période azimutale  $m = 2$ , et deux ondes inertielles du fluide en rotation. Les ondes inertielles correspondent aux modes propres d'un écoulement tournant. Il en existe une infinité, chaque onde étant décrite par ses périodicités spatiales et temporelles. L'instabilité se produit lorsque les caractéristiques de l'onde de marée complètent celles de deux ondes inertielles et la résonance de ces trois ondes engendre un écoulement tridimensionnel dont la forme dépend du rapport entre la vitesse orbitale et la vitesse de spin de la planète considérée.



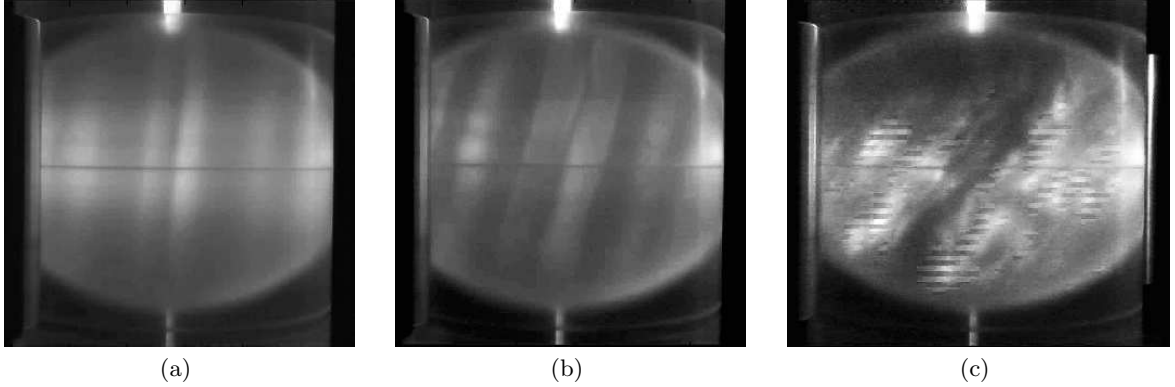
**Fig. 1.** (a) Schéma de notre dispositif expérimental nous permettant de simuler en laboratoire les effets de marées dans une planète : deux moteurs indépendants nous permettent de contrôler la rotation propre de la sphère et la rotation de la déformation elliptique de marées due aux mouvements orbitaux. (b) Vue de dessus du dispositif pour simuler les effets de marées. (c) Photographie de l'expérience.

Un dispositif expérimental, schématisé sur la figure 1, a été mis en place au laboratoire dans l'optique d'étudier les modes instables d'une sphère déformable remplie d'eau. La sphère creuse, de rayon  $R = 10$  cm, a été moulée dans un gel de silicone transparent et est animée d'un mouvement de rotation propre autour de son axe vertical ( $Oz$ ) correspondant à la vitesse de spin  $\Omega_s$  de la planète (e.g. la rotation de la Terre sur elle-même en 24 heures). La vitesse de spin peut atteindre jusqu'à  $\pm 180$  rpm dans notre expérience. Pour mimer les déformations dues aux marées, nous utilisons deux rouleaux verticaux symétriques qui viennent appuyer sur la sphère en rotation en la déformant elliptiquement. Pour reproduire les mouvements orbitaux du système (e.g. la rotation de la Lune autour de la Terre en 27 jours), le mouvement de ces deux rouleaux autour de la sphère est assuré par un moteur indépendant, tel que  $\Omega_o$  varie de 0 à 120 rpm. L'amplitude de la déformation est ajustée en réglant l'écartement entre les deux rouleaux. Un tel système est déterminé par trois nombres sans dimension : le rapport  $\Omega^G = \Omega_o/\Omega_s$  entre la vitesse orbitale et la vitesse de spin de la sphère, l'excentricité  $\epsilon$  de la déformation de marée, qui varie de 0 à 0.08 dans notre expérience, et le nombre d'Ekman,  $E = \nu/\Omega_s R^2$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide, qui caractérise l'intensité des effets visqueux par rapport à la rotation d'ensemble.

Dans un premier temps, nous allons chercher à caractériser le mode instable appelé mode de spin-over pour une déformation fixe,  $\Omega^G = 0$ , en fonction de l'ellipticité et du nombre d'Ekman. Dans une deuxième série d'expériences, nous étudierons un nouveau phénomène de génération de vents zonaux par un forçage de marées en suivant une récente analyse théorique et numérique de Tilgner [1].

## 2 Résonance paramétrique : instabilité elliptique

Pour une déformation de marée fixe, c'est-à-dire lorsque  $\Omega_o = 0$ , le mode instable est appelé mode de spin-over. La figure 2 présente trois photographies par visualisation à l'aide de particules réfléchissantes. En présence de forces de marées, l'instabilité engendre des mouvements de fluide complexes et fait tourner le fluide autour d'un axe perpendiculaire à l'axe d'entraînement du fluide. L'effet conjoint de deux rotations et de l'adhérence à la paroi donne alors une forme de 'S' à l'axe de rotation du liquide comme



**Fig. 2.** Modes excités par instabilité elliptique dans une sphère déformée elliptiquement. L'axe de rotation imposé est vertical et la visualisation est réalisée à l'aide de particules de Kalliroscope éclairées par un plan laser permettant d'observer l'axe effectif de rotation du fluide. Sur ces photographies, la déformation est fixe,  $\Omega^G = 0$ , et un mode dit de spin-over prend place. (a)  $\epsilon = 0.03$ ,  $\Omega_s = 47$  rpm. (b)  $\epsilon = 0.04$ ,  $\Omega_s = 67$  rpm. (c)  $\epsilon = 0.05$ ,  $\Omega_s = 140$  rpm.

nous pouvons l'observer sur la figure 2. Le mécanisme d'apparition de cette rotation au coeur de la sphère fluide est comparable à l'instabilité de rotation d'un ellipsoïde solide autour de son axe médian d'inertie. Afin de réaliser un modèle pour caractériser l'instabilité elliptique qui prend place dans une sphère déformée, Lacaze *et al* [3] ont proposé de reprendre les équations d'Euler pour un solide ellipsoïde sans frottement auquel on ajoute simplement les effets visqueux fluides associés aux couches limites.

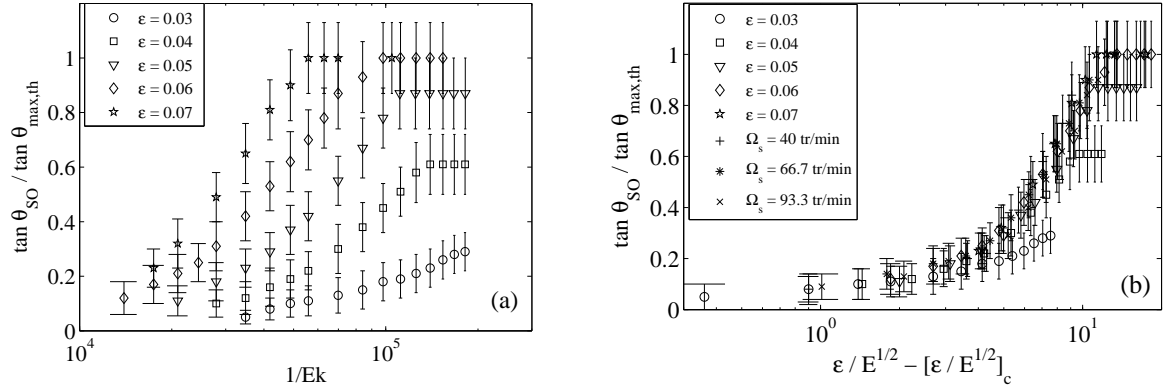
L'instabilité dans l'ellipsoïde fluide ne décrit pas de cycles hétéroclines mais on observe une amplitude de l'inclinaison de l'axe de rotation augmenter puis saturer au cours du temps. Il est donc relativement aisé de suivre l'angle de cette inclinaison et d'en déduire les taux de croissance de l'instabilité pour différentes valeurs de l'ellipticité et du nombre d'Ekman. On peut montrer que le taux de croissance de l'instabilité est donné par

$$\sigma = \frac{\epsilon}{2} - 2.62\sqrt{E}. \quad (1)$$

Le taux de croissance de l'équation (1) a été avantageusement comparé aux mesures expérimentales (voir [3]). Pour compléter cette étude, nous nous intéresserons ici à l'amplitude maximale et stationnaire du mode de spin-over (traduit par l'angle d'inclinaison) et au comportement à faibles  $E$  et  $\epsilon$  approprié aux planètes.

Comme le suggère la figure 2, l'angle d'inclinaison, après saturation du mode de spin-over, varie en fonction de l'ellipticité et du nombre d'Ekman. Une série d'expériences a donc été réalisée afin d'observer comment l'angle du spin-over  $\theta_{SO}$  varie en fonction de  $\epsilon$  et  $E$ . La figure 3a représente cinq séries d'expériences obtenues en faisant varier systématiquement le nombre d'Ekman, pour 5 valeurs de l'ellipticité de la sphère fluide. On observe à partir de ces courbes que l'angle du spin-over augmente avec la diminution du nombre d'Ekman et avec l'augmentation de  $\epsilon$ . La figure 3b représente les mêmes données en fonction de  $\epsilon/E^{1/2} - [\epsilon/E^{1/2}]_c$ . La valeur critique  $\alpha_c = [\epsilon/E^{1/2}]_c = 5.24$  a été déterminée à partir de l'équation (1) et correspond à la valeur critique à partir de laquelle l'instabilité naît. On observe un regroupement des données selon une courbe maîtresse confirmant, comme le suggérait l'équation (1), que  $\alpha = \epsilon/E^{1/2}$  est le paramètre de contrôle pertinent pour décrire la dynamique de l'instabilité elliptique. En augmentant  $\alpha$  à partir de  $\sim 1$  jusqu'à des valeurs de l'ordre de  $\sim 20$ , l'écoulement devient de plus en plus complexe, avec la superposition d'un écoulement turbulent au mode de spin-over. Malgré tout, le mode de spin-over semble rester présent à grande échelle et l'angle  $\theta_{SO}$  sature autour de  $45^\circ$ .

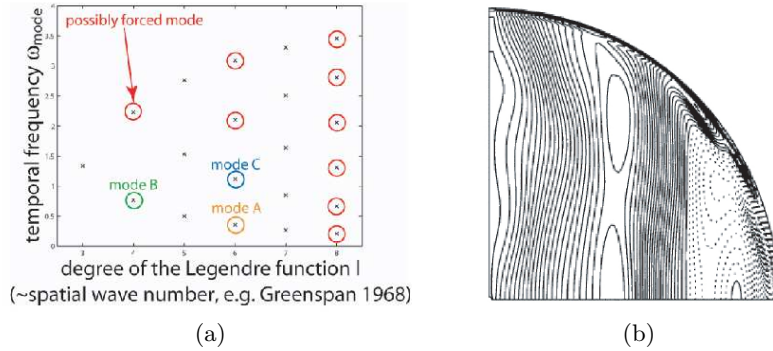
Le même comportement est attendu aux échelles planétaires comme dans le noyau de Io pour lequel  $\alpha \sim 270$ . Le noyau de Io est donc clairement instable et l'amplitude de l'instabilité elliptique y est vraisemblablement très forte. En revanche  $\alpha$  reste de l'ordre de l'unité dans le noyau terrestre : la Terre



**Fig. 3.** (a) Tangente de l'angle stationnaire du spin-over, normalisée par la tangente de l'angle maximal théorique, en fonction de  $Ek^{-1}$ . (b)  $\tan \theta_{SO} / \tan \theta_{max,th}$  en fonction de  $\alpha - \alpha_c$  où  $\alpha = \epsilon / E^{1/2}$  et  $\alpha_c = 5.24$  la valeur critique déterminée théoriquement.

se situe au voisinage du seuil de stabilité et le mode de spin-over, s'il est excité, n'implique qu'une faible variation de l'angle de rotation inférieure à  $5^\circ$ .

### 3 Forçage de vents zonaux par les marées

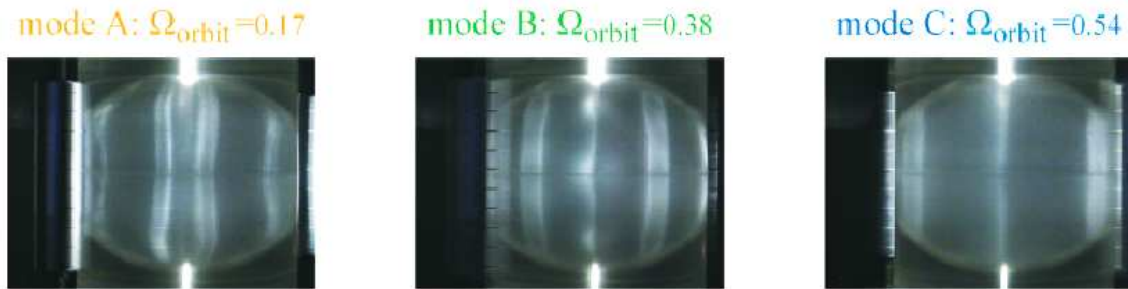


**Fig. 4.** (a) Relation de dispersion des ondes inertielles dans une sphère pour les modes de période azimutale  $m = 2$ . Les fréquences sont adimensionnées par la vitesse de spin. Les points entourés correspondent aux modes nous avons observés expérimentalement (Fig. 5a). (b) Détermination numérique (calculs non-linéaires à  $Ekman = 2 \cdot 10^{-5}$ ) des lignes d'iso-vitesse azimutale, pour un forçage initial de période azimutale  $m = 2$  à la vitesse orbitale 0.56 représentant les marées gravitationnelles. Ce calcul numérique correspond au mode C observé expérimentalement (Fig. 5a).

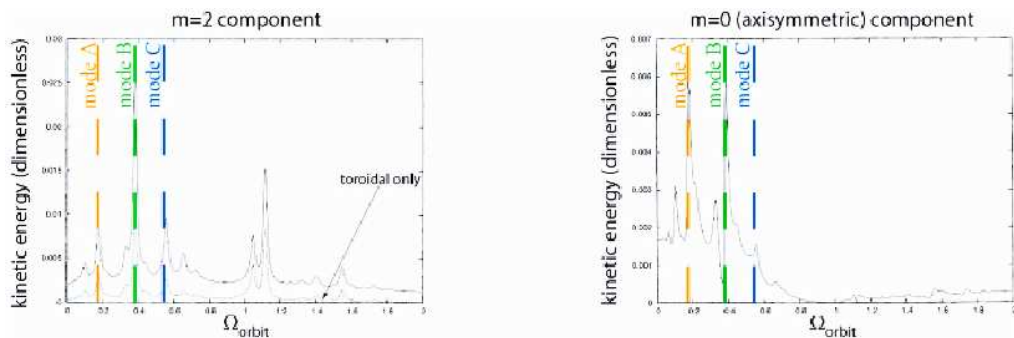
En plus du mécanisme de résonance triadique donnant lieu à l'instabilité elliptique, les marées gravitationnelles sont susceptibles de forcer dans les noyaux des planètes telluriques et les atmosphères des géantes gazeuses des écoulements axisymétriques, tels ceux donnant lieu aux bandes de cisaillement à la surface de Jupiter. L'origine de ce forçage est relativement complexe et fait appel simultanément aux effets non linéaires et visqueux de l'écoulement. En effet, vues depuis la planète considérée ici comme une sphère en rotation à la vitesse de spin, les marées correspondent à une déformation de période azimutale  $m = 2$ , tournant à la vitesse orbitale. Elles sont donc susceptibles de forcer une onde inertielle du fluide en rotation, à condition que le mode considéré soit symétrique par rapport à l'équateur (pour respecter la symétrie du forçage), de période azimutale  $m = 2$  et de fréquence égale à deux fois la fréquence de rotation des marées (ce facteur 2 provenant du fait que les marées excitent le mode 2 fois par tour).

Potentiellement, en fonction des valeurs relatives des vitesses orbitale et de spin, les marées sont donc capables de forcer un nombre infini de modes propres de la sphère (Fig. 4a).

Une fois le mode excité, son interaction non linéaire avec lui-même génère des modes de période azimutale  $m = 4$  et  $m = 0$ . Cependant, Greenspan [4] a démontré que l'interaction non linéaire des modes non visqueux ne génère aucun écoulement géostrophique. La viscosité vient donc modifier ce résultat classique et donne naissance à des écoulements axisymétriques par éruption de la couche limite, selon un mécanisme bien connu en précession (e.g. Malkus 1968, Busse 1968, Vanyo et al. 1995, Tilgner & Busse 2001, Noir et al. 2001 et 2003). Cependant, ce mécanisme a été jusqu'à récemment presque complètement négligé dans le cas des marées, à l'exception d'un article de Suess en 1971 publié dans le *Journal of Fluid Mechanics* et d'un article récent d'Andreas Tilgner [1], qui a montré numériquement la production de fortes circulations géostrophiques stationnaires (Fig. 4b).



(a) Zone de cisaillement axisymétriques



(b) Détermination numérique de l'énergie cinétique

**Fig. 5.** (a) Zones de cisaillement axisymétriques observées au Kalliroscope dans notre dispositif expérimental, pour une excentricité de 0.03 et un nombre d'Ekman de  $10^{-5}$ , en changeant uniquement la vitesse de rotation orbitale. En surface, ces zones de cisaillement empilées en tubes cylindriques coaxiaux génèrent des vents zonaux axisymétriques. (b) Détermination numérique de l'énergie cinétique stockée dans le mode de période azimutale  $m = 2$  et  $m = 0$  respectivement, pour un forçage initial de période  $m = 2$  représentant les marées gravitationnelles (calculs non-linéaires à Ekman  $2.10^{-5}$ ). Les traits pointillés représentent les observations expérimentales de zones de cisaillement obtenues en changeant systématiquement la vitesse de rotation orbitale (cf. figure 5 (a)) et s'accordent parfaitement avec les pics d'énergie prédits numériquement.

Grâce à notre dispositif expérimental, nous avons confirmé pour la première fois expérimentalement l'existence de ces zones de cisaillement axisymétriques, dont l'intensité et la forme dépendent du rapport entre vitesses d'orbite et de spin (Fig. 5a). Nos observations expérimentales sont en parfait accord avec les résultats numériques de Tilgner [1] (Fig. 5b). Elles confirment l'existence d'une forte zone de cisaillement au niveau de l'axe de rotation, telle que prédite théoriquement par Suess (1971). Mais les expériences, tout comme le numérique, démontrent également des déviations significatives par rapport à cette théorie, en particulier l'apparition de zones de cisaillement supplémentaires qui demeurent encore inexpliquées. Enfin, nos résultats expérimentaux suggèrent que le seuil d'excitation de ce mécanisme est très bas : de tels écoulements pourraient donc prendre place quasi-génériquement dans les noyaux liquides des planètes, mais également par exemple dans les atmosphères des géantes gazeuses, et ce en complément

d'une éventuelle instabilité elliptique. Ces zones de cisaillement seraient alors susceptibles de bouleverser significativement la dynamique des noyaux planétaires ou étoiles déformés par les marées gravitationnelles et constitueraient une source additionnelle de génération d'ondes et de turbulence.

## 4 Conclusion



**Fig. 6.** Zones de cisaillement axisymétriques excitées par les marées dans le cas d'un forçage incliné d'environ  $5^\circ$  par rapport à l'axe de rotation (Ekman de  $10^{-5}$ ).

En conclusion, nos premiers résultats prometteurs demandent maintenant à être complétés par une quantification systématique de l'énergie stockée dans les écoulements axisymétriques et de la vitesse des vents zonaux générés. Nous souhaitons également poursuivre notre étude dans le cas d'une coquille sphérique, plus proches des situations planétaires, et qui devrait donner lieu à des écoulements encore plus complexes et à des bandes de cisaillement plus nombreuses et plus intenses, puisqu'une nouvelle couche limite visqueuse apparaîtra au niveau de la graine [1]. A noter enfin que dans le cas d'un forçage légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation, correspondant d'un point de vue planétaire à la situation quasi-générique d'un axe de rotation incliné par rapport à la normale au plan de l'ecliptique, les forçages  $m = 1$  et  $m = 2$  sont présents simultanément, conduisant la multiplication spectaculaire des bandes de cisaillement (Fig. 6).

## Références

1. A. TILGNER, Zonal wind driven by inertial modes, *Physical Review Letters*, **99**, 194501 (2007).
2. R. R. KERSWELL & W. V. R. MALKUS, Tidal instability as the source for Io's magnetic signature, *Geophysical Researches Letters*, **25**, 603–606 (1998).
3. L. LACAZE, P. LE GAL & S. LE DIZÈS, Elliptical instability in a rotating spheroid, *Journal of Fluid Mechanics*, **505**, 1-22 (2004).
4. H. P. GREENSPAN, *The theory of rotating fluids*, Cambridge University Press (1968).
5. F. H. BUSSE, Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell, *J. Fluid Mech.*, **33**, 739-751 (1968).
6. W. V. R. MALKUS, Precession of the Earth as the Cause of Geomagnetism, *Science*, **160**, 259-264 (1968).
7. J. NOIR, P. CARDIN, D. JAULT AND J.-P. MASSON, Experimental evidence of nonlinear resonance effects between retrograde precession and tilt-over mode within a spheroid, *Geophys. J. Int.*, **154**, 407-416 (2003).
8. S.T. SUESS, Viscous flow in a deformable rotating container, *J. Fluid Mech.*, **45**, 189-201 (1971).
9. A. TILGNER AND F. H. BUSSE, Fluid flows in precessing spherical shells, *J. Fluid Mech.*, **426**, 387-396 (2001).
10. J. VANYO, P. WILDE, P. CARDIN AND P. OLSON, Experiments on processing flows in the Earth's liquid core, *Geophys. J. Int.*, **121**, 136-142 (1995).

# L'épidémie de chikungunya : modélisation et stabilité

D. Moulay, M. Cadivel, & M.A. Aziz-Alaoui

Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (LMAH)  
Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, BP540, 76058 Le Havre  
djamila.moulay@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Le virus *chikungunya* est un arbovirus (de l'anglais : **arthropode borne virus**), du même type que la Dengue, isolé pour la première fois en 1953 et transmis par un vecteur, le moustique *Aedes Albopictus*. Ce virus entraîne des pathologies lourdes pour les personnes contaminées. La Réunion a connu en 2005 une épidémie de chikungunya. Après un premier pic en mai 2005 (400 contaminations par semaine), l'épidémie a été ralentie par l'arrivée de l'hiver austral. En effet les températures plus basses et une hygrométrie plus faible, durant cette période, ont fortement limité la croissance de l'*Aedes Albopictus*. Cependant, ceci n'a pas été suffisant pour stopper l'épidémie dont le pic le plus important a eu lieu en février 2006, avec plus de 40000 cas par semaine. Bien qu'il soit très difficile de prévoir un tel phénomène, une étude à partir d'un modèle simple peut nous permettre de mieux appréhender les facteurs clés de la propagation de l'épidémie. Dans ce but, et afin d'évaluer, de prévenir et de contrôler le risque sanitaire dû aux moustiques, des modèles mathématiques sont proposés et étudiés. Le premier modèle que nous proposons, basé sur le cycle de vie du moustique, permet de décrire la dynamique de population de celui-ci. Le second, utilisant les modèles de type SI et SIR, est proposé afin de décrire la transmission du virus entre la population moustique et la population humaine. L'étude théorique de ces modèles permet de déterminer des facteurs essentiels de la prolifération du vecteur. Nous présentons ainsi l'analyse des solutions d'équilibre et étudions leur stabilité locale ou globale, un premier pas vers une étude plus détaillée de la dynamique non linéaire de ces modèles.

**Abstract.** The chikungunya virus is an arbovirus, arthropod-borne virus, of the same type as the dengue fever, isolated for the first time in 1953 and transmitted by a vector, the mosquito *Aedes Albopictus*. This virus involves heavy pathologies for the contaminated human beings. The Réunion island has again encountered a chikungunya epidemic in 2005. After a pick in May 2005 with more than 400 contaminations in a week, the epidemic has been delayed due to the beginning of the winter. Indeed, low temperatures and a low humidity during the winter has contributed to decrease the *Aedes Albopictus* growth. However, it has not been enough to stop the epidemic, which has reached its peak in february 2006 with more than 4000 contaminations a week. Although such a phenomenon is difficult to predict, a study from a simple model allows us to understand the most important factors involved in the epidemic propagation. In this aim, and in order to evaluate, to prevent and to control the health dangers caused by mosquitoes, mathematical models has been proposed to study the phenomenon. The first model we give a description of the mosquito population dynamic based on the mosquito life cycle. The second model presented is a SI or SIR one which describes the virus transmission from the mosquito population to the human one. The theoretical study of these models identify the most important causes in the virus proliferation. In this paper, the analysis of the equilibria and their local and global stability are presented. This is a first step toward a more detailed study of the dynamics of such nonlinear models.

## 1 Introduction

Le chikungunya se transmet à l'homme par l'intermédiaire d'un moustique présent depuis plusieurs années dans des pays tels que le Cambodge [2], les Philippines [1] ou encore les océans Pacifique et Indien. Il a récemment fait son apparition en Europe [8], aux Etats Unis et en Australie. Une épidémie sans précédent de chikungunya a eu lieu sur l'île de La Réunion, qui compte 775 000 habitants. Au 20 avril 2006, plus de 244 000 cas dont 205 décès, directs ou indirects, ont été rapportés. Le moustique *Aedes albopictus* [7], présent sur l'île de longue date, en est le vecteur principal. Plusieurs espèces de moustiques sont susceptibles de transmettre le chikungunya, mais seules *Aedes aegypti* et *Aedes albopictus* ont été à

ce jour identifiées comme vecteurs épidémiques, à cause de leur adaptation aux zones d'habitat humain. Ces mêmes espèces sont également impliquées dans la transmission d'autres arbovirus : dengue, dengue hémorragique, fièvre jaune [3], etc. La transmission du virus d'un humain malade à un moustique se fait par le sang aspiré lors de la piqûre. La contamination d'un homme sain est réalisée par la salive de moustiques qui ont été infectés quelques jours ou quelques semaines auparavant. Les personnes atteintes du chikungunya ne sont donc pas contagieuses par contact. Des cas de transmission de la mère à son nouveau né ont été constatés chez un petit nombre de personnes à la Réunion. La maladie se caractérise par une fièvre, une éruption et des arthralgies invalidantes.

Les moustiques posent ainsi deux problèmes différents : un problème de santé publique (transmission des arbovirus) et un problème de confort (nuisances dues aux piqûres). Dans le but d'évaluer, de prévenir et de contrôler le risque sanitaire dû aux moustiques, nous proposons des modèles mathématiques dont l'étude est en cours [9]. Notre objectif est de développer des modèles dynamiques en exploitant de manière approfondie les études entomologiques concernant le cycle de vie et l'écologie des moustiques. En effet une étude, à partir d'un modèle simple, peut permettre de mieux appréhender les facteurs clés de l'apparition d'une telle épidémie. En conséquence, nous allons tout d'abord étudier la dynamique de population du vecteur privilégié, le moustique *Aedes Albopictus*. Ce moustique tropicale se transforme quatre fois dans sa vie. Pour en décrire les différents stades d'évolution, nous utiliserons un modèle structuré par classes. Les interactions avec le milieu extérieur et les phénomènes de densité-dépendance seront décrits. Enfin nous utiliserons les modèles standards de propagation de maladies pour traduire les phénomènes de transmission entre les moustiques et les hommes.

## 2 Dynamique de population du moustique

### 2.1 Le modèle

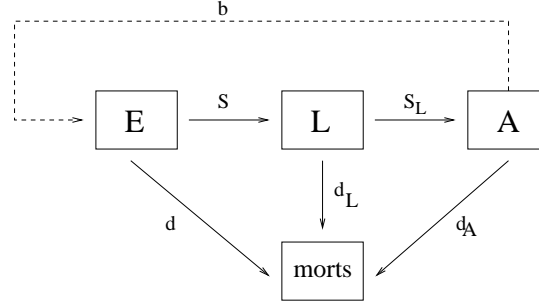
On cherche un modèle d'évolution du vecteur. L'*Aedes Albopictus*, plus communément appelé moustique tigre à cause de sa peau noire tachetée de blanc, est un des vecteurs du virus chikungunya. Son cycle de vie comporte quatre étapes. La première est l'état embryonnaire. Les œufs sont pondus par les moustiques adultes femelles dans l'eau stagnante ou sur un sol humide. Environ cinquante œufs sont pondus en quelques heures ou sur quelques jours, pour une éclosion qui se fait entre trois à cinq jours en général. L'éventuel assèchement des gîtes de pontes, en été, n'a aucun effet sur leur survie. Seul leur développement est ralenti. L'éclosion se produit lorsque le milieu est à nouveau inondé. Après éclosion, les larves sont suspendues la tête en bas. Elles se nourrissent des particules végétales flottant à la surface de l'eau. En cas de danger, elles peuvent nager pour se réfugier au fond des gîtes de ponte. L'étape suivante est la transformation de l'asticot en pupe ou nymphe. La pupe ne vit que pour se transformer en adulte et durant cette phase, aucune alimentation n'a lieu. Elle peut, comme la larve, se déplacer au fond de l'eau. Enfin, les adultes sortent au grand air en se libérant de leur enveloppe à la surface de l'eau. Ces adultes vivent de quatre à dix semaines et leur rayon d'action peut s'étendre sur plusieurs kilomètres.

Pour décrire la dynamique de ce moustique, nous allons utiliser un modèle structuré par classes qui reprend les différents stades d'évolution du cycle de vie biologique du moustique. En effet, on distinguera trois phases : la phase embryonnaire (E), la phase larvaire (L), qui regroupe les états de larve et de nymphe car leurs modes de fonctionnement sont similaires et la phase adulte (A), dans laquelle on considère uniquement les femelles qui contrairement aux mâles sont hématophages.

On suppose par ailleurs que le nombre d'œufs pondus est proportionnel au nombre de femelles présentes. On obtient alors le premier modèle,

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = bA(t) - sE(t) - dE(t) \\ \frac{dL}{dt} = sE(t) - s_L L(t) - d_L L(t) \\ \frac{dA}{dt} = s_L L(t) - d_A A(t) \end{cases} \quad (1)$$





**Fig. 1.** Modèle structuré par classe où  $b$  représente le taux de ponte;  $d$ ,  $d_L$ ,  $d_A$  correspondent respectivement aux taux de mortalité naturelle des œufs, des larves et des adultes, et  $s$  et  $s_L$  les taux de transfert des œufs et des larves.

Le système (1) est un système d'équations différentielles ordinaires linéaires pour lequel les solutions exactes sont évidentes et qui ne décrit que les phénomènes d'extinction et d'explosion des différentes classes de la population. Dans ce modèle, il n'est pas tenu compte de la capacité qu'offre le milieu en terme de surface, qui est souvent un paramètre important. Pour cette raison, nous proposons le modèle ci-dessous, dans lequel on suppose qu'une trop forte concentration d'œufs dans la zone étudiée influence la ponte de nouveaux œufs. Plus précisément, on observe, dans les gîtes de ponte très peuplés en œufs, deux types de comportement. Soit les femelles vont plus loin pour pondre, soit elles déposent moins d'œufs dans cette région. Pour traduire ce phénomène, on introduit un terme non-linéaire relatif à la régulation des populations d'œufs et de larves. On obtient alors le modèle suivant,

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = b \left(1 - \frac{E(t)}{K_E}\right) A(t) - sE(t) - dE(t) \\ \frac{dL}{dt} = s \left(1 - \frac{L(t)}{K_L}\right) E(t) - s_L L(t) - d_L L(t) \\ \frac{dA}{dt} = s_L L(t) - d_A A(t) \end{cases} \quad (2)$$

défini sur,

$$\Delta = \left\{ (E, L, A) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq E \leq K_E, 0 \leq L \leq K_L, 0 \leq A \leq \frac{s_L}{d_A} K_L \right\}$$

## 2.2 Résultats de stabilité

Posons,  $r = \frac{b}{s+d} \frac{s}{s_L} \frac{s_L}{d_A}$ . On démontre aisément que,

- si  $r \leq 1$ , le système (2) possède le point d'équilibre trivial  $N_0^* = (0, 0, 0)$ ,
- Si  $r > 1$ , le système possède deux points d'équilibre  $N_0^*$  et  $N^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{K_E}{\gamma_E}, \frac{K_L}{\gamma_L}, \frac{s_L}{d_A} \frac{K_L}{\gamma_L}\right)$   
avec  $\gamma_E = 1 + \frac{(s+d)d_A K_E}{b s_L K_L}$  et  $\gamma_L = 1 + \frac{(s_L + d_L) K_L}{s K_E}$ .

**Théorème 1** Si  $r \leq 1$ , le point  $N_0^*$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable sur  $\Delta$ .

*Démonstration.* voir [9]

**Théorème 2** Si  $r > 1$ , le point  $N^*$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable sur  $\Delta$ .

*Démonstration.* voir [9]

### 3 Transmission du virus à la population humaine

Plusieurs modèles ont été proposés pour modéliser la transmission de la Dengue, voir par exemple [4,5,6], ce qui n'est pas le cas pour le chikungunya. Le chikungunya, comme la Fièvre Jaune ou la Dengue, est un arbovirus. Ce virus a besoin d'un vecteur pour se propager dans la population. Sur l'île de la Réunion, le virus est véhiculé par l'Aedes Albopictus dont la modélisation est proposée dans le paragraphe précédent. Le virus se transmet de la manière suivante : un moustique contracte la maladie en piquant un homme préalablement infecté. Ensuite il transmet le virus en piquant des hommes "susceptibles". On suppose dans la suite que la dynamique de population du moustique est décrite par (2). On suppose que la dynamique de population humaine est décrite par un modèle de type Malthus [10]. Cette hypothèse reste valable si on étudie la propagation du virus sur une courte période. En notant  $N_H(t)$  la taille de la population humaine à l'instant  $t$ ,  $b_H$  et  $d_H$  les taux de natalité et de mortalité, on a,

$$\frac{dN_H}{dt}(t) = (b_H - d_H)N_H(t).$$

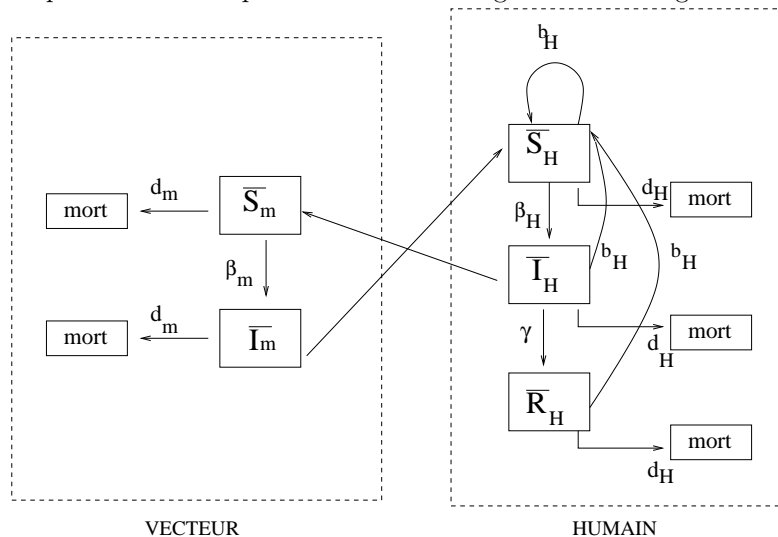
Les moustiques une fois infectés le restent jusqu'à la fin de leur vie, ce qui est pris en compte dans ce modèle. À l'inverse, les hommes deviennent immunisés après avoir guéri de la maladie. On utilisera donc un modèle de type *SI* pour décrire la population de moustiques femelles et un autre de type *SIR*, voir par exemple [10], pour décrire la population humaine. La population de moustiques femelles se décompose alors en deux catégories : les moustiques sains qui sont donc susceptibles de porter le virus ( $\bar{S}_m$ ) et les moustiques infectés porteurs du virus ( $\bar{I}_m$ ). On a donc,

$$A = \bar{S}_m + \bar{I}_m.$$

La population humaine se décompose en trois catégories : celles des individus sains et donc susceptibles d'être infectés ( $\bar{S}_H$ ), celle des individus infectés ( $\bar{I}_H$ ) et celle des individus immunisés ( $\bar{R}_H$ )

$$\bar{N}_H = \bar{S}_H + \bar{I}_H + \bar{R}_H.$$

Les variations de chaque classe sont représentées dans le diagramme de la figure 2.



**Fig. 2.** Diagramme de transmission du virus où  $\beta_m$  représente le nombre de piqûres transmettant le virus au moustique,  $\beta_H$ , le nombre de piqûres transmettant le virus à l'homme,  $b_H$ , le taux de natalité et  $d_H$ ,  $d_m$ , taux de mortalité.

Le flux de passage de la classe *susceptible* à la classe *infectée*, pour chaque espèce, dépend du nombre de piqûres par moustique, de la probabilité de transmettre l'infection et du nombre d'infectés et de susceptibles de chaque espèce. La probabilité de transmission du virus est la probabilité qu'une piqûre

infectieuse produise un nouveau cas chez un membre susceptible de l'autre espèce. On suppose aussi qu'il n'y a pas de transmission verticale comme c'est probablement le cas dans la réalité. On obtient alors le système suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}'_H(t) = b_H(\bar{S}_H(t) + \bar{I}_H(t) + \bar{R}_H(t)) - \beta_H \frac{\bar{I}_m(t)}{A(t)} \bar{S}_H(t) - d_H \bar{S}_H(t) \\ \bar{I}'_H(t) = \beta_H \frac{\bar{I}_m(t)}{A(t)} \bar{S}_H(t) - \gamma \bar{I}_H(t) - d_H \bar{I}_H(t) \\ \bar{R}'_H(t) = \gamma \bar{I}_H(t) - d_H \bar{R}_H(t) \\ \bar{S}'_m(t) = s_L L(t) - d_m \bar{S}_m(t) - \beta_m \frac{\bar{I}_H(t)}{N_H(t)} \bar{S}_m(t) \\ \bar{I}'_m(t) = \beta_m \frac{\bar{I}_H(t)}{N_H(t)} \bar{S}_m(t) - d_m \bar{I}_m(t) \end{array} \right. \quad (3)$$

Considérons les proportions,

$$S_H = \bar{S}_H/N_H, I_H = \bar{I}_H/N_H, R_H = \bar{R}_H/N_H, S_m = \bar{S}_m/A, I_m = \bar{I}_m/A$$

et l'égalité  $S_H + I_H + R_H = 1$ . Alors le système (3) peut se réécrire comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{l} E'(t) = bA(t) \left(1 - \frac{E(t)}{K_E}\right) - sE(t) - dE(t) \\ L'(t) = sE(t) \left(1 - \frac{L(t)}{K_L}\right) - s_L L(t) - d_L L(t) \\ A'(t) = s_L L(t) - d_m A(t) \\ S'_H(t) = -(b_H + \beta_H I_m(t)) S_H(t) + b_H \\ I'_H(t) = \beta_H I_m(t) S_H(t) - (\gamma + b_H) I_H(t) \\ I'_m(t) = -\left(s_L \frac{L(t)}{A(t)} + \beta_m I_H(t)\right) I_m(t) + \beta_m I_H(t) \end{array} \right. \quad (4)$$

défini sur  $\Delta \times \Omega$  où

$$\Omega = \{(S_H, I_H, I_m) \in (\mathbb{R}_+)^3 : 0 \leq S_H + I_H \leq 1, 0 \leq I_m \leq 1\}.$$

Les résultats sur la stabilité des équilibres sont donnés dans [9].

## 4 Conclusion

Le virus du chikungunya circule toujours dans différents pays du monde, notamment en Inde et en Indonésie. Malheureusement, il n'existe à ce jour pas de thérapie spécifique contre ce virus, ni de vaccin ou de traitement préventif contre cette maladie. Néanmoins, les modèles mathématiques qui ont été développés dans ce travail peuvent contribuer à une meilleure compréhension de la dynamique de population des moustiques. L'étude théorique de ces modèles permet de déterminer des facteurs déterminant de la prolifération des moustiques. Cela constitue un premier pas vers l'évaluation et la prévision des risques. Ces modèles pourront également servir à l'étude de stratégies de contrôle écologique.

## Références

1. L.E. CAMPOS, A. SAN JUAN, L.C. CENABRE & E.F. ALMAGRO, Isolation of chikungunya virus in the Philippines, *Acta Med. Philippina*, **5**, 152, (1969).
2. C. CHASTEL, Infections humaines au Cambodge par le virus chikungunya ou un agent étroitement apparenté — II Anatomie pathologique expérimentale, *Bulletin de la Société de Pathologies Exotiques*, **56**, 915, (1963).
3. S.R. CHRISTOPHER, *Aedes aegypti*, *The Yellow fever mosquito. Its Life History*, Bionomics and Structure, Cambridge University Press (1960).
4. M. DEROUICH, A. BOUTAYEB & E.H. TWIZELL, A model of Dengue fever, *BioMed. Eng. Online* **2** (2003).
5. L. ESTEVA & C. VARGAS, Analysis of a Dengue disease transmission model, *Mathematical Biosciences*, **150**, 131-151 (1998).
6. L. ESTEVA & C. VARGAS, A model for Dengue disease transmission model, *Journal of Mathematical Biology*, **38**, 220, (1999).
7. W.H HAWLEY, The Biology of *Aedes Albopictus*, *J. Am. Mosquito Control Assoc.*, **4**, 1, (1988).
8. J.M. MEDLOCK, D. AVENELL, I. BARRASS & S. LEACH, Analysis of the potential for survival and seasonal activity of *Aedes albopictus* (Diptera : Culicidae) in the United Kingdom, *J. Vector Ecol.*, **31** (2006).
9. D. MOULAY, M. CADIVEL & M. A. AZIZ ALAOU, A model for the Chikungunya virus, *en préparation* (2009).
10. J.D. MURAY, *Mathematical Biology*, Springer, (1993).

# Chaos généré par une non linéarité 2D et une dynamique à retard

Mourad Nourine, Michael Peil, & Laurent Larger

Département d'Optique, Institut FEMTO-ST, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 25030  
Besançon Cedex, France.

[mourad.nourine@univ-fcomte.fr](mailto:mourad.nourine@univ-fcomte.fr)

**Résumé.** Nous présentons dans cet article une nouvelle architecture optoélectronique pour la génération de chaos en intensité. Le principe s'appuie sur une dynamique électro-optique non linéaire à retard, dont la non linéarité est construite grâce à un interféromètre à 4 onde réalisé en optique intégrée, et disposant de 2 électrodes de modulation indépendantes. Le montage permet de disposer d'une part, d'une dynamique ultra-rapide jusqu'à des fréquences de plusieurs GHz, et d'autre part, de générer un chaos de grande dimension destiné au cryptage physique de données optiques. Au travers d'une étude numérique et expérimentale, nous avons cherché à analyser certains des nombreux comportements dynamiques que peut présenter cet oscillateur, en fonction de divers paramètres physiques du montage : régimes de point fixes stables, périodiques, et chaotiques. La mise en œuvre du montage expérimental a permis de valider le modèle théorique adopté pour les simulations.

**Abstract.** We present a new optoelectronic architecture intended for chaotic optical intensity generation. The principle relies on an electro-optic non-linear delay dynamics, which non linearity is performed by a 4-waves integrated optics interferometer involving 2 independent electro-optic modulation inputs. The setup allows both to have an ultra-fast dynamics up to several GHz frequencies, and potentially high dimensional chaos intended for encryption of optical data at the physical layer. We have built a mathematical model of the system and analyzed a number of its possible solutions : stable steady states, periodic and chaotic regimes. The experimental observations allowed to validate the dynamical model, through good qualitative agreements with the numerical simulations.

## 1 Introduction

Les communications sécurisées par chaos ont permis le développement de nombreux systèmes dynamiques optiques produisant des comportements chaotiques complexes [1]. La plupart de ces réalisations utilisent une classe particulière de comportements chaotiques, celle des dynamiques non linéaires à retard [2]. Ces dynamiques temporelles possèdent la particularité étrange d'évoluer dans un espace des phase de dimension infinie, dans lequel des comportements chaotiques de grande complexité peuvent être observés [3]. L'oscillateur électro-optique que nous allons présenter fait partie de cette catégorie, et le chaos est observée sur la variable intensité optique.

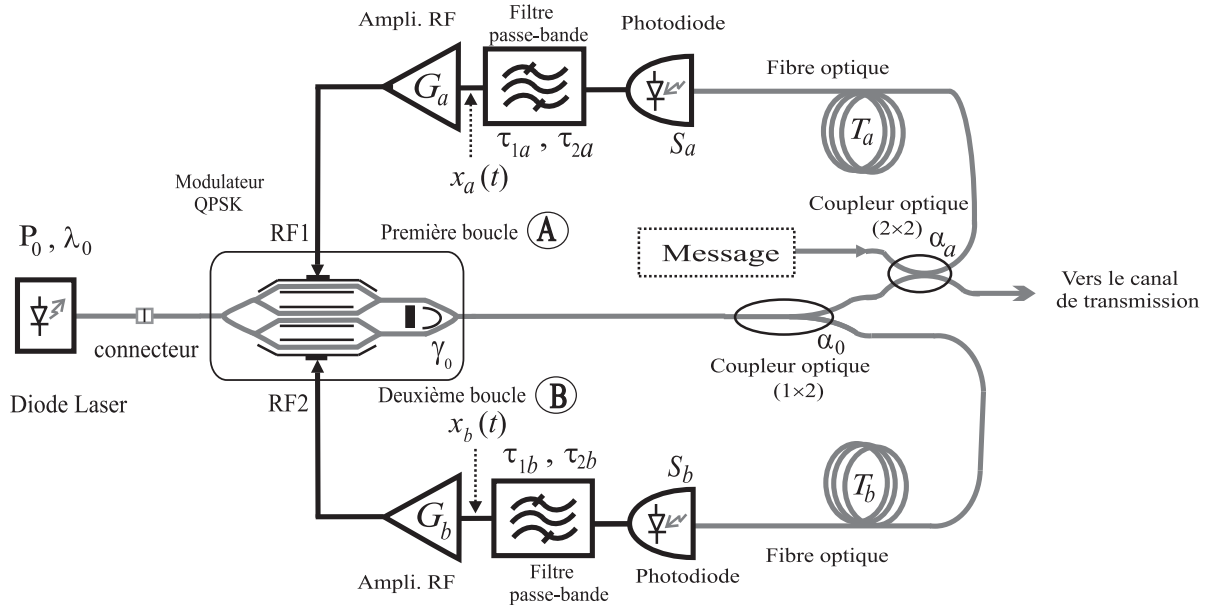
Tout d'abord, le dispositif expérimental sera décrit, ce qui permettra d'en établir un modèle théorique sous forme d'un système de deux équations différentielles couplées du second ordre, non linéaires, et à retards multiples. Ce modèle sera par la suite utilisé pour effectuer des simulations numériques. Ensuite, nous présenterons et comparerons les résultats obtenus par des mesures expérimentales et ceux obtenus numériquement. Enfin, nous conclurons en décrivant le système cryptographique complet, qui doit à terme utiliser ce générateur de chaos comme dispositif émetteur d'un côté, et comme récepteur / décodeur de l'autre côté.

## 2 Générateur de chaos à modulateur QPSK

### 2.1 Description et principe de fonctionnement

Le dispositif expérimental de l'oscillateur chaotique est illustré sur la figure 1. Le générateur est formé par 2 boucles de contre-réaction reliées à un modulateur QPSK (Quadrature Phase Shift Keying). Ce

modulateur électro-optique est particulier par son architecture. Il appartient à la famille des modulateurs Mach-Zehnder (MZ) à 4 bras, et il est intégré sur Niobate de Lithium ( $\text{LiNbO}_3$ ). Cet élément clé est un composant commercial récent, originellement destiné à des nouveaux formats de modulation numérique pour les télécommunications optiques [4]. Il permet pratiquement dans notre cas la réalisation d'une fonction non linéaire bidimensionnelle.



**Fig. 1.** Schéma du dispositif expérimental d'un générateur de chaos à modulateur QPSK.

Le reste du générateur de chaos est plus classique. Il est constitué (de gauche à droite) par les composants suivants :

- une diode laser monomode reliée à une fibre optique à maintien de polarisation ; sa longueur d'émission est celle habituellement utilisée dans les télécommunications optiques ( $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$ ).
- le modulateur électro-optique QPSK déjà évoqué. Il a la particularité d'avoir 2 entrées RF indépendantes et 3 tensions de polarisation indépendantes. Ce composant représente le cœur du système, sa fonction de transfert de modulation réalisant la fonction non linéaire du générateur de chaos.
- le système présente aussi l'originalité d'avoir 2 boucles de contre-réactions électro-optiques non linéaires, impliquant chacune un élément retardant, une photodiode de conversion optique / électrique, un filtre électronique large bande responsable des termes différentiels de la loi, et un élément amplificateur.

**1. La première boucle** est réalisée par la mise en série des éléments suivants :

- un coupleur optique (2 entrées / 2 sorties) permettant d'insérer le message utile par l'une de ces entrées, et d'envoyer le mélange (chaos + message) d'une part vers la première contre-réaction, et d'autre part vers la canal de transmission.
- une fibre optique réalisant un retard temporel pur, et constituant un paramètre physique « clé » de la première boucle de contre-réaction (La valeur très précise de ce retard est nécessaire pour l'opération de synchronisation / décodage).
- une photodiode permettant de convertir la puissance optique en un signal électrique.
- un filtre passe bande limitant la bande passante du signal chaotique électrique.
- un amplificateur électronique réglable pour ajuster le gain de boucle de la contre-réaction.

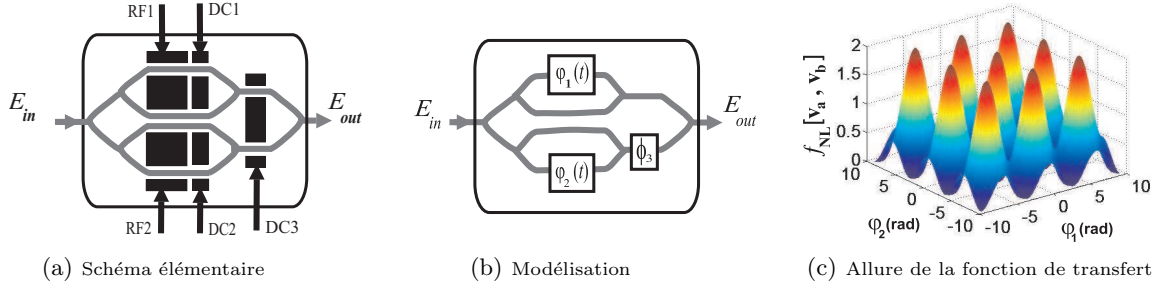
**2. La deuxième boucle** de rétroaction est réalisée par des éléments semblables à ceux utilisés dans la première boucle, à l'exception du coupleur optique à (2 entrées / 2 sorties) qui ne fait plus partie de cette seconde boucle de contre-réaction.

Le processus dynamique réalisé par cet oscillateur en double boucle fermée peut être décrit de la manière suivante : une diode laser fibrée alimente optiquement le modulateur QPSK. Le faisceau lumi-

neux traversant le modulateur QPSK subit à la sortie une variation d'intensité non linéaire par rapport à chacune des deux tensions appliquées aux électrodes de commandes RF1 et RF2 du modulateur. Le coupleur (1 entrée/2 sorties) divise ensuite cette intensité optique en deux quantités égales. Les signaux issus des sorties de ce coupleur sont ensuite retardés différemment dans chaque boucle par une certaine longueur de fibre optique (quelques centimètre à quelques mètres), puis ils sont détectés par des photodiodes. Les signaux électriques obtenus sont filtrés, puis amplifiés pour y être réinjectés sur les électrodes de modulation RF du QPSK. La présence du coupleur optique (2 entrées / 2 sorties) dans la première boucle ne sert qu'à mélanger le message informatif avec la modulation chaotique de l'intensité.

## 2.2 Modélisation de la fonction non linéaire

La figure 2.a schématise la configuration du modulateur QPSK utilisé pour la réalisation de la fonction non linéaire bidimensionnelle, notée par :  $f_{NL}[v_a, v_b]$ . Cette dernière est représentée par la fonction de transfert du modulateur. L'expression de l'intensité optique, qui représente la variable de sortie du modulateur QPSK, est fonction des tensions appliquées sur ces électrodes RF ( $v_a$  sur RF1 et  $v_b$  sur RF2) ainsi que de trois tensions continues (DC1, DC2 et DC3) qui permettent d'ajuster des points de repos de la condition d'interférence à onde multiple.



**Fig. 2.** La fonction non linéaire réalisée par le modulateur QPSK.

L'expression analytique de la fonction de transfert du modulateur QPSK peut s'établir de la manière suivante :

- Sur l'électrode  $DC_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) est appliquée une tension continue  $V_{DC_m}$ . Un déphasage  $\phi_m$  est introduit sur l'onde optique qui se propage le long de la branche soumise à la tension  $V_{DC_m}$  (comme illustré sur la figure 2.b). L'expression de ce déphasage est donnée par :

$$\phi_m = \pi \cdot \frac{V_{DC_m}}{V_{\pi DC_m}} \quad (1)$$

où  $V_{\pi DC_m}$  est la tension demi-onde, qui permet de réaliser un déphasage de  $\pi$ .

- Sur les électrodes  $RF_{1,2}$  sont appliquées respectivement 2 tensions variables  $v_{a,b}(t)$ . Ces dernières sont des tensions de modulation, et elles introduisent des déphasages variables  $\varphi_{1,2}(t)$ . Les expressions de ces déphasages sont données par :

$$\varphi_{1,2}(t) = \pi \cdot \frac{v_{a,b}(t)}{V_{\pi RF_{1,2}}} + \phi_{1,2} \quad (2)$$

où  $V_{\pi RF_{1,2}}$  sont des tensions demi-ondes, qui permettent de réaliser en régimes dynamiques un déphasage de  $\pi$  respectivement dans les interféromètres de Mach-Zehnder  $MZ_1$  et  $MZ_2$ .

L'expression de l'intensité optique  $I_{out}(t)$  à la sortie du modulateur QPSK est obtenue par le calcul de la moyenne (sur un temps défini par le temps de réponse électronique) du module au carré du champ électrique résultant  $E_{out}(t)$  :

$$I_{out}(t) = \langle |E_{out}(t)|^2 \rangle = f_{NL}[v_a, v_b](t) \quad (3)$$

En imposant un champ en entrée du modulateur sous la forme  $E_{in}(t) = \sqrt{P_0} \cdot \exp(i\omega_0 t)$  ( $P_0$  est la puissance optique à l'entrée du QPSK,  $\omega_0 = 2\pi \cdot c / \lambda_0$  est la fréquence angulaire de la source laser, et  $c$  est la vitesse de la lumière), le champ électrique  $E_{out}(t)$  en sortie du modulateur QPSK est donné par :

$$E_{out}(t) = \frac{\sqrt{P_0}}{2} \cdot \left[ 1 + \exp(i\varphi_1(t)) + \left[ 1 + \exp(i\varphi_2(t)) \right] \cdot \exp(i\phi_3) \right] \cdot \exp(i\omega_0 t) \quad (4)$$

Il vient finalement pour la fonction de modulation non linéaire bidimensionnelle :

$$f_{NL}[v_a, v_b](t) = \frac{P_0}{2} \left\{ \cos(\psi_3) \cdot \left[ \cos(\psi_3) + 2 \cdot \cos(\psi_1 + \psi_2) \cdot \cos(\psi_2 + \psi_3 - \psi_1) \right] + \cos^2(\psi_2 + \psi_3 - \psi_1) \right\} \quad (5)$$

avec :

$$\psi_1 = \frac{\varphi_1(t)}{2}; \quad \psi_2 = \frac{\varphi_2(t)}{2}; \quad \psi_3 = \frac{\phi_3}{2};$$

Une condition suffisante sur la non linéarité pour obtenir une dynamique chaotique est de présenter un extrémum dans l'intervalle de variation des variables d'entrées. Cette condition est suffisamment vérifiée par  $f_{NL}[v_a, v_b]$ , donnée par la relation (5), comme le montre un exemple de son allure sur la figure 2.c (les paramètres utilisés pour tracer cette figure sont donnés au tableau 1).

### 3 Modélisation du système

Le processus différentiel se modélise à partir de la fonction de transfert du filtre passe-bande de la branche électronique de l'oscillateur. Comme l'oscillateur est formé par 2 boucles de contre-réactions contenant 2 filtres passe-bande différents, nous adoptons pour désigner les paramètres de chaque boucle les notations suivantes : tous les paramètres de la boucle (A) seront indexés par la lettre « a », et tous les paramètres de la boucle (B) seront indexés par la lettre « b ». Ainsi, la dynamique globale est modélisée par 2 équations différentielles du second ordre à retard (système d'EDR), dont leurs expressions sont données par :

$$x_i(t) + [\tau_{1i} + \tau_{2i}] \frac{dx_i}{dt}(t) + \tau_{1i} \cdot \tau_{2i} \frac{d^2x_i}{dt^2}(t) = \beta_i \cdot \frac{d}{dt} \left[ f_{NL}[x_a, x_b](t - T_i) \right] \quad (6)$$

où ( $i = a, b$ ) selon la boucle concernée, et  $x_i(t) = v_i(t) / (2 \cdot V_{\pi R F i})$  représentent les variables normalisées où  $v_i(t)$ .  $\tau_{1i}$  et  $\tau_{2i}$  sont les constantes de temps caractéristiques du profil des filtres électroniques, elles sont reliées directement aux fréquences de coupures  $f_{c1i}$  et  $f_{c2i}$  haute et basse du filtre.  $\beta_i = (\pi \cdot P_0 \cdot \gamma_0 \cdot G_i \cdot S_i \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_i) / (2 \cdot V_{\pi R F i})$  est le gain global normalisé de la boucle de rétroaction, avec :  $\gamma_0$  le coefficient des pertes optiques du modulateur QPSK ;  $G_i$  le gain de l'amplificateur ;  $S_i$  la sensibilité du photodétecteur ;  $\alpha_0$  le coefficient de couplage du coupleur optique ( $1 \times 2$ ).  $\alpha_i$  est le coefficient de couplage du coupleur optique ( $2 \times 2$ ) (qui n'apparaît pas pour la boucle (B)).

### 4 Résultats numériques et expérimentaux

Les simulations ont été effectuées en intégrant le modèle donné par (6) par la méthode du prédicteur-correcteur. Un outil important dans la compréhension de la route vers le chaos est le diagramme de bifurcation, qui permet de voir rapidement l'ensemble des régimes dynamiques obtenus pour différentes valeurs du paramètre de bifurcation. Ce dernier correspond dans notre cas au gain normalisé  $\beta_a$  de la contre-réaction de la boucle (A).

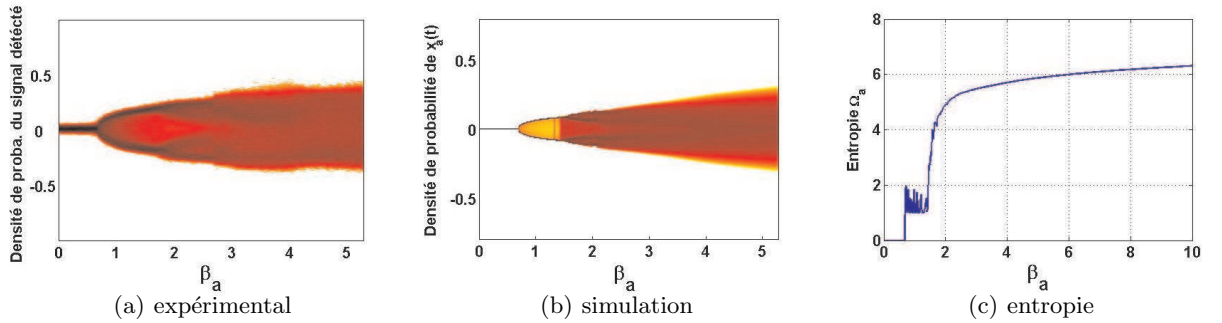
Sur les figures 3.a et 3.b, nous avons représenté les diagrammes de bifurcation obtenus expérimentalement et par simulation numérique. Afin de faciliter la comparaison expérience / simulation, le mode de représentation correspond à l'évolution, en fonction d'un gain de boucle, de la densité de probabilité de la variable normalisée  $x_a$  (résultat du filtrage passe-bande de  $f_{NL}[x_a, x_b]$ , dans la boucle (A)).



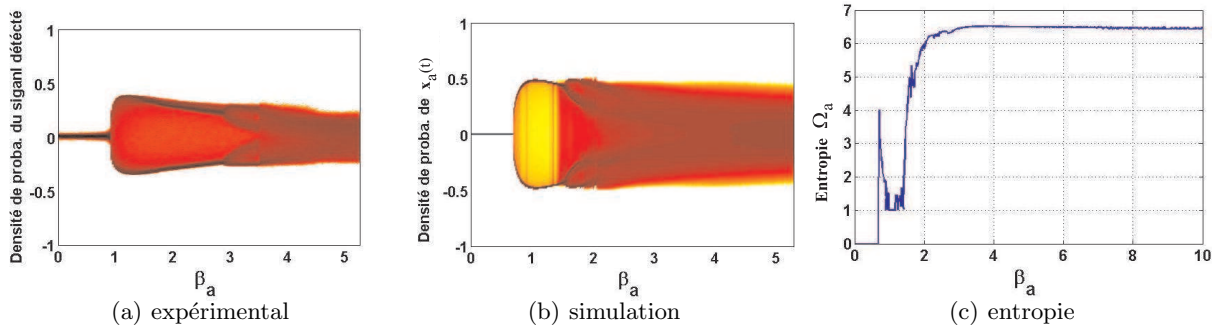
Des premiers diagrammes ont été effectués dans le cas d'une seule boucle de rétroaction, cas qui peut servir de référence puisqu'il est déjà étudié dans la littérature [5]. Le système en une seule boucle signifie que physiquement, une boucle est laissée ouverte, et théoriquement, il se traduit par un gain nul ( $\beta_b = 0$ ). On remarque sur ces diagrammes l'évolution typique de la dynamique du système jusqu'au chaos selon une route du type cascade par dédoublements. Les dynamiques chaotiques obtenues se traduisent par une entropie élevée, et une densité de probabilité diffuse, et de profil quasi-Gaussien.

**Tab.1.** Paramètres expérimentaux du générateur de chaos à modulateur QPSK.

Boucle (A)			Boucle (B)		
symbole	valeur	unité	symbole	valeur	unité
$T_a$	61	ns	$T_b$	60	ns
$f_{c1a}$	13	GHz	$f_{c1b}$	13	GHz
$f_{c2a}$	50	kHz	$f_{c2b}$	30	kHz
$\tau_{1a} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{c1a}}$	12,2	ps	$\tau_{1b} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{c1b}}$	12,2	ps
$\tau_{2a} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{c2a}}$	3,18	$\mu s$	$\tau_{2b} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{c2b}}$	5,30	$\mu s$
Paramètres de la non linéarité					
$V_{\pi RF1}$	5,84	V	$V_{\pi RF2}$	6,08	V
$V_{\pi DC1}$	7,40	V	$\phi_1$	2,9	rad
$V_{\pi DC2}$	7,14	V	$\phi_2$	1,3	rad
$V_{\pi DC3}$	14,24	V	$\phi_3$	-0,1	rad



**Fig. 3.** Diagrammes de bifurcation et entropique du système en une seule boucle de rétroaction ( $\beta_b = 0$ ).



**Fig. 4.** Diagrammes de bifurcation et entropique du système en doubles boucles de rétroaction ( $\beta_b = 0, 1$ ).

Les diagrammes de bifurcation du système en double boucle sont donnés sur les figures 4.a et 4.b. On remarque sur le diagramme de bifurcation expérimental (figure 4.a) les différents régimes dynamiques (régimes points fixes stables, régimes périodiques et chaotiques). Le diagramme obtenu par simulation reproduit le résultat expérimental avec une très bonne ressemblance (figure 4.b).

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle architecture de générateur de chaos en intensité, basé sur une dynamique non linéaire à retard. Le dispositif expérimental est réalisé par des composants électro-optiques, dont le cœur du système est un modulateur QPSK. Ce modulateur permet de relier 2 boucles de rétroactions, et d'introduire une non linéarité en 2 dimension. Cette architecture du générateur nous permet de disposer d'un nombre important de paramètres physiques (clés de codages) pour réaliser des communications sécurisées au niveau physique à haut débits.

Nous avons modélisé le système par un système d'équations différentielles du second ordre à retard. La comparaison des résultats de l'intégration de ce système par la méthode prédicteur-correcteur aux résultats expérimentaux, nous a permis de valider le modèle théorique proposé. Dans les simulations, nous avons pris soin de choisir un pas d'échantillonnage constant ( $h = 1$  ps) assez petit devant la plus petite constante de temps du système ( $\tau_{1a} = \tau_{1b} = 12,2$  ps). Nous avons choisi aussi pour la réalisation du générateur, des retards temporels très grand devant la plus petite constante de temps afin de garantir la génération d'un hyperchaos ( $T_b/\tau_{1b} \approx 5000 \gg 1$ ), et d'optimiser par conséquent la confidentialité des transmissions.

Le travail va désormais se poursuivre sur la réalisation du système global de cryptographie par chaos, dont les premiers résultats numériques sont déjà obtenus en modulant chaotiquement une information binaire à plus de 3 Gbit/s. La restitution du message au niveau du récepteur est basée sur le principe de la synchronisation de chaos, initialement introduit par Pecora et Carroll [6].

## Références

1. J. P. GOEDGEBUER, L. LARGER & H. PORTE, Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback laser diode, *Physics Review Letters*, **80** (10), 2249-2252 (1998).
2. K. IKEDA, Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system, *Optics Communications*, **30** (2), 257-261 (1979).
3. J. D. FARMER, Chaotic attractors of infinite-dimensional dynamical system, *Physica D*, **4**, 366-393 (1982).
4. R. NOE, U. RÜCKERT, Y.T. ACHIAM & H. PORTE, European "synQPSK" Project : Toward Synchronous Optical Quadrature Phase Shift Keying with DFB Lasers, *OSA, Amplifiers and Their Applications/COTA*, pp. CThC4 (2006).
5. L. LARGER, J. P. GOEDGEBUER & V. UDALTSOV, Ikeda-based nonlinear delayed dynamics for application to secure optical transmission systems using chaos, *C. R. Physique*, **5**, 669-681 (2004).
6. L. M. PECORA & T. L. CARROLL, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64** (8), 821-824 (1990).

# Les singularités du chaos : plis et fronces dans des systèmes couplés simples

Jérémy Oden, Serge Bielawski, & Marc Lefranc

Laboratoire PhLAM, UMR CNRS 8523, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.  
[marc.lefranc@univ-lille1.fr](mailto:marc.lefranc@univ-lille1.fr)

**Résumé.** Une dynamique chaotique étire l'espace des états dans certaines directions tout en le repliant sur lui-même, ce qui rend non inversible la dynamique asymptotique. On peut donc la caractériser en termes de singularités, telles que par exemple le point critique de la suite logistique (qui replie l'intervalle sur lui-même). Dans les systèmes hyperchaotiques avec deux directions instables, ces singularités sont de manière générique des fronces, qui résultent de la rencontre de lignes de pli. Nous illustrons ici cette idée importante dans un cas simple, celui de deux systèmes chaotiques faiblement couplés.

**Abstract.** A chaotic dynamics stretches state space in some directions while folding it over itself, which makes the asymptotic dynamics non invertible. Thus it can be characterized in terms of singularities, of which the critical point of the logistic map (which folds an interval onto itself) is an example. In hyperchaotic systems with two unstable directions, these singularities are generically cusps, occurring where fold lines meet. We illustrate this important idea in the simple case where two chaotic systems are weakly coupled.

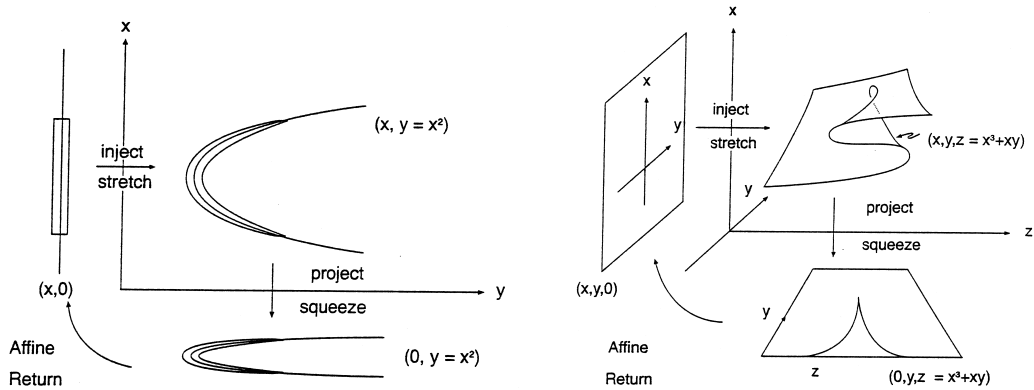
## 1 Introduction

Déterministe mais imprédictible, une dynamique chaotique s'explique par l'action conjointe dans l'espace des phases de deux mécanismes géométriques complémentaires : étirement et contraction, qui résulte le plus souvent d'un repliement [1,2]. L'étirement sépare inexorablement des trajectoires voisines suivant la direction instable, rendant l'évolution rapidement imprédictible, tandis que suivant la direction stable, la contraction rapproche des états initialement éloignés, maintenant ainsi la dynamique dans une région finie de l'espace des états.

La contraction fait que malgré l'instabilité de la dynamique, certaines orbites convergent l'une vers l'autre et deviennent indiscernables. Cela suggère que la dynamique asymptotique d'un système chaotique peut être caractérisée en termes de *singularités*, ou *catastrophes* [2], qui sont les outils mathématiques adaptés pour caractériser la non-inversibilité d'applications différentiables [3]. Cette idée devient naturelle et rigoureuse si on considère que le flot dans l'espace des phases induit une dynamique singulière dans la surface invariante qu'est une variété instable, en la repliant indéfiniment sur elle-même à chaque itération d'une application de premier retour dans une section de Poincaré (fig. 1) [2].

Lorsqu'un attracteur chaotique possède une seule direction instable, les singularités rencontrées sont alors du type le plus simple, le *pli*. C'est cette singularité qui est à l'origine du comportement chaotique d'applications d'un intervalle dans lui-même, telles que la célèbre suite logistique. Dans le cas des systèmes hyperchaotiques, qui présentent deux directions instables, il faut alors considérer les applications singulières d'une surface dans elle-même [2]. On montre mathématiquement que de manière générique, on observe alors des singularités d'ordre supérieur, à savoir des *fronces*, localisées au point de rencontre de lignes de pli [3].

Afin d'illustrer de manière simple la présence de singularités fronces dans des systèmes hyperchaotiques, nous nous sommes intéressés à des systèmes obtenus en couplant faiblement deux systèmes fortement dissipatifs à une seule direction instable, dont la dynamique est bien décrite par une application d'un intervalle dans lui-même. En deça de la synchronisation, on garde deux directions instables et il est facile de construire un plan de section constituant une bonne approximation de la variété instable. On met alors aisément en évidence la présence de singularités fronces dans la dynamique.



**Fig. 1.** Lorsqu'un système possède une seule direction stable, l'intersection de la variété instable d'un ensemble invariant (attracteur, point fixe ou orbite périodique) avec une section de Poincaré est une hypersurface de cette section. Considérons une série de sections de Poincaré qui découpent l'attracteur en tranches. Au fur et à mesure que l'on passe de section en section en suivant les trajectoires, la variété instable se déforme et se déplace dans la section avant de revenir sur sa position de départ, repliée sur elle-même pour compenser l'étirement. (a) Dans le cas d'une seule direction instable, la variété instable est une courbe à une dimension qui se déplace dans le plan, est étirée, repliée et réinjectée sur elle-même. Cela crée génériquement des singularités de type *pli*. (b) Quand il y a deux directions instables, la variété instable est une surface à deux dimensions qui évolue dans un espace à trois dimensions, est étirée, repliée et réinjectée sur elle-même. Cela crée de manière générique des singularités de type *fronce*, qui se situent au point de rencontre de deux lignes de pli (d'après Gilmore et Lefranc [2]).

Nous nous intéresserons tout d'abord au couplage de deux suites logistiques, associées chacune à une singularité de type pli. Nous montrerons analytiquement que de manière remarquable, le double pli laisse la place à une fronce pour un couplage arbitrairement petit, ce qui illustre la stabilité structurelle de cette dernière singularité dans un système hyperchaotique. Afin de démontrer la pertinence expérimentale de ce phénomène, nous décrirons ensuite l'interaction de deux résonateurs à diode [4,5] reliés par une liaison capacitive extrêmement faible. Nous verrons qu'une section de Poincaré du système couplé met clairement en évidence une fronce semblable à celle observée pour la double suite logistique couplée. Enfin, nous mettrons encore une fois en évidence l'apparition de fronces dans des simulations numériques de deux systèmes de Rössler couplés. Ces résultats constituent une première étape vers une classification topologique des systèmes chaotiques en termes de singularités [2].

## 2 Couplage de deux suites logistiques

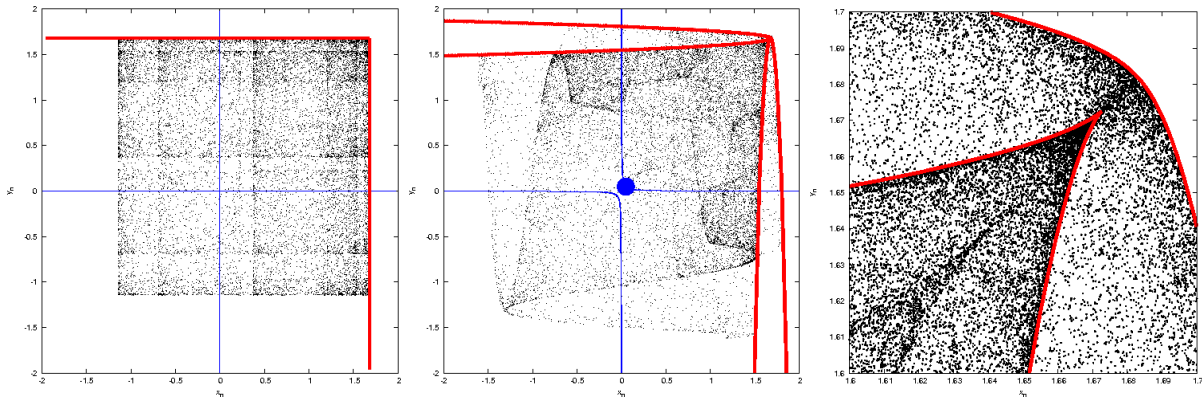
Nous considérons ici le système itératif dans le plan constitué de deux suites logistiques agissant suivant les directions  $x$  et  $y$ , couplées l'une à l'autre par un petit terme d'amplitude  $\epsilon$  :

$$x_{n+1} = a - x_n^2 - \epsilon y_n = f(x_n, y_n) \tag{1a}$$

$$y_{n+1} = a - y_n^2 - \epsilon x_n = g(x_n, y_n) \tag{1b}$$

Les figures 2a et 2b montrent les points du plan successivement visités par les itérations de (1), respectivement sans et avec couplage.

On sait le rôle que joue dans la dynamique de la suite logistique  $x_{n+1} = a - x_n^2$  le point critique où l'application  $x \rightarrow a - x^2$  est non inversible, c'est-à-dire le point singulier  $x = 0$  où  $\partial x_{n+1} / \partial x_n = 0$ . En particulier, une partition de l'intervalle en régions situées à gauche et à droite du point critique fournit un codage symbolique naturel de la dynamique [1,2]. En ce qui concerne l'application du plan dans le



**Fig. 2.** Itérations de (1) pour  $a = 1.68$  et (a)  $\epsilon = 0$ , (b),(c)  $\epsilon = 0.1$ . La figure (c) est un agrandissement de (b) centré autour de l'image de la fronce. Les lignes fines et bleues sont les lignes de singularités, les lignes épaisses et rouges sont leurs images. La fronce est située au point indiqué sur la ligne de pli supérieure de la figure (b), son image est le point de rebroussement visible en (b) et en (c).

plan définie par (1), elle perd son inversibilité aux points où s'annule le Jacobien

$$d = \det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2x_n & -\epsilon \\ -\epsilon & -2y_n \end{pmatrix} = 4x_n y_n - \epsilon^2 \quad (2)$$

L'ensemble des points singuliers où  $\det J = 0$  est appelé une ligne de pli. Une telle ligne sépare des points ayant même image par l'application (1). La structure topologique des lignes de pli est très différente selon que les suites sont couplées ou non. Quand  $\epsilon = 0$ , les points singuliers sont disposés selon les lignes  $x = 0$  et  $y = 0$  (correspondant aux singularités des deux suites logistiques isolées), qui se coupent à l'origine. Ces deux lignes divisent le plan en quatre régions [fig. 2(a)]. Lorsque la constante de couplage  $\epsilon$  est non nulle, on obtient deux lignes de plis paramétrées d'équation  $y = \epsilon^2/4x$ , qui n'ont maintenant aucune intersection et découpent donc le plan en trois régions [fig. 2(b)].

Ce changement brutal est dû à l'apparition quand  $\epsilon \neq 0$  d'une singularité d'ordre supérieur, une *fronce*. On détecte cette dernière à la présence d'un point de rebroussement sur l'image de la ligne de pli en haut à droite, clairement visible sur la figure 2(c), qui indique que la restriction de l'application (1) à la ligne de pli de droite est elle-même singulière. Cette singularité dans la singularité constitue la signature de la fronce.

Les singularités d'une application différentiable  $f : M \rightarrow N$  sont en effet organisées de manière hiérarchique [3]. L'espace  $M$  comporte typiquement un ensemble singulier de points où la différentielle  $df$  n'est pas de rang maximal. On considère alors la restriction de  $f$  à cet ensemble singulier, qui peut elle-même comporter des singularités d'ordre supérieur. Considérant alors la restriction à ces nouvelles singularités, on itère la construction jusqu'à ce qu'on se ramène à des singularités ponctuelles, de dimension 0, qui sont les singularités d'ordre le plus élevé du système. Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une application du plan dans le plan, qui présente typiquement des lignes de pli, où la différentielle est de rang 1 (le déterminant de la matrice Jacobienne est nul). De manière générique, les images de certaines lignes de pli se replient sur elle-mêmes, créant un point de rebroussement. Ce dernier est l'image d'un point singulier isolé situé sur la ligne de pli, un point fronce. Une fronce est une singularité générique pour les applications du plan dans le plan, et surtout *structurellement stable* : on ne peut la faire disparaître par une petite perturbation de l'application, de la même manière que l'existence d'un point de dérivée nulle pour une fonction de l'intervalle est robuste aux perturbations.

Techniquement, on localise la position du point fronce en exigeant que la différentielle de (1) soit nulle pour un déplacement le long de la ligne de pli  $y = \epsilon^2/4x$ . Cela revient à demander que le vecteur  $t = (x, -\epsilon^2/4x)$  tangent à cette dernière soit dans le noyau de la matrice Jacobienne donnée en (2),

évaluée sur la ligne de pli. On a donc l'équation :

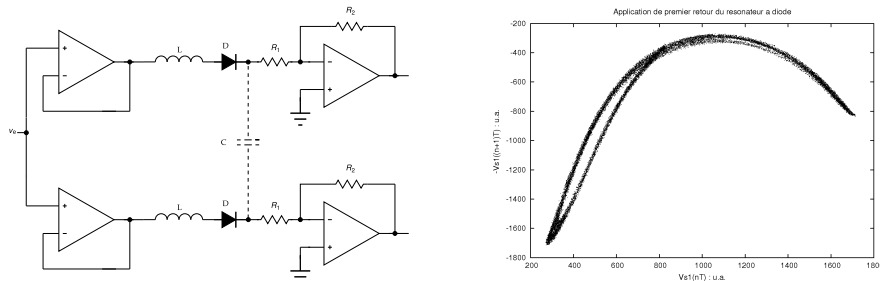
$$J.t = \begin{pmatrix} -2x & -\epsilon \\ -\epsilon & -\epsilon^2/2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\epsilon^2/4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

dont la solution est  $x = \epsilon/2$ , ce qui indique un point fronce localisé en  $(\epsilon/2, \epsilon/2)$ , et dont l'image est un point de rebroussement se trouvant en  $(a - 3\epsilon^2/4, a - 3\epsilon^2/4)$ .

Au delà de ces détails techniques, l'élément essentiel qu'il convient de retenir est que la singularité fronce est présente pour tout  $\epsilon$  non nul, et donc pour des couplages arbitrairement faibles. Cela est en parfait accord avec l'idée évoquée à la section 1 selon laquelle un système hyperchaotique à deux directions instables est associé à une application singulière du plan dans le plan (décrivant la dynamique dans l'espace instable), une telle application présentant génériquement des singularités de type fronce [3].

### 3 Résonateurs à diode couplés

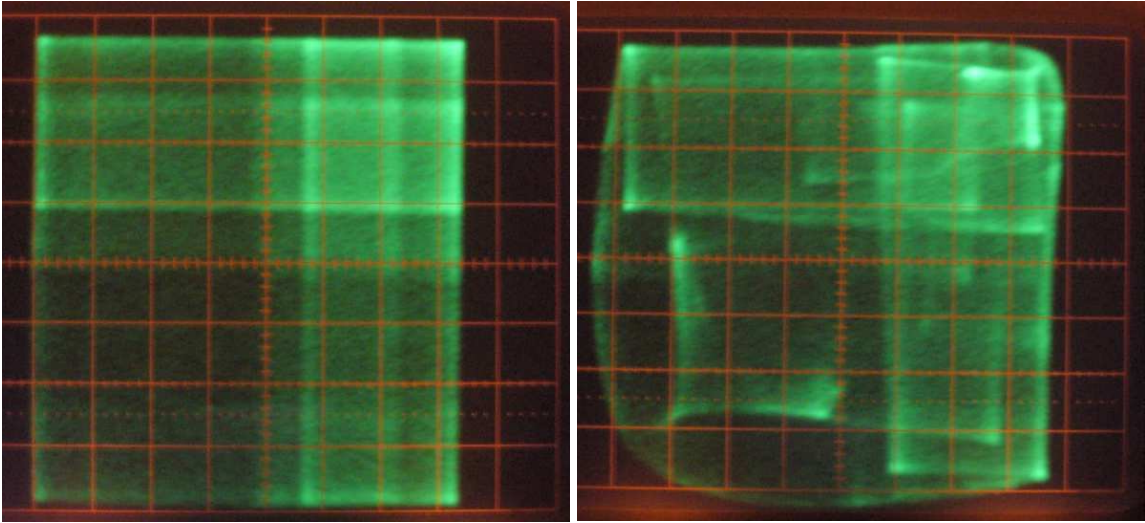
Afin de montrer que les propriétés mises en évidence dans un système modèle persistent dans un dispositif expérimental, nous nous sommes intéressés au système hyperchaotique constitué de deux résonateurs à diode [4] couplés par une très faible liaison capacitive, dont le schéma est donné à la figure 3. Il s'agit d'un dispositif très simple, mais qui présente une très grande richesse dynamique [5]. Dans nos expériences, une même tension sinusoïdale de fréquence 370 kHz est imposée à l'entrée des deux résonateurs. En sortie, on observe des régimes soit totalement décorrélés (pas de couplage), soit complètement synchronisés et donc avec une seule direction instable (couplage fort), soit enfin partiellement corrélés et hyperchaotiques. C'est bien évidemment la structure de ces derniers qui nous intéresse ici. Chaque résonateur à diode de la figure 3 est un système fortement dissipatif, dont la dynamique est très bien représentée par une application de premier retour [fig. 3(b)]. On s'attend donc à retrouver les structures de singularités mises en évidence dans les suites logistiques couplées de la section 2.



**Fig. 3.** (a) Circuit électronique composé de deux résonateurs à diode reliés par une faible liaison capacitive (qu'on peut estimer à une fraction de picroFarad).  $R_2 = 1k\Omega$ ,  $R_1 = 100\Omega$ ,  $L = 2.2mH$ . Les amplificateurs opérationnels LF356N n'interviennent pas dans la dynamique (ils évitent d'introduire un couplage supplémentaire à l'entrée, et convertissent un courant en tension à la sortie). Les diodes utilisées sont des 1N4007. (b) Application de premier retour stroboscopique d'un seul résonateur, obtenue en échantillonnant la tension de sortie à la fréquence de modulation, et en traçant la valeur d'un échantillon en fonction de celle du précédent.

C'est effectivement ce qu'on observe, comme le montre clairement la figure 4, qui représente des sections de Poincaré stroboscopiques, dont les coordonnées sont les deux tensions de sortie échantillonnées à la fréquence de modulation. La figure 4(a) montre bien qu'en l'absence de couplage, les distributions de probabilité des deux résonateurs sont totalement indépendantes (les images de lignes de pli sont verticales ou horizontales). Dès que l'on introduit un très faible couplage, la distribution de probabilité jointe se modifie significativement et laisse apparaître une structure globale où des signatures de fronces sont clairement visibles sous la forme de points de rebroussement, points de tangence entre des images de pli.

On observe clairement au moins deux points de rebroussement sur la figure 4(b) : celui en haut à droite est l'image du point fronce situé approximativement au milieu de la figure, celui en bas à gauche est l'image du précédent. Telles les caustiques d'un ensemble de rayons lumineux qui brillent car la lumière s'y concentre, les images de la fronce et des lignes de pli se détachent des points voisins par une intensité



**Fig. 4.** Sections de Poincaré stroboscopiques d'un système de deux résonateurs à diode, dont les coordonnées sont les deux tensions de sortie échantillonnées à la fréquence de modulation. (a) Cas non couplé; (b) cas couplé. On distingue nettement l'apparition de l'image de la fronce en haut à droite et de son image en bas à gauche.

nettement supérieure. En effet, ces singularités focalisent les orbites des points de leurs voisinages et les concentrent autour de leurs images, induisant des pics de densité de probabilité, par le même mécanisme qui mène à la formation de l'arc-en-ciel, permettant ainsi de les visualiser facilement sur un oscilloscope.

#### 4 Systèmes de Rössler couplés

Le système de Rössler [6] est certainement avec le système de Lorenz le système d'équations différentielles chaotique le plus utilisé de la littérature. Il présente une dynamique très dissipative, qui peut être facilement être décrite par une application de l'intervalle dans lui-même semblable à celles que nous avons rencontrées pour les suites logistiques et les résonateurs à diode couplés. Nous considérons ici le couplage de deux systèmes de Rössler par un terme linéaire faisant intervenir les variables  $x$  et  $z$ , et décrit par les équations différentielles suivantes ( $a = 0.42$ ,  $b = 2$ ,  $c = 4$ ) :

$$\dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \quad (4a)$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \quad (4b)$$

$$\dot{z}_1 = b - cz_1 + x_1z_1 + \epsilon[(x_1 - x_2) + (z_1 - z_2)] \quad (4c)$$

$$\dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) \quad (4d)$$

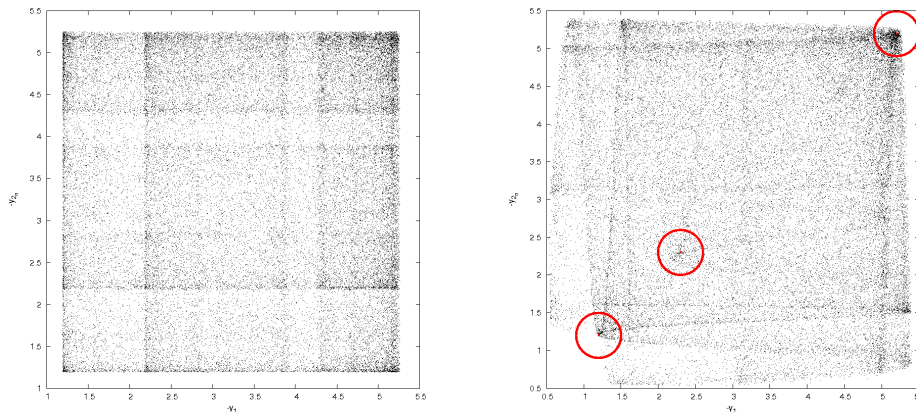
$$\dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \quad (4e)$$

$$\dot{z}_2 = b - cz_2 + x_2z_2 + \epsilon[(x_2 - x_1) + (z_2 - z_1)]. \quad (4f)$$

Ici encore, nous observons que l'activation du couplage induit une structure présentant des singularités fronces robustes, comme nous l'avons prédit analytiquement pour les suites logistiques couplées, et observé expérimentalement dans des résonateurs à diode couplés (fig. 5).

#### 5 Conclusion

Le fait qu'un système hyperchaotique à deux directions instables soit associé à une dynamique irréversible dans la variété instable fait qu'il peut être caractérisé en termes de singularités d'une application du plan dans le plan. On sait mathématiquement que ces applications peuvent présenter de



**Fig. 5.** Sections de Poincaré de coordonnées  $(y_1, y_2)$  montrant les intersections avec l'hyperplan  $x = x_c$ , où  $x_c = (c - \sqrt{c^2 - 4ab})/2$  est la coordonnée du point fixe central du système non couplé. (a) Cas non couplé,  $\epsilon = 0$ , (b) Cas couplé,  $\epsilon = 0.025$ .

manière robuste des singularités de type fronce, et que ces dernières doivent donc jouer un rôle important dans la compréhension des flots hyperchaotiques de dimension 4. Bien que correspondant à un point isolé, une fronce organise la structure globale de l'espace des phases.

Dans ce travail, nous avons montré analytiquement qu'une fronce existait de manière stable dans le système constitué de deux suites logistiques couplées, même pour des valeurs arbitrairement faibles du couplage. Nous avons ensuite étudié expérimentalement le couplage de deux résonateurs à diode et effectué des simulations numériques de deux systèmes de Rössler couplés. Dans les deux cas, la dynamique peut être décrite assez précisément par une application de l'intervalle dans lui-même et on s'attend donc à ce que les conclusions obtenues dans le cas des suites logistiques couplées restent valables. C'est effectivement ce qu'on observe avec la mise en évidence claire de singularités de type fronce dans les sections de Poincaré de ces deux systèmes.

Cela confirme la conjecture que la structure des systèmes chaotiques de dimension supérieure ne pourra être complètement élucidée sans entreprendre une classification de leurs singularités sous-jacentes, et souligne l'importance de la théorie des singularités et des catastrophes pour l'étude du chaos déterministe. On s'attend en effet à ce que dans les cas où le nombre de directions instables est supérieur à deux, on puisse rencontrer de manière stable des singularités d'ordre supérieur, telles que la queue d'aronde, les différents ombilics ou... le papillon.

## Références

1. E. OTT, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
2. R. GILMORE AND M. LEFRANC, *The Topology of Chaos* (Wiley, New York, 2002). R. GILMORE AND C. LETELLIER, *The Symmetry of Chaos*, (Oxford University Press USA, 2007). R. GILMORE, C. LETELLIER AND M. LEFRANC, Chaos Topology, *Scholarpedia* **3**(7), 4592 (2008) ([http://www.scholarpedia.org/article/Chaos\\_topology](http://www.scholarpedia.org/article/Chaos_topology))
3. V. ARNOLD, A. VARCHENKO, AND S. M GUSEIN-ZADE, *Singularités des applications différentiables* (Edition Mir, Moscou, 1986). R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse* (InterÉditions, Paris, 1972). R. GILMORE, *Catastrophe theory for scientists and engineers* (Dover, 1993).
4. P. LINSAY, Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1349–52 (1981). J. TESTA, J. PEREZ AND C. JEFFRIES, Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 714–717 (1982)
5. R. VAN BUSKIRK AND C. JEFFRIES, Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators, *Phys. Rev. A* **31**, 3332–3357 (1985)
6. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A* **57**, 397-398 (1976).



# Simulation numérique des ondes de Faraday

Nicolas Périnet<sup>1</sup>, Damir Juric<sup>2</sup> & Laurette Tuckerman<sup>1</sup>

<sup>1</sup> PMMH ESPCI, UMR 7636, 10 rue Vauquelin - 75231 PARIS CEDEX 5 - FRANCE

<sup>2</sup> LIMSI-CNRS, UPR 3251, BP 133, Bât 508 - F-91403 ORSAY CEDEX - FRANCE

perinet@pmmh.espci.fr

**Résumé.** Nous avons réalisé une simulation numérique, tridimensionnelle et non linéaire, de l’instabilité de Faraday où deux fluides superposés sont confinés dans un container oscillant verticalement. Ce code utilise une méthode de projection pour la résolution des équations de Navier–Stokes et une méthode de “Front-Tracking” pour la gestion des déplacements de l’interface et le calcul des forces de tensions. La validation de notre code a été effectuée dans le cas linéaire via une comparaison avec les résultats obtenus par une analyse de Floquet. Dans le régime non linéaire, le code a reproduit les motifs hexagonaux observés expérimentalement, ainsi que leurs spectres spatiaux. Enfin, nous avons mis en évidence que les motifs hexagonaux seraient dans ces conditions un point fixe d’une orbite hétérocline.

**Abstract.** We have carried out a three-dimensional and fully nonlinear numerical simulation of the Faraday instability where two superposed fluids are shaken periodically and vertically. The code uses a projection method for the resolution of the Navier–Stokes equations and a Front-Tracking method for the calculation of the interface displacement and interfacial forces. In the linear regime, we compare the instability thresholds and temporal eigenfunctions with those provided by Floquet analysis. In the nonlinear case we compare the spatial spectra of hexagonal patterns with those obtained experimentally. Our results suggest that the hexagonal patterns obtained in those experimental conditions may be fixed points of a heteroclinic orbit.

## 1 Introduction

L’instabilité de Faraday [1] est un modèle macroscopique très étudié dans le but de comprendre la formation primaire des motifs. Ce problème recèle en effet une importante variété de motifs comprenant entre autres des formes périodiques simples et des structures plus singulières telles que les oscillons [2], quasi-cristaux [3] [4] ou super-réseaux qui bénéficient de propriétés de symétrie différentes. Nous nous proposons ici de simuler les ondes de Faraday numériquement en trois dimensions avec un code non linéaire [5] afin de compléter les résultats expérimentaux actuellement connus.

## 2 Cadre physique de l’instabilité de Faraday

Le problème de Faraday consiste à faire osciller verticalement deux fluides distincts superposés dans un récipient. Ces fluides sont idéalement confinés dans un domaine de dimensions horizontales  $x$  et  $y$  infinies et délimité verticalement par deux plaques planes en  $z = 0$  et  $z = h$ . La position en tout point du domaine est repérée par  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . La position de l’interface est décrite séparément par le vecteur  $\mathbf{x}' = (x, y, \zeta(x, y, t))$  où  $\zeta$  correspond à la hauteur locale de l’interface. Dans le référentiel du récipient, les forces qui s’exercent sur les fluides sont la pesanteur, la force fictive des oscillations, les forces visqueuses et les interactions superficielles à l’interface entre les deux couches. Les équations de Navier–Stokes s’écrivent :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \rho(a \cos(\omega t) - g)\mathbf{e}_z + \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \int_{S'(t)} \sigma \kappa \mathbf{n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dS \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Le forçage vertical est représenté par un terme périodique d’amplitude  $a$  et de fréquence  $\omega$ . La force de tension superficielle est exprimée par le terme intégral où  $\sigma$  est la tension superficielle,  $\kappa$  la courbure de l’interface et  $\mathbf{n}$  son vecteur normal.

Le choix de fluides visqueux impose la nécessité de conditions aux limites d’adhérence aux parois qui délimitent verticalement le domaine. Dans le référentiel du récipient, elles se simplifient en

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}(x, y, h) = 0 \quad (3)$$

### 3 Méthodes numériques employées et validations du code

#### 3.1 Méthodes numériques

On utilise une approche de fluide simple : les deux fluides sont traités simultanément et différenciés par une fonction indicatrice, par exemple une fonction de Heaviside  $H[z - \zeta(x, y, t)]$  changeant de valeur à l’interface. Afin d’éviter des problèmes numériques liés aux discontinuités à l’interface, nous lisons  $H$  par une fonction de Peskin [6]. Les champs caractérisant les fluides et leur dynamique sont calculés sur un maillage Eulérien décalé alors que l’interface est modélisée sur un maillage Lagrangien et triangulaire.

Le code est décomposé en trois parties répétées en boucle. La première, consistant à calculer les forces de tension superficielle localisées sur l’interface, repose sur une méthode de “Front-Tracking” [7]. Ensuite, les équations de Navier–Stokes (1,2) sont discrétisées par des schémas aux différences finies semi-implicites. Le système (1-3) est résolu à l’aide d’une méthode de projection avec correction incrémentale de la pression [8] [9] [10]. Enfin, le “Front-Tracking” est réemployé pour advecter l’interface et les caractéristiques des fluides sont actualisées sur les noeuds du maillage Eulérien. Le domaine horizontalement infini a été remplacé par une boîte parallélépipédique dont les dimensions horizontales dépendent de  $k$  et des symétries des motifs attendus. On impose aux parois verticales de la boîte des conditions aux limites périodiques. Cette définition du domaine infini restreint drastiquement l’ensemble des solutions possibles.

#### 3.2 Validations

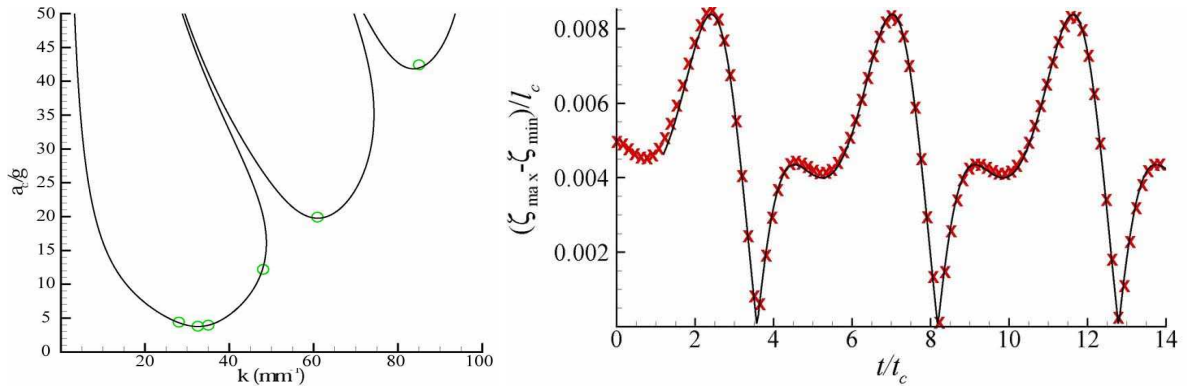
Pour une perturbation de nombre d’onde  $k$  et de faible amplitude, l’instabilité de Faraday est décrite par un système d’équations aux dérivées partielles contenant au second membre un terme dépendant périodiquement du temps. Ce type de problème, dit de Floquet, a une solution qui s’écrit :

$$\zeta(x, y, t) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (\lambda + i\alpha\omega)t} \hat{\zeta}(k, t \bmod T) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (\lambda + i\alpha\omega)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}_n(k) e^{in\omega t} \quad (4)$$

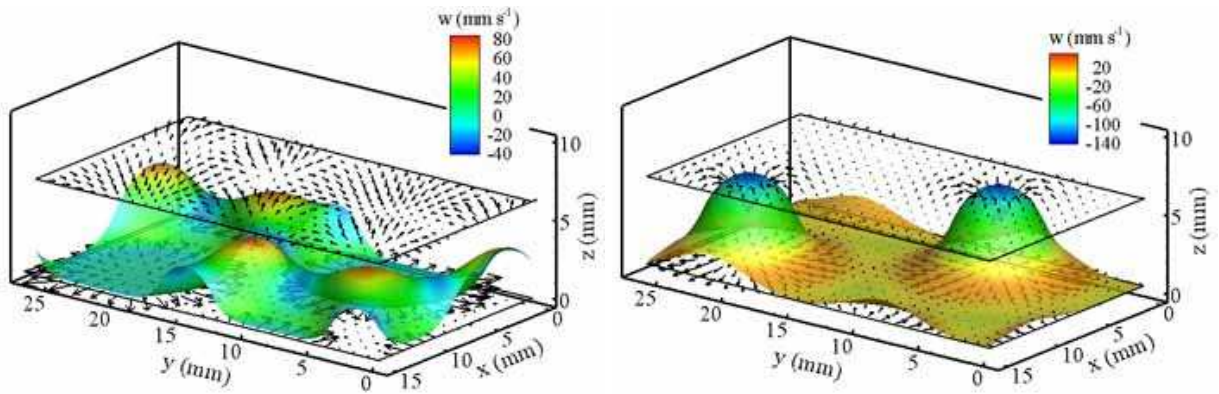
où  $T = 2\pi/\omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [0, 1[$ , et  $\hat{\zeta}(k, t)$  est la transformée de Fourier spatiale de la hauteur d’interface  $\zeta(x, y, t)$ .  $\lambda$  est le taux de croissance de la solution et  $\mathbf{k}$  un vecteur d’onde horizontal. L’amplitude critique  $a_c(k)$  des oscillations correspond à un taux de croissance  $\lambda = 0$  ;  $c$  est le seuil d’instabilité.

Généralement, les modes de Floquet  $\hat{\zeta}(k, t \bmod T)$  ne sont pas trigonométriques mais ont la fréquence fondamentale  $\omega$ . Nous avons comparé dans figure 1 les seuils d’instabilité et les modes de Floquet obtenus à l’aide de nos simulations avec ceux calculés théoriquement par Kumar & Tuckerman [11]. Pour cela nous sommes partis d’une perturbation de l’interface, spatialement monochromatique, à laquelle nous avons appliqué le code décrit précédemment.

Au-dessus du seuil d’instabilité, la perturbation modifie son apparence spatiale du fait des interactions non linéaires pour former des motifs. Des exemples de motifs hexagonaux sont montrés dans figure 2. Une expérience récente de Kityk *et al.* [12] a fourni les premiers résultats quantitatifs sur des motifs carrés et hexagonaux. En effet, ils sont parvenus à en extraire le spectre spatial et le spectre temporel de l’évolution des principaux modes de Fourier. Nous avons explicité dans figure 3 la distribution des modes excitables dans le domaine dédié à nos simulations d’hexagones. Nous montrons dans figure 4 une comparaison des spectres des hexagones obtenus expérimentalement avec ceux de notre simulation reprenant le même jeu de paramètres physiques, à partir d’une interface plane faiblement perturbée par



**Fig. 1.** A gauche : exemple de courbe neutre  $a_c(k)$ . La ligne continue et les cercles symbolisent respectivement la courbe neutre théorique et certaines amplitudes critiques simulées. A droite : évolution de la hauteur d'interface au cours du temps. La ligne continue et les croix représentent respectivement les modes propres du problème de Floquet et la différence  $\Delta\zeta(t) = \zeta_{max} - \zeta_{min}$ . Ces derniers représentent la même quantité.



**Fig. 2.** Motifs hexagonaux. Résolution : 180 points en  $z$ , 50 points par longueur d'onde en  $x$  et  $y$ . L'interface est colorée selon sa hauteur  $\zeta(x, y, t)$ . Nous avons tracé les vecteurs vitesses sur des plans horizontaux de part et d'autre de l'interface.

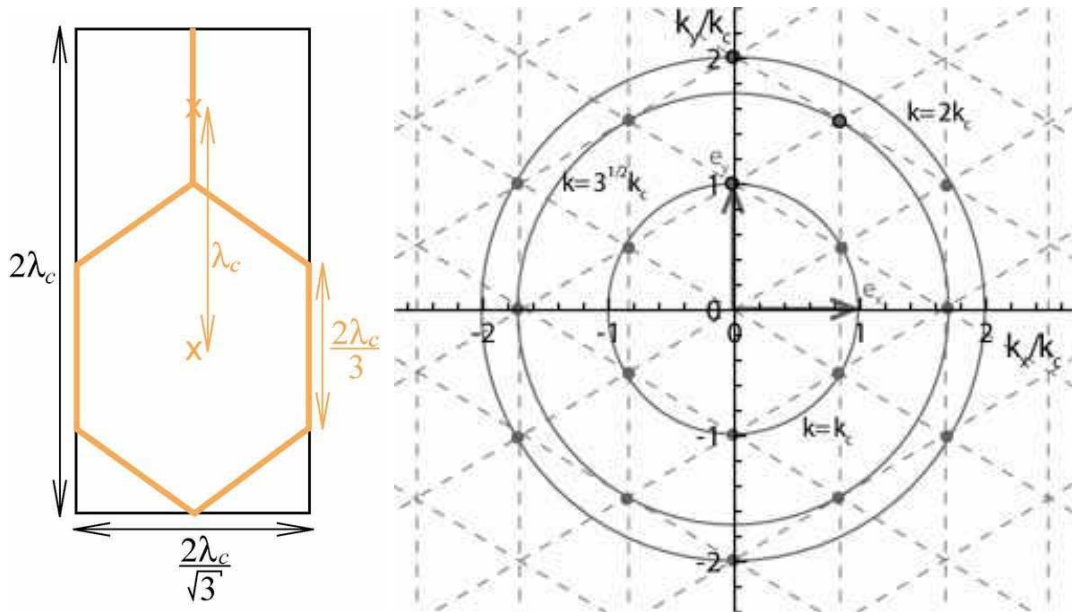
un bruit blanc.

Le code réalisé a passé avec succès des tests variés et contraignants dans les deux régimes connus. Sa fiabilité a donc été certifiée.

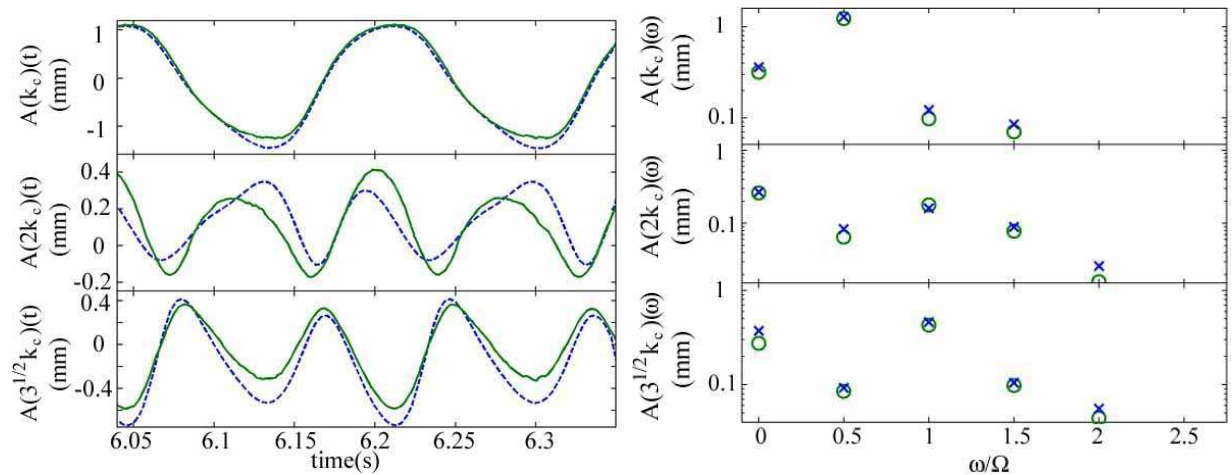
#### 4 Comportement des hexagones aux temps longs

Les motifs hexagonaux obtenus avec les conditions de Kityk *et al.* semblent ne pas durer indéfiniment. Dans nos simulations et pour différentes résolutions, les hexagones disparaissent au bout de quelques secondes au profit de motifs aux symétries différentes. Les expériences confirment ces observations [13] bien que la durée de maintien des hexagones ne soit pas identique.

Une décomposition spectrale dédiée au suivi des modes de nombre d'onde  $k_c$  et de ses principaux produits par interaction non linéaire a été effectuée dans figure 5 (droite). On y constate que tous les modes associés à un même nombre d'onde ne suivent pas exactement la même évolution. Les modes de nombre d'onde  $k_c$  qui sont prépondérants sont initialement de même amplitude. Il en est de même des autres modes représentés. Pendant cette phase, la symétrie par rotation de  $n\pi/3$  est vérifiée ; le motif est hexagonal. Après quelques secondes, seul le mode  $k_c \mathbf{e}_y$  conserve sa dynamique de départ. Ses deux

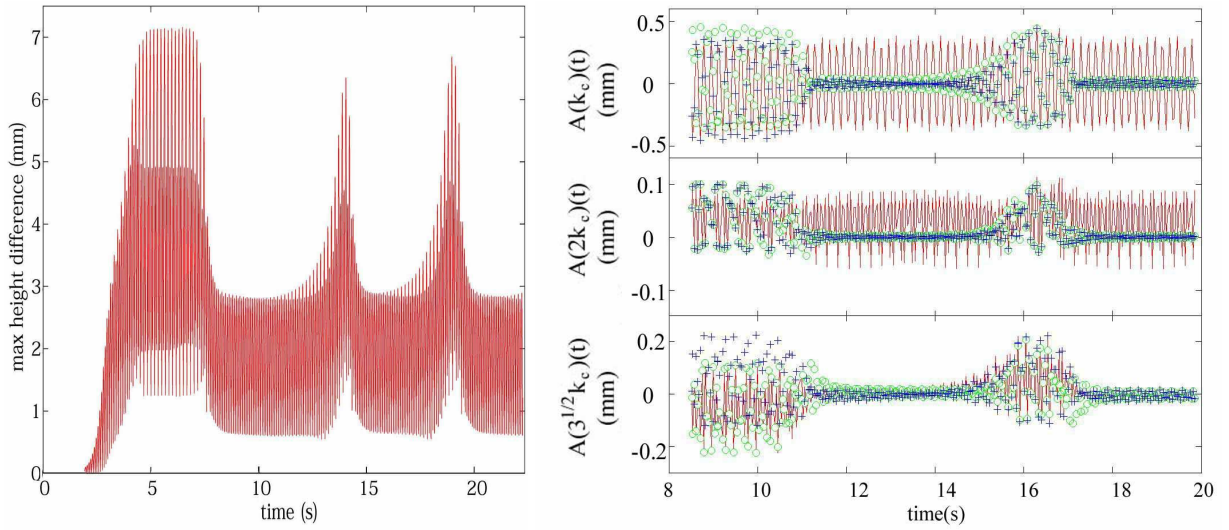


**Fig. 3.** A gauche : forme de la boîte pour nos simulations d’hexagones.  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  est la longueur d’onde critique. A droite : Répartition des modes de Fourier permis par les dimensions de cette boîte (intersections des triangles pointillés). Les études de spectres (figure 4) portent sur les trois plus petits nombres d’onde autorisés :  $k = k_c$ ,  $k = 2k_c$ , et  $k = 3^{1/2}k_c$ . Tous les modes de même nombre d’onde sont disposés sur un cercle gris centré en l’origine et doivent avoir le même comportement pour que la symétrie du motif soit hexagonale.

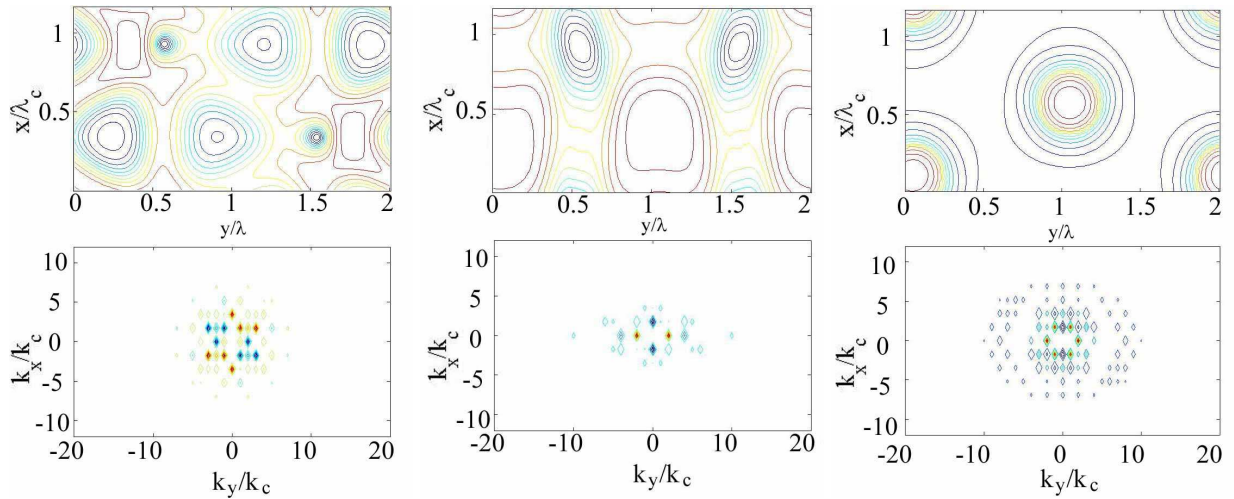


**Fig. 4.** A gauche : Evolution temporelle des modes principaux d’un motif hexagonal (cercles noirs sur figure 3). Traits continus : résultats expérimentaux. Pointillés : simulations. A droite : spectre temporel de la figure de gauche. Cercles : résultats expérimentaux. Croix : simulations.

homologues (représentés sur le même graphe) sont amortis et se stabilisent à une moindre amplitude pendant quelques secondes. La symétrie hexagonale est donc brisée et l’on s’attend à ce que le motif, du fait de la dominance d’un seul mode, s’approche d’une structure de bandes imparfaite. C’est ce que montrent les deux graphes de gauche de figure 6 dont la complexité des motifs est intimement liée à la richesse du spectre spatial. Les modes de nombre d’onde  $2k_c$  suivent plus ou moins la même dynamique : seul  $2k_c e_y$  conserve son amplitude initiale car il provient principalement de l’interaction de



**Fig. 5.** A gauche : Historique de  $\Delta\zeta(t)$  depuis la phase de croissance linéaire. Même résolution que pour figure 2. Le palier d'amplitude maximale correspond au régime hexagonal. A droite : Evolution d'une partie des modes spatiaux de l'interface. Suivi des trois modes  $k_c\mathbf{e}_y$ ,  $2k_c\mathbf{e}_y$ ,  $(\sqrt{3}k_c\mathbf{e}_x + 3k_c\mathbf{e}_y)/2$  (courbes en traits pleins) et de leurs images par rotation de  $\pi/3$  (cercles) et  $2\pi/3$  (plus). Les deux figures proviennent de simulations différentes.



**Fig. 6.** Exemples de motifs rencontrés après disparition des hexagones. En haut, courbes de niveau  $\zeta(x, y, t)$ . En bas, spectre spatial de  $\zeta$ .

$k_c\mathbf{e}_y$  avec lui même, les deux autres s'amortissent selon le même schéma que pour  $k_c$ . Enfin, tous les modes correspondant à  $\sqrt{3}k_c$  s'amortissent. En effet, aucun d'eux n'est combinaison linéaire de  $k_c\mathbf{e}_y$  et  $2k_c\mathbf{e}_y$ , seuls modes ayant gardé leur amplitude initiale. La synchronicité de ces changements provient des interactions triadiques entre modes. Figure 5 (gauche) révèle ensuite la présence d'un pic d'amplitude de  $\Delta\zeta$ , corrélée à une nouvelle amplification des modes préalablement affaiblis (droite). Les motifs formés se rapprochent à nouveau des hexagones même s'ils exhibent seulement une invariance par rotation de  $2n\pi/3$  (voir figure 6 à droite). Ces motifs ne persistent pas mais réapparaissent de manière sporadique, simultanément aux pics d'amplitude. En effet, l'occurrence des triangles, comme ceux tracés dans figure 6, a été constatée uniquement lors de l'émergence de ces pics. Ces allées et venues successives autour du

régime hexagonal mettent en évidence que cet état est un point fixe du problème de Faraday, situé sur une orbite hétérocline.

## 5 Conclusion

Un code tridimensionnel non linéaire simulant les instabilités de Faraday a été réalisé. Les divers tests qu'a subi ce code en régime linéaire et à saturation assurent sa fiabilité pour simuler les motifs. Nous avons ici mis en évidence que, dans un cas particulier [12], les hexagones appartiennent à une orbite hétérocline de l'espace des motifs excitables. Il nous faut maintenant prouver cette assertion par une analyse de stabilité linéaire autour de cet état calculé numériquement et déterminer quels sont les vecteurs propres instables au voisinage de ce point fixe.

## Références

1. M. FARADAY, On a peculiar class of acoustical figures ; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **121**, 299-340 (1831).
2. O. LIOUBASHEVSKI, H. ARBELL & J. FINEBERG, Dissipative solitary states in driven surface waves, *Physical Review Letters*, **76**, 3959-3962 (1996).
3. B. CHRISTIANSEN, P. ALSTRØM & M. T. LEVINSEN, Ordered Capillary-Wave States : Quasicrystals, Hexagons, and Radial Waves, *Physical Review Letters*, **68**, 2157-2161 (1992).
4. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, Parametrically excited quasicrystalline surface waves, *Physical Review E*, **47**, R788-R791 (1993).
5. N. PÉRINET, D. JURIC & L. S. TUCKERMAN, Numerical simulation of Faraday waves, [arXiv : 0901.0464](https://arxiv.org/abs/0901.0464), soumis à *Journal of Fluid Mechanics*.
6. C. S. PESKIN, Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal Comput. Physics*, **25**, 220-252 (1977).
7. G. TRYGGVASON, B. BUNNER, A. ESMAEELI, D. JURIC, N. AL-RAWAHI, W. TAUBER, J. HAN & Y.-J. JAN, A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow, *Journal of Comput. Physics*, **169**, 708-759 (2001).
8. A. J. CHORIN, Numerical simulation of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, **22**, 745-762 (1968).
9. R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam (1984).
10. K. GODA, A multistep technic with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows, *J. Comput. Phys.*, **30**, 76-95 (1979).
11. K. KUMAR & L. S. TUCKERMAN, Parametric instability of the interface between two fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, **279**, 49-68 (1994).
12. A. V. KITZYK, J. EMBS, V.V. MENKHONOSHIN & C. WAGNER, Spatiotemporal characterization of interfacial Faraday waves by means of a light absorption technique, *Physical Review E*, **72**, 036209 (2005).
13. A. KITZYK & C. WAGNER, *Communication personnelle* (2008).

## Directions de croissance des dendrites cristallines : vers une universalité ?

Alain Pocheau<sup>1</sup>, Julien Deschamps<sup>1</sup>, & Marc Georgelin<sup>1</sup>

IRPHE, Aix-Marseille Université  
49 rue Frédéric Joliot Curie, B.P. 146, 13384 Marseille Cedex 13  
Alain.Pocheau@irphe.univ-mrs.fr

**Résumé.** Les hétérogénéités de concentration des alliages solidifiés présentent une répartition spatiale anisotrope induite par la dynamique de l'interface de solidification, notamment par la direction de croissance des dendrites cristallines. Celle-ci varie avec le nombre de Péclet  $Pe$  entre deux extrêmes : la direction du flux thermique fixée à l'échelle macroscopique et une direction privilégiée fixée à l'échelle moléculaire par le réseau cristallin. Nous montrons ici que, de manière surprenante, la loi de rotation des dendrites est insensible aux changements des conditions de solidification. Elle est ainsi indépendante de l'intensité du gradient thermique et s'avère robuste au point de rester valide et identique dans tous les alliages testés ici, malgré des différences importantes de propriétés interfaciales, d'anisotropie et de symétrie cristalline.

**Abstract.** Heterogeneities of concentration in a solidified alloy involve an anisotropic spatial distribution induced by the dynamics of the liquid-solid interface, especially the growth direction of dendrites. This direction varies with the Péclet number  $Pe$  in between two extremes : the direction of the heat flow which is fixed at the macroscopic level and a preferred direction given at the molecular level by the crystal lattice. We show here that the rotation law of dendrites is surprisingly insensitive to changes in solidification conditions. It is thus independent of the magnitude of the thermal gradient and proves to be robust enough to remain valid and unchanged for all the alloys tested here, despite significant differences in interfacial properties, anisotropy features and crystalline symmetries.

### 1 Introduction

La plupart des objets métalliques qui nous entourent ont subi un processus de solidification lors d'au moins une étape de leur élaboration, que ce soit directement par moulage ou indirectement par emboutissage de tôles, elles-mêmes obtenues à partir d'une phase liquide. Lors de ce changement d'état, les déformations et la dynamique de l'interface liquide-solide engendrent des structures spatiotemporelles variées qui vont de pair avec des variations de concentration des constituants. Les vestiges de ces structures sont imprimés à vie dans le matériau solidifié et régissent ainsi bon nombre de leurs propriétés physiques et mécaniques. Comprendre les phénomènes non-linéaires à l'origine de ces hétérogénéités de concentration s'avère ainsi un enjeu extrêmement important en science des matériaux.

La croissance du solide dans le liquide commence généralement par un germe dont la forme est dictée par l'orientation de l'arrangement cristallin. Au niveau des microstructures, cette orientation conduit à une direction privilégiée pour laquelle la tension de surface est extrémale. Nous la noterons  $\mathbf{a}$  dans la suite. A plus grande échelle, le front de croissance est également régi par les transferts thermiques, donc par le gradient de température  $\mathbf{G}$  qui impose la seconde direction spatiale importante du système. Il est par ailleurs bien connu que, à faible vitesse de solidification, le front de croissance est plan mais que, au-delà de l'instabilité primaire du front plan, dite de Mullins-Sekerka [1], il s'organise en un réseau de microstructures appelées cellules ou dendrites selon qu'elles présentent ou non des branches latérales. L'interface, régie par la diffusion solutale d'une espèce chimique minoritaire (voire ultra-minoritaire pour les matériaux quasi-purs) adapte alors sa morphologie et sa dynamique aux deux directions de base,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{G}$ . Ceci est notamment le cas de la direction de croissance de ses microstructures, en réponse à la compétition exercée par les deux directions caractéristiques  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{G}$ .

Il s'avère ainsi que la direction de croissance des cellules ou des dendrites varie avec le nombre de Péclet  $Pe = AV/D$  entre les deux directions imposées  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{a}$  ( $V$  étant la vitesse du front,  $D$  le coefficient de

diffusion solutale et  $\Lambda$  la largeur des microstructures) [2,3]. En particulier, à faible  $Pe$  (i.e à fort couplage diffusif entre microstructures voisines), la direction de croissance est parallèle au flux thermique, donc à  $\mathbf{G}$  : elle est ainsi fixée au niveau macroscopique. En revanche, à fort  $Pe$  (i.e à faible couplage diffusif), elle s'aligne sur la direction correspondant à un extremum de tension de surface, donc sur  $\mathbf{a}$  : elle est alors fixée au niveau microscopique par les directions cristallines.

L'étude précise de la rotation des directions de croissance de  $\mathbf{G}$  à  $\mathbf{a}$  lors de l'augmentation de  $Pe$  a révélé une symétrie d'échelle inattendue [3]. Celle-ci conduit à une équivalence physique de toutes les dendrites vis-à-vis de l'effet de rotation, indépendamment de leurs caractéristiques propres d'asymétrie, de tailles et de branchements, ou encore de l'angle entre  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{a}$  [3,4,5]. En particulier, aucun nombre de Péclet caractéristique n'émerge, conduisant ainsi, pour des variables adaptées, à un comportement en loi de puissance [3,4,5].

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier l'influence non plus seulement des directions extrêmes  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{a}$ , mais de l'intensité des phénomènes qui y sont associés, à savoir la norme du vecteur  $\mathbf{G}$  et l'amplitude de la modulation anisotrope de tension de surface. A priori, le changement de ces intensités devrait modifier la loi de rotation des dendrites avec  $Pe$ . De manière étonnante, nous avons constaté qu'il n'en est rien, un doublement du gradient thermique (Sect.3), un changement de matériau ou même de symétrie cristalline (Sect.4) n'influent en rien sur la forme de cette loi.

## 2 Expérience

L'expérience vise à réaliser la solidification en lame mince de matériaux transparents pour des vitesses de solidification  $V$ , des tailles de structures  $\Lambda$  et des angles d'ouverture  $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$  variables. Nous varierons également ici le gradient de température et l'alliage utilisé. Pour cela, nous utiliserons successivement des alliages à base de succinonitrile (SCN), d'acide pivalique (PVA) et d'eau. Le SCN et le PVA sont des cristaux plastiques de symétrie cubique et dont la cinétique d'attachement à l'interface est rapide. Leur comportement s'avère alors similaire à celui des alliages métalliques. L'anisotropie du PVA est cependant plus élevée que celle du SCN et d'origine plus cinétique que capillaire. L'eau cristallise en système hexagonal qui est extrêmement anisotrope entre le plan de l'hexagone et la direction orthogonale, mais relativement isotrope dans le plan hexagonal que nous utilisons. Les solutés utilisés présentent les coefficients de diffusion solutale  $D$  suivants :  $D = 1,35 \cdot 10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  pour l'acrylonitrile dans le SCN [5],  $D = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  pour l'éthanol dans le PVA [6] et  $D = 6,9 \cdot 10^{-10} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  pour notre solution de glucose dans l'eau [7].

La principale innovation du dispositif expérimental concerne le pilotage de la variable  $\Theta_0$ , et donc de l'orientation relative du gradient de température  $\mathbf{G}$  et du cristal. Ceci a été réalisé en adaptant notre montage de manière à pouvoir faire tourner les éléments thermiques responsables du gradient de température. Plusieurs angles de rotation répartis entre  $0^\circ$  et  $45^\circ$  (ou  $30^\circ$  pour l'eau de symétrie d'ordre 6) ont été ainsi réalisés avec une précision de  $0.1^\circ$ .

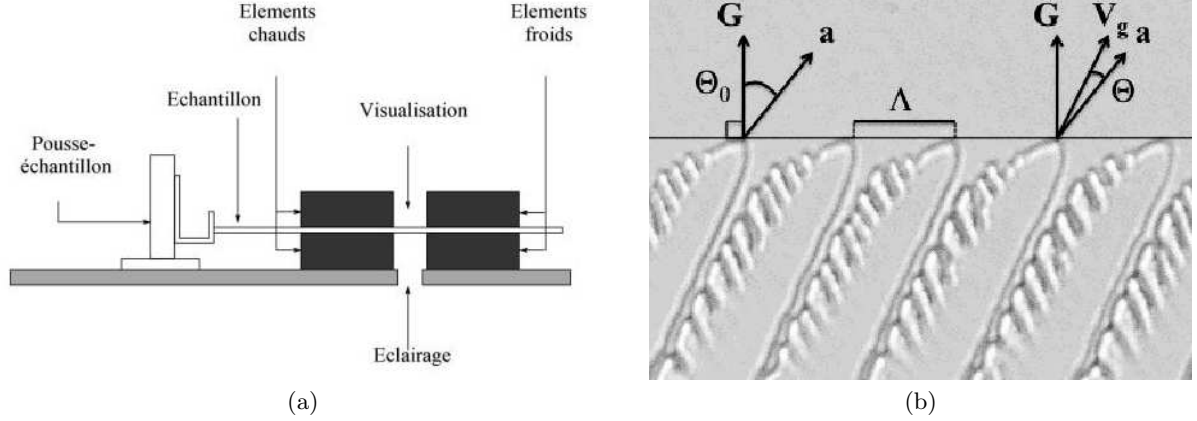
Pour déterminer les orientations cristallines, nous avons utilisé le fait qu'à haute vitesse de croissance, elles définissent, comme en solidification libre, la direction de croissance des dendrites. La sélection de mono-grains a été obtenue pour le SCN et le PVA par fusion/solidification itérative des échantillons, chaque opération étant pilotée de manière à augmenter le domaine relatif à un grain présélectionné. L'observation à haute vitesse des mono-grains obtenus révèle des branchements dendritiques dirigés selon la normale à l'échantillon pour les deux matériaux cubiques. Ceci signifie qu'un des axes principaux  $[1, 0, 0]$  du cristal est aligné sur cette normale. Ceci est corroboré par l'absence de structure en algues à toute vitesse et tout angle d'ouverture  $\Theta_0$ . En ce qui concerne l'eau, le plan de l'échantillon était confondu avec le plan de symétrie hexagonale du cristal.

Les températures de fusion des solvants purs sont de  $58^\circ\text{C}$  pour le SCN,  $35^\circ\text{C}$  pour le PVA et  $0^\circ\text{C}$  pour l'eau. Le liquide est inséré par capillarité dans des échantillons larges de 45 mm, longs de 15 cm et d'épaisseur suffisamment fine,  $50 \mu\text{m}$ , pour n'autoriser qu'une seule couche de dendrite dans son épaisseur.

Les fours sont chauffés par une feuille de résistance et placés en regard de refroidisseurs composés de modules à effet Peltier (Fig. 1a). Ces éléments sont régulés électroniquement à une précision de  $0,05^\circ\text{C}$



et séparés de 5 à 10 mm pour donner un gradient thermique effectif de 140 à 70 K.cm<sup>-1</sup>. La translation de l'échantillon dans ce gradient est assurée par un moteur pas à pas de 6400 pas par tour entraînant une vis de pas 5 mm couplée à un écrou à recirculation de roulement. La position de l'échantillon est mesurée par un dispositif interférométrique de type Michelson. Ceci permet d'optimiser le dispositif et d'attester de la constance de la vitesse de poussée à 1% près sur un tour de vis.



**Fig. 1.** (a) Schéma du dispositif expérimental de solidification directionnelle (b) Dendrites en croissance et définition des directions extrêmes  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{G}$ , de la direction de croissance  $\mathbf{V}_g$  et des angles utilisés.

### 3 Une réponse indifférente au gradient thermique

Les directions de croissance  $\mathbf{V}_g$  ( $g$  pour growth) sont mesurées avec une précision de 0.1° par reconstruction de leur trajectoire dans le référentiel lié à la phase solide [5]. Nous avons mesuré l'angle  $\Theta = (\mathbf{a}, \mathbf{V}_g)$  pour diverses valeurs de l'ouverture  $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$  à différentes vitesses (Fig. 1b). Comme il n'y a pas de sélection de la longueur d'onde dans ce système, ces mesures ont également pu être menées sur des cellules ou dendrites de tailles différentes à autres paramètres fixés.

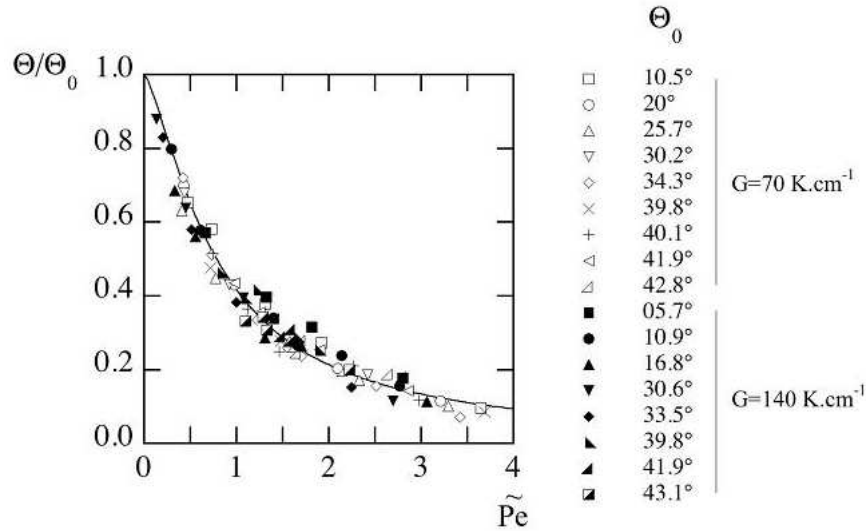
La taille caractéristique  $\Lambda$  utilisée a priori pour définir le Péclet correspond à la distance entre voisins. Hormis pour des dendrites symétriques, elle inclut alors une partie située à l'aplomb de branchements secondaires développés entre deux dendrites voisines (Fig. 1b). Cette partie, souvent dominante dans la valeur de  $\Lambda$ , s'avère sans effet sur la direction de croissance de la dendrite concernée. Il est ainsi apparu qu'elle devait être ignorée en définissant la taille pertinente  $\tilde{\Lambda}$  à partir de la partie de dendrite dénuée de branchements (partie droite en figure 1b). Ceci conduit à un nouveau nombre de Péclet  $\tilde{Pe}$  bien adapté aux structures asymétriques et permettant notamment d'exprimer pleinement la symétrie d'échelle de la loi de rotation [4]. Nous l'utiliserons dorénavant dans la suite de l'étude.

Afin d'examiner l'influence de l'intensité du gradient thermique  $\mathbf{G}$  sur les directions de croissance, nous avons effectué des mesures sur du SCN pour deux gradients différents : 70 et 140 K/cm. Nous reportons sur la figure 2 l'évolution des orientations de structures en fonction de  $\tilde{Pe}$ . La forme générale de la courbe montre une décroissance de  $\Theta = \Theta_0$  pour  $\tilde{Pe} \ll 1$  à  $\Theta = 0$  pour  $\tilde{Pe} \gg 1$ , soit, comme attendu, une rotation de  $\mathbf{V}_g$  de  $\mathbf{G}$  vers  $\mathbf{a}$  avec  $\tilde{Pe}$ . Par ailleurs, bien que l'intensité de  $\mathbf{G}$  varie, l'ensemble des points expérimentaux se regroupe sur la même loi de croissance, à savoir la loi (1) décrite précédemment [4]. La loi de rotation des directions de croissance s'avère en particulier *insensible* à l'intensité de  $\mathbf{G}$ .

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{1}{1 + a\tilde{Pe}^b} ; a = 1,4 ; b = 1,4. \quad (1)$$

L'invariance du phénomène avec la norme de  $\mathbf{G}$  peut se traduire en termes de variables adimensionnées. Il est habituel en solidification directionnelle de considérer comme variables adimensionnées le nombre de Péclet et l'écart au seuil de l'instabilité primaire du front plan  $\nu = V/V_c$  où  $V_c$  est la vitesse critique de

Mullins-Sekerka. Ici  $\mathbf{G}$  est une grandeur thermique qui n'influe pas directement sur le couplage diffusif représenté par  $Pe$ . En revanche, comme  $V_c$  est proportionnel à la norme de  $\mathbf{G}$ , le nombre  $\nu$  en dépend aussi. Notre observation expérimentale de l'indépendance de l'orientation des microstructures vis-à-vis de  $|\mathbf{G}|$ , donc de  $\nu$ , signifie ainsi que l'instabilité primaire et son mécanisme propre n'y sont pas impliqués.



**Fig. 2.** Etudes à deux gradients  $G = 70\text{K/cm}$  (symboles creux) et  $G = 140\text{K/cm}$  (symboles pleins). Tous les points expérimentaux se regroupent sur une même courbe indépendamment des angles d'ouverture  $\Theta_0$  et surtout ici du gradient. La ligne correspond à la loi (1).

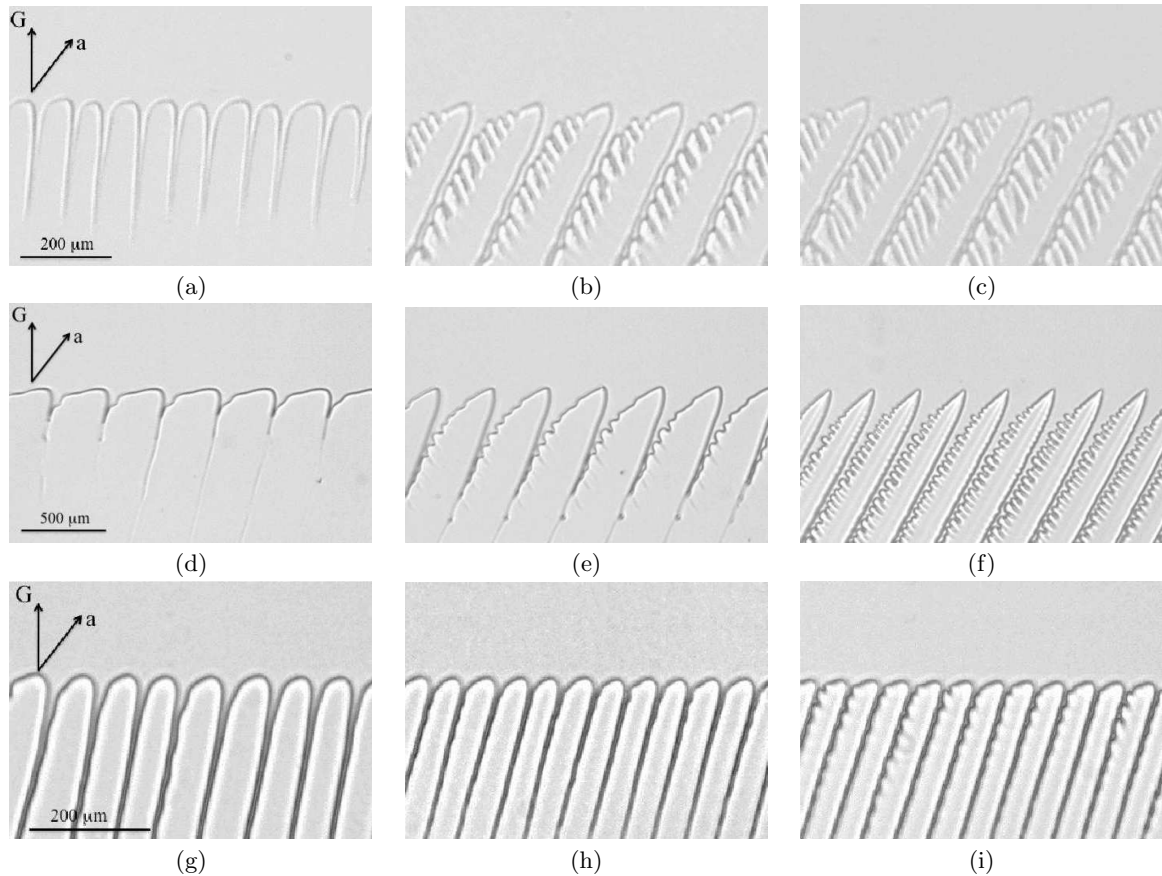
#### 4 Une réponse unique pour tous les matériaux

Après avoir varié dans la section précédente l'intensité correspondant à l'une des deux directions extrêmes de croissance,  $\mathbf{G}$ , nous modifions ici l'intensité correspondant à la seconde,  $\mathbf{a}$ , via l'amplitude de la modulation anisotrope des propriétés interfaciales. Pour cela nous comparons les directions de croissance de trois matériaux (SCN, PVA et eau) présentant des anisotropies cinétiques et capillaires différentes, voire des symétries cristallines différentes. La figure 3 montre plusieurs états de l'interface de croissance pour les trois matériaux, à trois vitesses différentes. Les fronts présentent des morphologies variées, plus pointues pour le PVA suite à son anisotropie plus importante, plus semblables pour l'eau et le SCN malgré leur symétrie cristalline différente, d'ordre 6 pour l'eau et 4 pour le SCN. La direction de  $\mathbf{G}$  est normale à la ligne des pointes de microstructures tandis que la direction de  $\mathbf{a}$  se retrouve dans celle de l'orientation des dendrites à haute vitesse (images de droite).

La figure 4 présente l'évolution du rapport  $\Theta/\Theta_0$  pour chacun des matériaux en fonction de  $\tilde{Pe}$ . Là encore, l'ensemble des points expérimentaux se regroupe sur la loi de croissance (1) indépendamment des matériaux utilisés. Or changer de matériau induit une modification de nombreux paramètres importants de solidification : certes les coefficients d'anisotropie des propriétés interfaciales, mais aussi les symétries cristallines, le diagramme des phases thermodynamique et la concentration en soluté. Il est ainsi surprenant de noter que, parmi tous ces paramètres, seule la diffusivité solutale  $D$  semble jouer un rôle dans l'orientation des microstructures par l'intermédiaire du nombre de Péclet. En particulier, les données d'orientation des trois matériaux conduisent ici à des évolutions identiques en  $Pe$ , non seulement sur le plan qualitatif (décroissance, convexité, limites) mais aussi quantitatif.

#### 5 Conclusion

Lorsque la vitesse de tirage ou le nombre de Péclet augmentent, les directions de croissance des microstructures tournent de la direction du gradient thermique  $\mathbf{G}$  à une direction privilégiée  $\mathbf{a}$  fixée par

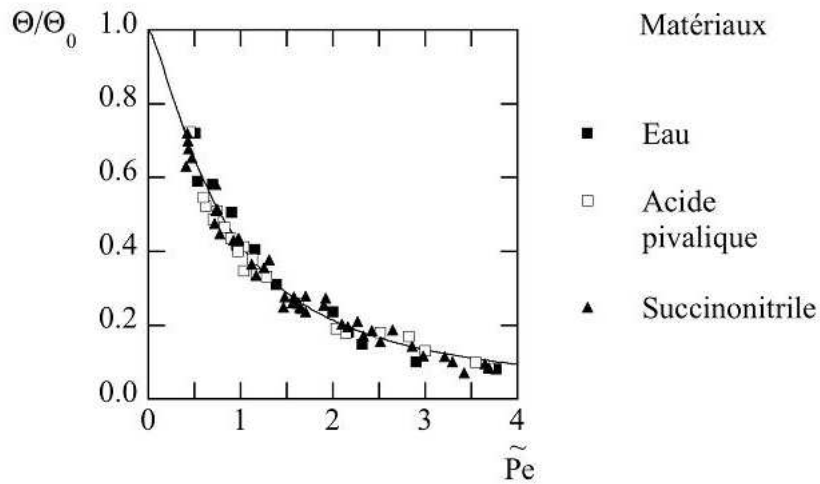


**Fig. 3.** Fronts de solidification pour différents matériaux. Les directions de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{a}$  et l'échelle spatiale sont données sur les images de gauche. Première ligne : Succinonitrile,  $\Theta_0 = 30.6^\circ$  (a)  $V = 10\mu\text{m/s}$  (b)  $V = 30\mu\text{m/s}$  (c)  $V = 50\mu\text{m/s}$ ; Seconde ligne : Acide pivalique,  $\Theta_0 = 30.6^\circ$  (d)  $V = 1\mu\text{m/s}$  (e)  $V = 2\mu\text{m/s}$  (f)  $V = 10\mu\text{m/s}$ ; Troisième ligne : Eau,  $\Theta_0 = 19^\circ$  (g)  $V = 10\mu\text{m/s}$  (h)  $V = 30\mu\text{m/s}$  (i)  $V = 50\mu\text{m/s}$ .

l'orientation cristalline. Ce phénomène influe grandement sur la morphologie des microstructures, donc sur la microségrégation et finalement sur les caractéristiques physiques des matériaux solidifiés. Dans un même matériau et à un même gradient de température, une précédente étude avait révélé une symétrie d'échelle inattendue pour cette loi d'orientation [3,4,5]. Elle impliquait notamment que la rotation des microstructures s'effectue de manière équivalente quel que soit l'angle entre les directions caractéristiques  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{G}$ .

Cependant, au vu de l'importance physique de ces directions envers la croissance, on aurait pu s'attendre à ce que l'amplitude des phénomènes qui leur sont associés, l'intensité du gradient thermique et celle des modulations anisotropes des propriétés interfaciales, participent sensiblement à l'orientation des microstructures. Nous avons montré ici qu'il n'en est rien : ces orientations s'avèrent insensibles au changement d'intensité du gradient thermique et des matériaux utilisés. Ce résultat montre que la loi d'orientation n'est dépendante que de l'angle entre les directions limites  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{G}$  et pas de l'intensité des phénomènes qui y sont attachés. Elle apparaît en particulier indépendante du seuil de l'instabilité primaire, donc de son mécanisme propre, et plus étonnant encore, du type de symétrie cristalline considéré.

L'ensemble de ces conclusions renforce ainsi le caractère universel de cette loi d'orientation et constitue un guide précieux pour en comprendre l'origine et en cerner les applications.



**Fig. 4.** Etudes sur trois matériaux. Tous les points expérimentaux se regroupent sur une même courbe indépendamment du matériau. La ligne correspond à la loi (1) déterminée dans le succinonitrile.

## Références

1. W. W. MULLINS & R. F. SEKERKA, Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy, *Journal of Applied Physics*, **35** (2), 444-451 (1964).
2. S. AKAMATSU & T. IHLE, Similarity law for the tilt angle of dendrites in directional solidification of non-axially-oriented crystals, *Physical Review E*, **56** (4), 4479-4485 (1997).
3. J. DESCHAMPS, M. GEORGELIN & A. POCHEAU, Crystal anisotropy and growth directions in directional solidification, *Europhys. Lett*, **76**, 291-297 (2006).
4. A. POCHEAU, J. DESCHAMPS & M. GEORGELIN, Dendrite growth directions and morphology in the directional solidification of anisotropic materials, *JOM*, july 2007, 71-77 (2007).
5. J. DESCHAMPS, M. GEORGELIN & A. POCHEAU, Growth directions of microstructures in directional solidification of crystalline materials, *Physical Review E*, **78**, 011605 (2008).
6. P. BOUSSOU, B. PERRIN & P. TABELING, Influence of an external flow on dendritic crystal growth, *Physical Review A*, **40** (1), 509-512 (1989).
7. M. F. BUTLER, Growth of solutal ice dendrites studied by optical interferometry, *Crystal Growth and Design*, **2** (1), 59-66 (2002).

# Portraits de phase et matrices de Markov pour l'étude des asynchronismes en ventilation non invasive

H. Rabarimanantsoa<sup>1</sup>, U.S. Freitas<sup>1</sup>, R. Naeck<sup>2</sup>, J.-F. Muir<sup>2,3</sup>, A. Cuvelier<sup>2,3</sup>, & C. Letellier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex

<sup>2</sup> GRHV UPRES EA 3830 (IFRMP 23), Université de Rouen

<sup>3</sup> Service de Pneumologie et de Soins Intensifs Respiratoires — CHU de Rouen

Roomila.Naeck@coria.fr

**Résumé.** La ventilation non invasive est utilisée pour soulager les patients souffrant d'insuffisance respiratoire chronique en favorisant les échanges gazeux ( $O_2$  et  $CO_2$ ) avec leur sang grâce à un ventilateur. La dynamique sous-jacente au système patient-ventilateur est étudiée avec des portraits de phase reconstruits à partir de la mesure de l'évolution temporelle du débit dans le circuit ventilatoire. Les portraits de phase révèlent — en temps réel — si la dynamique ventilatoire est régulière, perturbée ou non par des asynchronismes, et si des fuites apparaissent. Un codage des différents événements (cycles normaux, non déclenchés et désynchronisés) permet de construire une dynamique symbolique qui se révèle particulièrement efficace pour traiter les milliers de cycles ventilatoires survenant au cours d'une nuit. A partir de cette dynamique symbolique, une matrice de Markov est calculée et est transcrite sous la forme d'un graphe d'interactions, ce qui permet de définir trois profils ventilatoires.

**Abstract.** Noninvasive ventilation is used to treat patients with chronic respiratory failure by improving blood gases exchanges ( $O_2$  and  $CO_2$ ) by using a ventilator. The dynamics underlying the patient-ventilator system is investigated with phase portraits reconstructed from times series of the airflow measured in the ventilatory circuit. Phase portraits allow to identify — in real time — whether the ventilatory dynamics is regular, perturbed or not by asynchronisms and whether leaks occur. These different events (normal, non-triggered or desynchronized cycles) are encoded with different symbols. Such a symbolic dynamics is particularly efficient to investigate thousands of cycles as encountered during a night. Markov matrices are then computed and interpreted in terms of interactions graph. These graphs can be related to three main ventilatory profiles.

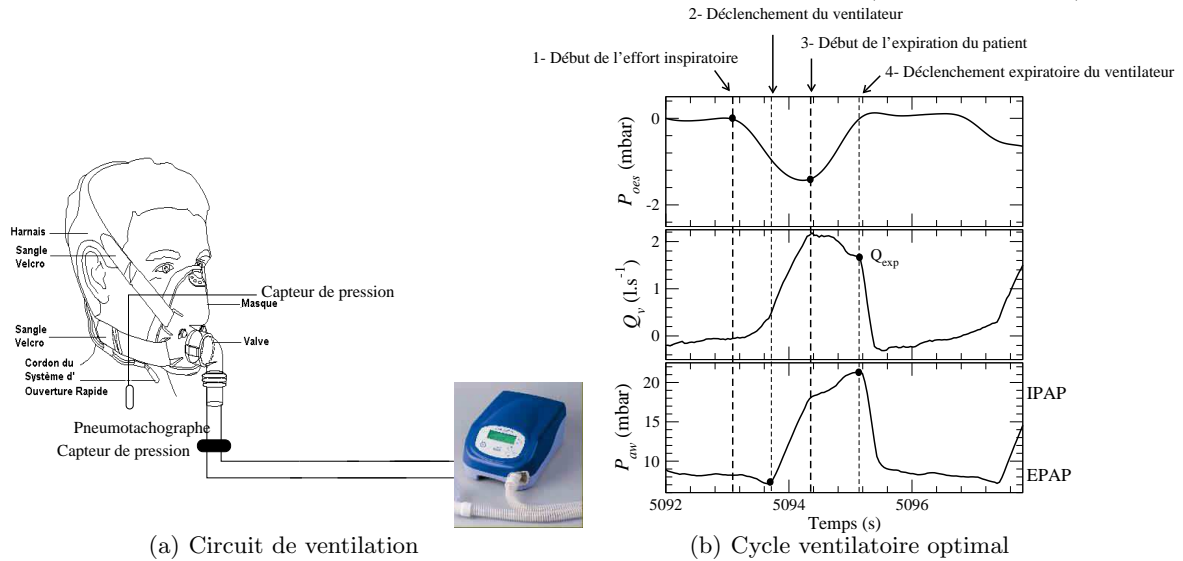
## 1 Introduction

La ventilation non invasive est un traitement visant à soulager l'insuffisance respiratoire [1,2]. Elle consiste à insuffler de l'air aux poumons par l'intermédiaire d'un masque à l'aide d'un ventilateur ; cela permet de maintenir à des valeurs normales les taux d' $O_2$  et de  $CO_2$  dans le sang. Cependant, la réussite de la ventilation non invasive dépend essentiellement de la qualité de la synchronisation entre les efforts inspiratoires du patient et le déclenchement du ventilateur. La caractérisation des interactions patient-ventilateur constitue donc une étape importante pour améliorer les réglages du ventilateur et le confort du patient. La théorie des systèmes dynamiques non linéaires est déjà largement utilisée en biomédecine pour l'étude de variabilité de paramètres physiologiques [3,4,5]. Par exemple, les diagrammes de récurrences et les entropies de Shannon ont déjà été utilisés pour caractériser la dynamique patient-ventilateur [6]. Cependant, le recours à ces techniques restait encore insuffisant dans le domaine de la ventilation non invasive dans la mesure où seuls certains types d'asynchronismes patient-ventilateur étaient quantifiés, et que les fuites provoquées par un décollement du masque du visage du patient [7,8] n'étaient pas pris en compte. Nous verrons ainsi que portraits de phase, dynamique symbolique et matrices de Markov permettent d'analyser plus finement la dynamique patient-ventilateur. Par ailleurs, la plupart des insuffisants respiratoires étant ventilés au cours de leur sommeil, c'est la dynamique ventilatoire nocturne — nécessairement dépendante des stades du sommeil — qui est ici étudiée.

## 2 Dynamique ventilatoire à partir des portraits de phase

### 2.1 Système d'acquisition

Un cycle ventilatoire optimal peut être décrit à partir des mesures non invasives — la pression et le débit — au sein du circuit de ventilation. Le débit et la pression aérienne sont respectivement mesurés à l'aide d'un pneumotachographe (Fleish n°2 — METABO, Lausanne, Suisse) et d'un capteur de pression différentielle (VALIDYNE DP 15, Los Angeles, USA) (Fig. 1a). Ces deux grandeurs physiques sont échantillonnées à une fréquence de 128 Hz via un boîtier d'acquisition dédié (CIDELEC, France).



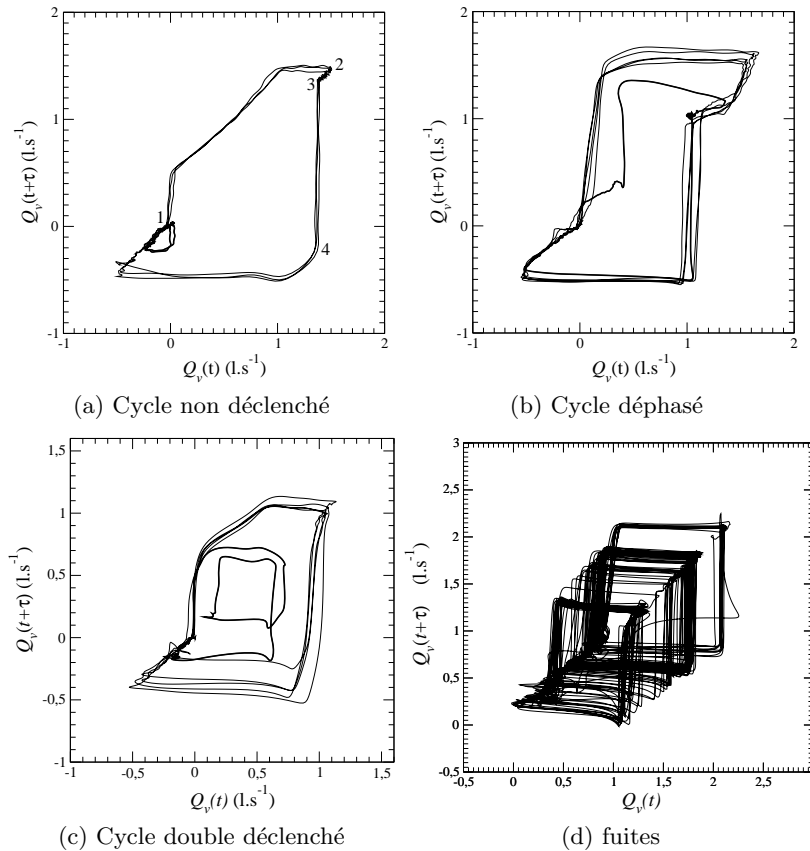
**Fig. 1.** Système d'acquisition et évolutions temporelles de la pression œsophagienne ( $P_{oes}$ ), du débit aérien ( $Q_v$ ) et de la pression aérienne ( $P_{auv}$ ) d'un cycle idéal. La pression œsophagienne — mesure invasive nécessitant un cathéter à ballonnet dans l'œsophage — est utilisée comme signal de référence pour la validation des analyses à partir de mesures non invasives.

Un cycle ventilatoire optimal est défini comme suit. L'effort inspiratoire du patient se traduit par une oscillation négative sur la pression œsophagienne (Fig. 1b). Le déclenchement du ventilateur (passage de la pression expiratoire positive — EPAP — à la pression inspiratoire positive — IPAP) s'effectue pendant un temps de montée en pression ( $T_{mp}$ ) pré réglé plus court que la phase inspiratoire du patient (Fig. 1b). Durant l'expiration du patient, la pression œsophagienne remonte et le débit chute. Le ventilateur pressurise jusqu'à ce que le débit chute au dessous d'une valeur pré réglée ( $Q_{exp}$ ); le déclenchement expiratoire survient alors. Le ventilateur revient et reste à la valeur de l'EPAP (Fig. 1) jusqu'au prochain effort inspiratoire.

### 2.2 Portraits de phases et asynchronismes

Dans un premier temps, nous utilisons l'un des résultats essentiels de la théorie des systèmes dynamiques qui repose sur la possibilité de reconstruire l'espace des phases à partir de la mesure de l'une des grandeurs physiques pertinentes pour la description du système [9]. Un cycle ventilatoire est alors représenté par une boucle dans l'espace reconstruit (Fig. 2a). La partie supérieure du portrait de phase correspond essentiellement à la phase inspiratoire tandis que sa partie inférieure correspond à la phase expiratoire. Le déclenchement de la phase inspiratoire survient au voisinage de l'origine du portrait de phase. Chaque portion de la boucle correspond à différentes phases du cycle ventilatoire (Fig. 2a).

Lorsque le patient est ventilé en parfaite synchronisation avec son ventilateur, les cycles ventilatoires ont à peu près la même morphologie et les boucles visitent toujours à peu près la même région de l'espace reconstruit. Lorsqu'un incident interrompt la succession régulière des cycles ventilatoires, la



**Fig. 2.** Asynchronismes et fuites décrits à l'aide de portraits de phase reconstruit à partir du débit à l'aide des coordonnées décalées  $(Q_v(t), Q_v(t + \tau))$ . Le décalage  $\tau$  est ici égal à 0,2 s. Un cycle ventilatoire correctement déclenché est représenté par une boucle caractérisée par les différentes phases du cycle : 1-déclenchement de la phase inspiratoire, 1-2 : montée en pression, 2-3 : transition de la phase inspiratoire à la phase expiratoire, 3-4 : arrêt de la pressurisation, 4-1 : phase expiratoire.

trajectoire s'écarte des boucles « normales » et prend une forme qui dépend de l'incident rencontré. Ces asynchronismes sont principalement des cycles non déclenchés, des cycles déphasés et des cycles double déclenchés. Le cycle non déclenché se traduit par un effort inspiratoire du patient non suivi par un déclenchement du ventilateur [13]. Les trois cycles normaux, les trois grandes boucles (Fig. 2a), se distinguent aisément des deux cycles non déclenchés se traduisant par deux petites boucles à l'intérieur des grandes boucles. Une simple inspection visuelle sur le portrait de phase permet donc d'identifier l'existence de cycles non déclenchés.

Un cycle déphasé correspond à un déphasage entre le cycle respiratoire du patient et le cycle du ventilateur (Fig. 2b). Le retard de déclenchement provoque l'opposition de phase se traduit par un début de la montée en pression qui ne se fait plus à une valeur de débit proche de zéro comme les autres cycles mais plutôt à un débit égal à environ  $0,35 \text{ l.s}^{-1}$ . De plus, l'amplitude du débit est importante mais reste légèrement inférieure à celle d'un cycle normal : les boucles caractérisant ces asynchronismes demeurent à l'intérieur des boucles normales (Fig. 2b). Dans les deux cas l'opposition de phase se traduit par une trajectoire qui s'attarde au voisinage de la valeur maximale du débit, c'est-à-dire au voisinage de la première bissectrice (en haut à droite du portrait de phase). Notons par ailleurs qu'une variation du temps de montée en pression inspiratoire affecte la portion 1-2 (Fig. 2b) : plus le temps  $T_{mp}$  est court, plus la phase 1-2 présente un segment parallèle à la bissectrice. Ce segment est bien visible lorsque  $T_{mp} = 500 \text{ ms}$  (Fig. 2a), ce qui n'est pas le cas lorsque  $T_{mp} = 150 \text{ ms}$  (Fig. 2b).

Le double déclenchement du ventilateur se définit par deux cycles déclenchés par le ventilateur pour un seul effort inspiratoire du patient (Fig. 2c). Sur un portrait de phase, les cycles doubles déclenchés se reconnaissent par la présence de deux boucles consécutives sans retour à l'origine du portrait de phase et situées à l'intérieur des boucles correspondant aux cycles normaux (Fig. 2c). Ces deux boucles ont une amplitude bien supérieure à celle des cycles non déclenchés (comparez à la Fig. 2a).

### 2.3 Les fuites non intentionnelles

Les « fuites » correspondent à l'air insufflé par le ventilateur qui n'arrive pas aux poumons du patient. Elles peuvent être dues à une ouverture de la bouche lorsqu'un masque nasal est utilisé : on parle alors de fuites buccales. Des masques, faciaux ou nasaux, mal positionnés ou mal serrés peuvent également entraîner un défaut d'étanchéité de l'ensemble peau-masque et conduire à des fuites. Les fuites non intentionnelles sont particulièrement importantes puisque la qualité du sommeil et celle de la ventilation sont significativement réduites en présence de fuites [7]. En présence de fuite, le ventilateur doit compenser la fuite en délivrant un débit plus important pour assurer la pression cible préétablie. Les fuites se traduisent donc par une dérive du portrait de phase le long de la première bissectrice, le déclenchement du ventilateur ne se fait plus au point d'origine du portrait de phase mais à des valeurs plus grandes (Fig. 2d). Plus les fuites sont importantes, plus la trajectoire se déplace le long de la première bissectrice.

## 3 Analyse dynamique par matrices de Markov

De manière générale, un processus stochastique — sans déterminisme clairement identifié — peut être ramené à une chaîne de Markov <sup>1</sup>, c'est-à-dire à une séquence de variables aléatoires  $\sigma_n$  [10] : chaque événement est ainsi codé avec un symbole. Dans notre cas, ces événements correspondent aux cycles normaux (N), non déclenchés (ND) et déphasés (CD). Ce codage constitue une dynamique symbolique. Ainsi, l'évolution temporelle du débit est convertie en une suite de symboles qu'il est plus facile d'étudier sur l'ensemble de la nuit. Une matrice de transition d'un état (symbole) à un autre est alors calculée : c'est une matrice de Markov.

Un protocole d'étude des interactions patient-ventilateur nocturnes a été réalisé au sein du laboratoire du Sommeil du service de Pneumologie (CHU de Rouen). Trente-huit insuffisants respiratoires chroniques (quinze femmes et vingt-six hommes) habituellement ventilés au long cours à domicile sont impliqués dans l'étude. Parmi eux, vingt-deux souffrent du Syndrome d'Obésité-Hypoventilation et seize ont une Bronchopneumopathie Chronique Obstructive [11]. Chaque patient du protocole est placé sous ventilation non invasive durant une nuit : les variables neurologiques et ventilatoires, dont le débit et la pression aérienne, sont enregistrées. Le ventilateur utilisé est une VPAP III STA (RESMED, Australie) en mode Ventilation Spontané avec Aide Inspiratoire (VS-AI) sans fréquence ventilatoire de sécurité. Les enregistrements comportaient en moyenne 5000 cycles ventilatoires.

A l'aide d'un algorithme spécifique [12], chaque cycle ventilatoire est codé selon la convention :

N	un cycle normal
ND	pour un cycle non déclenché
CD	un cycle déphasé

c'est-à-dire à l'aide d'une dynamique symbolique à trois symboles. La matrice de Markov correspondante est donc une matrice  $3 \times 3$  exprimant les probabilités de transition entre les différents symboles de la série, soit :

$$M = [m_{ij}] = \begin{bmatrix} N \mapsto N & N \mapsto ND & N \mapsto CD \\ ND \mapsto N & ND \mapsto ND & ND \mapsto CD \\ CD \mapsto N & CD \mapsto ND & CD \mapsto CD \end{bmatrix}$$

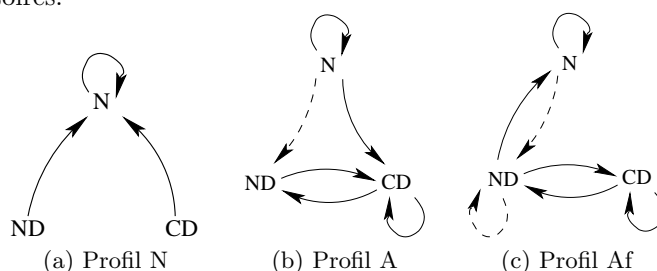
<sup>1</sup> Andreï Andreevitch Markov (1856-1922) étudia à Saint-Pétersbourg en 1874 sous la tutelle de Tchebychev. Ses travaux sur la théorie des probabilités l'ont amené à développer les « chaînes de Markov ».



Chaque matrice de Markov est alors transcrite en un graphe d'interactions comme suit. A chaque état — normal (N), non déclenché (ND) et déphasé (CD) —, est associé à un nœud qui est placé à l'un des sommets d'un triangle équilatéral. Lorsqu'un élément  $m_{ij}$  de la matrice de Markov est supérieur à 15%, une flèche continue du nœud  $i$  vers le nœud  $j$  est tracée; cette flèche est en pointillés pour un élément tel que  $10\% < m_{ij} < 15\%$ . Rien n'est tracé lorsque l'élément  $m_{ij}$  est inférieur à 10%. Par exemple, la matrice de transition

$$M = \begin{bmatrix} 0,992 & 0,006 & 0,002 \\ 0,872 & 0 & 0,128 \\ 0,643 & 0,357 & 0 \end{bmatrix}$$

calculée sur un patient conduit au graphe représenté Fig. 3a : une flèche continue relie le nœud N à lui-même ( $m_{NN} = 0,992$ ) ; rien n'est tracé du nœud N vers les deux autres puisque  $m_{NND}$  et  $m_{NCD}$  sont inférieurs à 10%. Le graphe d'interactions schématise les principaux liens de causalité entre les différents types de cycles ventilatoires.



**Fig. 3.** Graphes d'interactions entre les différents types de cycles ventilatoires : N = normal, ND = non déclenché et CD = cycle déphasé. T trois profils différents sont distingués.

Les matrices de Markov sont calculées pour chaque patient et les graphes associés sont tracés. A partir des différents graphes d'interactions, trois types de graphes sont distingués (Fig. 3) : ils correspondent à trois grandes classes de dynamiques ventilatoires avec leurs caractéristiques bien définies :

- le profil ventilatoire N (optimal) représenté par une structure de base où toutes les flèches sont dirigées vers le nœud N (Fig. 3a) : dix-neufs patients sont concernés, ce sont des patients parfaitement adaptés à leur machine puisqu'ils présentent essentiellement des cycles normaux avec quelques asynchronismes isolés.
- le profil ventilatoire A (avec asynchronismes) défini par la présence systématique d'une flèche  $CD \mapsto CD$  montrant que l'asynchronisme récurrent est le cycle déphasé, c'est-à-dire qu'il y a un déphasage entre la respiration du patient et le déclenchement inspiratoire ou expiratoire du ventilateur.
- le profil ventilatoire Af (avec asynchronismes et fuites) défini par les flèches  $ND \mapsto ND$ ,  $CD \mapsto CD$  mais également  $ND \mapsto CD$  et  $CD \mapsto ND$ . Ces deux dernières relations déterminent une boucle fermée sur le graphe et révèlent ainsi une grande tendance à une orbite de période 2 (alterance de CD et ND). Ce sont des patients qui ont beaucoup d'asynchronismes et beaucoup de fuites.

## 4 Conclusion

La ventilation non invasive permet de pallier à l'insuffisance respiratoire chronique. Cependant, au cours de la ventilation nocturne, des événements tels que des asynchronismes ou des fuites surviennent et contribuent à l'inconfort du patient, une mauvaise qualité du sommeil, voire à l'échec du traitement. Les interactions patient-ventilateur doivent être optimales. A l'aide de portraits de phases reconstruits à partir du débit ventilatoire, il est possible de suivre l'évolution des cycles ventilatoires en temps réel et, par conséquent, de détecter l'apparition des différents types d'asynchronismes (trois en l'occurrence) et des fuites. Grâce à la dynamique symbolique et aux matrices de Markov, il est possible de mettre en évidence des relations privilégiées entre les différents types de cycles et de distinguer trois grands profils ventilatoires. Par ailleurs, une boucle fermée entre cycles déphasés et cycles non déclenchés a été mise en évidence chez tous les patients ayant un fort taux d'asynchronismes mettant en évidence une relation causale privilégiée entre ces deux asynchronismes.

*Remerciements* Ubiratan Freitas est soutenu par la Région de Haute-Normandie et ADIR ASSISTANCE.

## Références

1. M. VITACCA, F. RUBINI, K. FOLIO, S. SCALVINI, S. NAVA & N. AMBROSINO, Non invasive modalities of positive pressure ventilation improve the outcome of acute exacerbations in COLD patients. *Intensive Care in Medicine*, **19**, 450-455, 1993.
2. C. GIRAULT, J. LEROY, G. BONMARCHAND, J.-C. RICHARD, V. CHEVRON, F. TAMION & P. PASQUIS, Comparative physiologic effects of non invasive assist-control and pressure support ventilation in acute hypercapnic respiratory failure. *Chest*, **111**, 1639-1648, 1997.
3. J. KURTHS, A. VOSS, P. SAPARIN, A. WITT, H. J. KLEINER & N. WESSEL, Quantitative analysis of heart rate variability, *Chaos*, **5** (1), 88-94, 1995.
4. V. L. SCHECHTMAN, M. Y. LEE, A. J. WILSON & R. M. HARPER, Dynamics of respiratory patterning in normal infants and infants who subsequently died of the sudden infant death syndrome, *Pediatrics and Respiration*, **40**, 571-577, 1996.
5. N. BURIOKA, H. SUYAMA, T. SAKO, M. MIYATA, T. TAKESHIMA, M. ENDO, J. KURAI, Y. FUKUOKA, M. TAKATA, T. NOMURA, K. NAKASHIMA & E. SHIMIZU, Non-linear dynamics applied to human respiratory movement during sleep, *Biomedical Pharmacother*, **56**, 370s-373s, 2002.
6. H. RABARIMANTSOA, L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER & J.-F. MUIR, Recurrence plots and Shannon entropy for a dynamical analysis of asynchronisms in noninvasive mechanical ventilation, *Chaos*, **17**, 015113, 2007.
7. T. J. MEYER, M. R. PRESSMAN, J. BENDITT, F. D. MCCOOL, R. P. MILLMAN, R. NATARAJAN & N.S. HILL, Air leaking through the mouth during nocturnal nasal ventilation : effects on sleep quality, *Sleep*, **20**(7), 561-569, 1997.
8. H. TESCHLER, J. STAMPA, R. RAGETTE, N. KONIETZKO & M. BERTHON-JONES, Effect of mouth leak on effectiveness of nasal bilevel ventilatory assistance and sleep architecture, *European Respiratory Journal*, **14**, 1251-1257, 1999.
9. N. H. PACKARD, J. P. CRUTCHFIELD, J. D. FARMER & R. S. SHAW, Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, **45**, (9), 712-716, 1980.
10. A. A. MARKOV, Rasprostranenie zakona bolshih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga, *Izvestiya, Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete*, 2-ya seriya, tom 15, **94**, 135-156, 1906.
11. H. RABARIMANTSOA, *Caractérisation des asynchronismes durant la ventilation non invasive nocturne*, Thèse de l'Université de Rouen soutenue le 2 Décembre 2008.
12. L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER, E. VÉRIN & J.-F. MUIR, Asynchrony and cyclic variability in pressure support noninvasive ventilation, *Computers in Biology and Medicine*, **37**, 1308-1320, 2007.
13. P. LEUNG, A. JUBRAN & M. J. TOBIN, Comparison of assisted ventilator modes on triggering, patients' efforts, and dyspnea, *American Journal of Respiratory Critical Care Medicine*, **155**, 1940-1948, 1997.

# Nonlinear acrobatics of viscous filaments

Neil M. Ribe<sup>1</sup>, Mehdi Habibi<sup>2</sup>, Yaser Rahmani<sup>2</sup>, & Daniel Bonn<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire FAST, Bât. 502, Campus Universitaire, 91405 Orsay Cedex, France

<sup>2</sup> Institute For Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan 45195-1159, Iran

<sup>3</sup> Laboratoire de Physique Statistique, UMR 8550 CNRS, École Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

<sup>4</sup> Van der Waals-Zeeman Institute, University of Amsterdam, Valckenierstraat 65, 1018 XE Amsterdam, the Netherlands

ribe@fast.u-psud.fr

**Résumé.** De minces filaments de fluide visqueux jouent un rôle important dans de nombreux phénomènes naturels et procédés industriels. A cause de sa surface libre, un filament visqueux se comporte de façon non-linéaire de par sa nature même, avec notamment la possibilité d'états radicalement différents pour un seul et même jeu de paramètres externes. Nous étudions depuis quelque temps la riche dynamique 'multistable' d'un filament visqueux qui tombe verticalement sur une surface rigide, en conjuguant expériences de laboratoire et modélisation. Nous en présentons ici trois exemples : (1) Modes 'pendulaires' d'un filament qui s'enroule sur lui-même ; (2) Génération d'ondes spirales par l'instabilité d'enroulement ; et (3) Etats multiples d'un filament de faible viscosité.

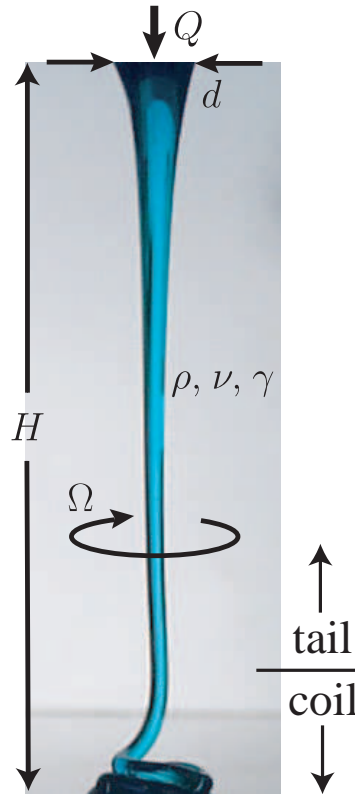
**Abstract.** Thin filaments of viscous fluid play an important role in many natural phenomena and industrial processes. Because of its free surface, a viscous filament behaves in an inherently nonlinear fashion, and can exhibit radically different states for a given set of external control parameters. Using laboratory experiences and theoretical modeling, we have studied this 'multistable' dynamics in the particular case of a viscous filament falling onto a rigid surface. Here we present three examples : (1) 'pendular' modes of a coiling filament ; (2) generation of spiral waves by the coiling instability ; and (3) multiple states of a low-viscosity filament.

## 1 Introduction

Thin filaments of viscous fluid play an important role in a variety of natural and industrial contexts, from volcanic eruptions to the manufacture of polymer products and non-woven materials. In most of these applications, the filament responds to the different forces acting on it by adopting a complex three-dimensional shape that is not known *a priori*, and which must be determined either experimentally or numerically. Typically, the shape of the filament's axis is very far from any of the simple shapes (straight line, circular arc, etc.) for which the governing equations can be solved analytically. Consequently, the behavior of viscous filaments is inherently nonlinear, even if the rheology of the fluid in question is perfectly linear (Newtonian). One of the primary manifestations of this nonlinearity is a fundamental nonuniqueness of behavior, whereby a filament can exhibit multiple states with very different shapes for a given set of values of the control parameters that define the experimental situation.

Perhaps the best-known example of this sort of nonlinearity is the phenomenon of 'liquid rope coiling' [1], wherein a thin stream of viscous fluid (e.g., honey) falling onto a surface winds itself into a whirling 'corkscrew'. Fig. 1 shows the setup used in most experimental studies of this phenomenon, in which fluid with density  $\rho$ , viscosity  $\nu$  and surface tension coefficient  $\gamma$  is ejected at a volumetric rate  $Q$  from a hole of diameter  $d$  and then falls a distance  $H$  onto a solid surface. For sufficiently large fall heights, the filament exhibits a two-part structure comprising a helical 'coil' and a long vertical 'tail'. The principal parameter of interest is the angular coiling frequency  $\Omega$ .

During the past few years, we have studied liquid rope coiling using a combination of experimental, analytical, and numerical methods, and have found several new and surprising types of nonlinear behavior. In the rest of this article we shall present three of these : pendulum modes of highly viscous filaments ; generation of spiral waves by coiling ; and multiple states of low-viscosity filaments.



**Fig. 1.** Steady coiling of a ‘rope’ of viscous corn syrup (photograph by N. Ribe.) Fluid with density  $\rho$ , viscosity  $\nu$  and surface tension coefficient  $\gamma$  is injected at volumetric rate  $Q$  through a hole of diameter  $d$  and falls a distance  $H$  onto a plate. The angular coiling frequency is  $\Omega$ .

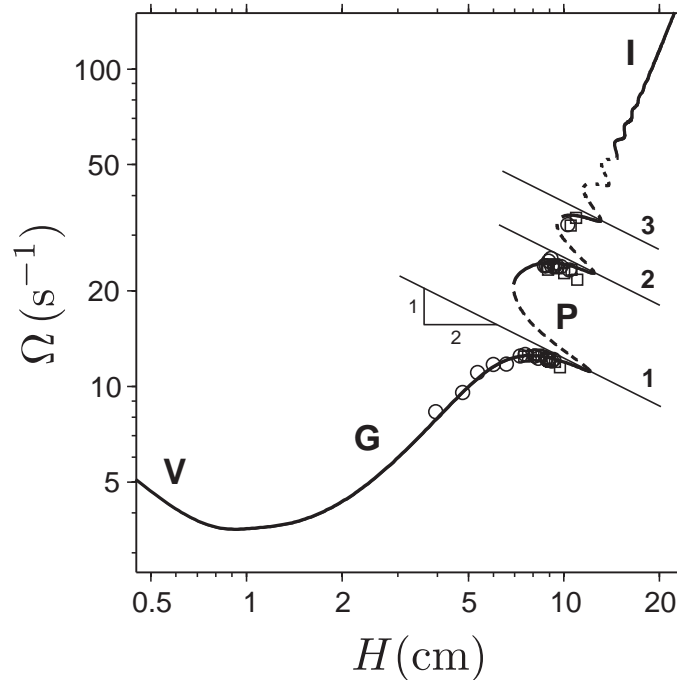
## 2 Pendulum modes of highly viscous filaments

To establish the context in which these modes occur, we need first to review briefly the different dynamical regimes of liquid rope coiling. These regimes are now fairly well understood thanks to more than 50 years of study using a variety of experimental [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11] and theoretical [4,9,10,12,13,14] approaches. The results are summarized in Fig. 2a in the form of a plot of coiling frequency vs. height measured experimentally (symbols) and calculated numerically (solid curve) for  $\rho = 0.97 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\gamma = 21.5 \text{ dyne cm}^{-1}$ ,  $\nu = 1000 \text{ S}$ ,  $d = 0.068 \text{ cm}$  and  $Q = 0.00215 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  the parameters of one of the laboratory experiments in [9]. Four different regimes are seen in succession as the fall height  $H$  increases, depending on the relative magnitudes of the viscous, gravitational, and inertial forces acting on the filament. For small heights  $H < 0.8 \text{ cm}$ , both gravity and inertia are negligible, and coiling occurs in a viscous (V) regime with a frequency that decreases with height. This regime is similar to the coiling of toothpaste squeezed from a tube against an impermeable surface. A second regime is seen in the range  $H = 0.8 - 7 \text{ cm}$ . Here the inertia of the filament is still negligible, but gravity is now large enough to balance the viscous forces in the coil, leading to a gravitational (G) regime in which  $\Omega$  increases with  $H$ . A third, inertial (I) regime appears at large fall heights  $H > 15 \text{ cm}$ ; here, the viscous forces in the coil are balanced by inertia, and gravity is negligible.

The most complicated and interesting behavior, however, is seen in the ‘pendular’ regime that occurs for intermediate fall heights  $H = 7 - 15 \text{ cm}$ . In this range, the curve of coiling frequency vs. fall height is multivalued, implying that more than one coiling state can exist at a given fall height. In this regime, the ‘tail’ portion of the filament (Fig. 1) behaves as a whirling ‘liquid pendulum’ in which centrifugal

acceleration is balanced by a combination of gravity and the viscous forces associated with extensional deformation. Ribe et al. [9] showed that such an object has an infinite series of eigenmodes with frequencies  $\Omega_n$  proportional to the classical pendulum frequency  $(g/H)^{1/2}$ . If one of these eigenfrequencies happens to be close to the (G-regime) frequency set by the ‘coil’ portion of the filament, then the tail executes large-amplitude resonant oscillations. The first three liquid-pendulum eigenfrequencies  $\Omega_1 - \Omega_3$  are indicated by the lines with slope  $-1/2$  in Fig. 2, and are seen to correspond precisely to the ‘bumps’ on the curve of frequency vs. height.

A final interesting aspect of the pendular regime is that the dashed portions of the calculated frequency-height curve in Fig. 2 are unstable to small perturbations [10]. This is in agreement with the fact that steady coiling states (symbols in Fig. 2) are never observed along these portions of the curve in the laboratory.



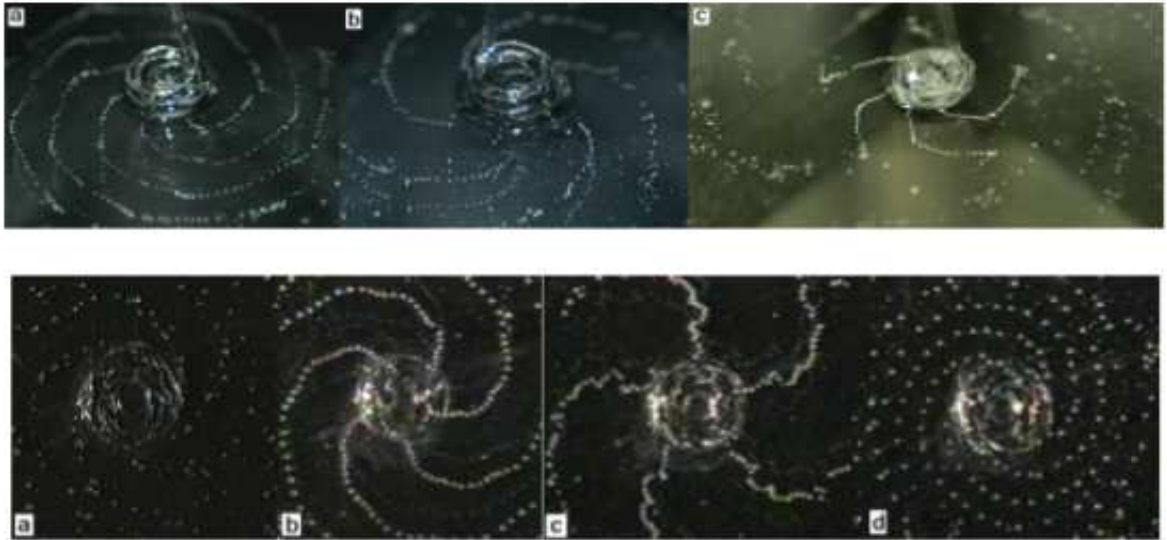
**Fig. 2.** Coiling frequency vs. fall height measured experimentally (symbols) and calculated numerically using the method of [14] (solid-dashed line) for silicone oil ( $\rho = 0.97 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\gamma = 21.5 \text{ dyne cm}^{-1}$ ,  $\nu = 1000 \text{ S}$ ) with  $d = 0.068 \text{ cm}$  and  $Q = 0.00215 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ . Dashed portions of the solid curve are unstable to small perturbations [10]. The labels indicate the four coiling regimes : viscous (V), gravitational (G), pendular (P), and inertial (I). The three lines with slope  $-1/2$  indicate the first three ‘liquid pendulum’ eigenfrequencies.

### 3 Spiral waves generated by liquid rope coiling

In liquid rope coiling in general, each new ‘loop’ of the filament laid down lies exactly on top of the previous one. In a limited region of the parameter space, however, this is not the case : each new loop is systematically displaced relative to the previous one, in such a way that the center of coiling executes a slow retrograde progression with a frequency roughly one-fourth that of the coiling itself. By some mechanism not yet understood, the relative displacement of successive loops causes air bubbles to be trapped between them. These air bubbles are then expelled radially in the thin layer of fluid spreading away from the coiled loops over the impermeable surface, creating bubble patterns in the form of spiral waves.

Several examples of such waves are shown in Fig. 3. The top panel shows the typical appearance of the spirals viewed from above, and illustrates the fact that they always have five distinct branches. Moreover, if the sense of rotation of the coiling changes spontaneously, the curvature of the branches of

the spiral follows suit, changing sign after a short lag time (compare images (a) and (b) in the top panel of Fig. 3). The lower panel of Fig. 3 shows that the spiral pattern depends critically on relatively small changes in the fall height. Habibi et al. [15] proposed a simple kinematic model involving two frequencies and two radii (of the coiling and the precession) that predicts the observed spiral patterns quite well.

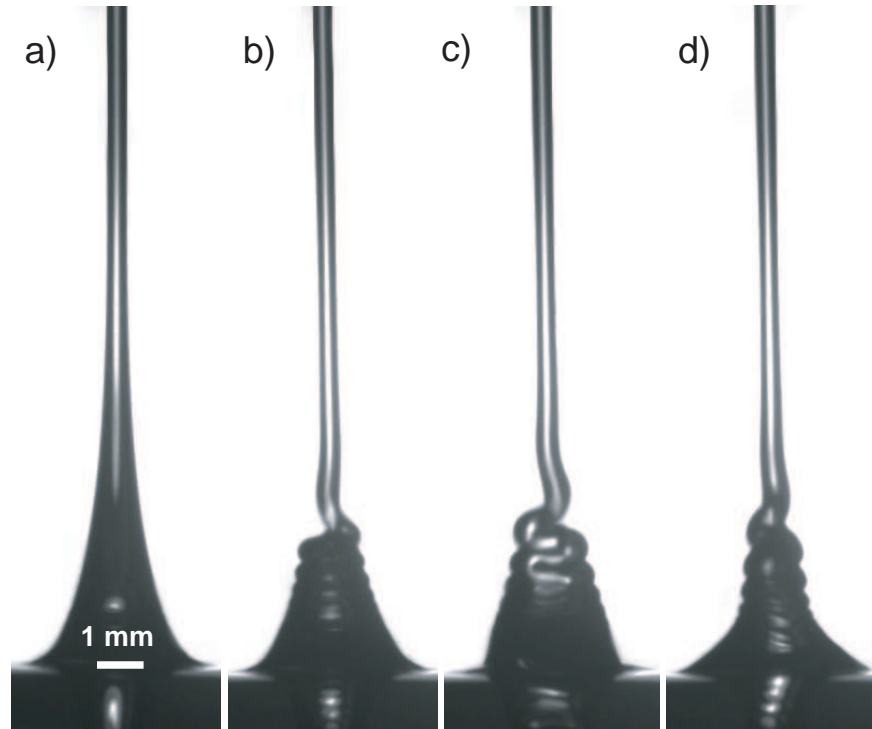


**Fig. 3.** Examples of spiral bubble waves generated by coiling of a filament of silicone oil with  $\nu = 300$  S. Top : photographs taken obliquely from above. The diameter of the fluid pile in the center is about 1 cm. Bottom : photographs from below illustrating the variation of the spiral pattern with fall height in an experiment with  $d = 1.6$  mm and  $Q = 0.137$  cm<sup>3</sup> s<sup>-1</sup>. (a)  $H = 3$  cm, (b) 3.5 cm, (c) 3.7 cm, (d) 4.0 cm.

The next step in our investigation of this problem, still in progress, will be to go beyond kinematics to understand the dynamical basis of spiral wave formation. In this context, a key observation we need to understand is that spiral waves form only when the fall height is just below the value for the onset of the pendular (P) regime (Fig. 2). Another important question is the nature of the bifurcation from ‘normal’ coiling (with precisely superposed loops) to the ‘coiling with precession’ that gives rise to spiral waves. A preliminary analysis (unpublished) suggests that the bifurcation may be subcritical, but this requires further confirmation. Additional questions of interest include the following : Why is the precession frequency always about one-fourth that of the coiling? Why is the precession retrograde, i.e. in the direction opposite to the coiling? What is the precise mechanism by which bubbles are trapped between the coiled loops?

#### 4 Multiple states of low-viscosity filaments

Our final example of the nonlinear behavior of viscous filaments is the recent discovery [16] of three radically different states in a filament of low-viscosity fluid falling onto an impermeable surface. Fig. 4 shows these states as observed in an experiment using silicone oil ( $\rho = 0.97$  g cm<sup>-3</sup>,  $\gamma = 21.5$  dyne cm<sup>-1</sup>,  $\nu = 5$  S) with  $d = 2.6$  mm,  $Q = 0.19$  cm<sup>3</sup> s<sup>-1</sup>, and  $H = 14$  cm. The first state (Fig. 4a) is simple stagnation flow, in which the filament retains its axial symmetry while thickening downward towards the surface. The second state (Fig. 4b) is steady coiling in the inertial (I) regime, similar to that seen previously using fluids with much higher viscosities. The most interesting state, however, is the third (Fig. 4c-d), in which the filament folds in (approximately) a vertical plane while that plane itself simultaneously precesses. While the folding frequency is only about 10% less than the frequency of the coiling shown in Fig. 4b, the precession frequency is smaller than both by a factor  $\approx 50$ . The images in Fig. 4c and Fig. 4d are separated in time by one-half the precession period, and illustrate how the appearance of the



**Fig. 4.** Multiple states of a filament of low-viscosity silicone oil ( $\rho = 0.97 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\gamma = 21.5 \text{ dyne cm}^{-1}$ ,  $\nu = 5 \text{ S}$ ) incident on an impermeable surface, with  $d = 2.6 \text{ mm}$ ,  $Q = 0.19 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ , and  $H = 14 \text{ cm}$ . (a) axisymmetric stagnation flow; (b) steady coiling; (c, d) folding with precession. Images (c) and (d) are separated in time by one-half the precession period.

filament changes depending on whether it is viewed perpendicular to (Fig. 4c) or parallel to (Fig. 4d) the folding plane.

We have also found that each of three states shown in Fig. 4 can be observed in the course of a single experiment. Typically, the transitions between states are initiated by the spontaneous arrival of a large-amplitude ‘blob’ of fluid traveling down the filament. These blobs, which may be created when dust in the working fluid partially and momentarily clogs the ejection hole, act as finite-amplitude perturbations that ‘crush’ an existing state to make way for a new one. We are currently working towards a more complete understanding of the phase diagram of these multiple states, with the goal of being able to predict which state(s) are observable under a given set of experimental conditions.

## Références

1. G. BARNES & R. WOODCOCK, Liquid rope-coil effect. *American Journal of Physics*, **26**, 205-209 (1958).
2. G. BARNES & R. MACKENZIE, Height of fall versus frequency in liquid rope-coil effect. *American Journal of Physics*, **27**, 112-115 (1959).
3. G. I. TAYLOR, Instability of jets, threads, and sheets of viscous fluid, In *Proceeding of the 12th International Congress on Applied Mechanics*, pp. 382-388, Springer-Verlag, Berlin, (1969).
4. J. O. CRUICKSHANK & B. R. MUNSON, Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, **113**, 221-239 (1981).
5. H. E. HUPPERT, The intrusion of fluid mechanics into geology. *Journal of Fluid Mechanics*, **173**, 557-594 (1986).
6. R. W. GRIFFITHS & J. S. TURNER, Folding of viscous plumes impinging on a density or viscosity interface, *Geophysical Journal*, **95**, 397-419 (1988).

7. L. MAHADEVAN, W. S. RYU, & A. D. T. SAMUEL, Fluid 'rope trick' investigated, *Nature*, **392**, 140 (1998).
8. M. MALEKI, M. HABIBI, R. GOLESTANIAN, N. M. RIBE & D. BONN, Liquid rope coiling on a solid surface, *Physics Review Letters*, **93** 214502 (2004).
9. N. M. RIBE, H. E. HUPPERT, M. A. HALLWORTH, M. HABIBI, & D. BONN, Multiple coexisting states of liquid rope coiling, *Journal of Fluid Mechanics*, **555** 275-297 (2006).
10. N. M. RIBE, M. HABIBI & D. BONN, Stability of liquid rope coiling, *Physics of Fluids*, **18** 084102 (2006).
11. M. HABIBI, M. MALEKI, R. GOLESTANIAN, N. M. RIBE & D. BONN, Dynamics of liquid rope coiling, *Physical Review E*, **74**, 066306 (2006).
12. B. TCHAVDAROV, A. L. YARIN & S. RADEV, Buckling of thin liquid jets, *Journal of Fluid Mechanics*, **253**, 593-615 (1993).
13. L. MAHADEVAN, W. S. RYU & A. D. T. SAMUEL, Correction : Fluid 'rope trick' investigated, *Nature*, **403**, 502 (2000).
14. N. M. RIBE, Coiling of viscous jets, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **460**, 3223-3239 (2004).
15. M. HABIBI, P. MØLLER, N. M. RIBE & D. BONN, Spontaneous generation of spiral waves by a hydrodynamic instability, *Europhysics Letters*, **81**, 38004 (2007).
16. M. HABIBI, Y. RAHMANI, N. M. RIBE & D. BONN, Stagnation, coiling, folding and breakup of viscous jets : A synthesis, *Journal of Fluid Mechanics*, soumis.



# Défauts topologiques (plis) dans les structures cellulaires — De la mue du crabe au croisement de plis en géologie

N. Rivier

IPCMS, Université de Strasbourg  
nick@fresnel.u-strasbg.fr

**Résumé.** La cuticule (épiderme) du crabe est une mousse topologique, un pavage désordonné bidimensionnel constitué de cellules en contact. Deux cellules sont séparées par une arête, et trois cellules et trois arêtes sont incidentes sur un sommet. Les cellules sont hexagonales en moyenne. Un dipole  $5/7$  constitue une dislocation. La division d'une cellule hexagonale crée deux dislocations dos-à-dos,  $7/5|5/7$ , et la division d'une cellule heptagonale permet à une dislocation de monter par rapport à l'autre, laissant derrière elle une rangée de nouvelles cellules, qui esquisse aussi un pli sur un tissu plat. C'est le mécanisme de croissance d'un tissu biologique. La dislocation (dipole de disclinaisons  $5/7$ ) et le pli (matière ajoutée, bornée par deux dislocations) sont des défauts topologiques, que l'on peut identifier en les entourant d'un contour fermé, comme les charges et les courants en électromagnétisme.

Avant de muer, le crabe se construit par le mécanisme ci-dessus une nouvelle cuticule à l'intérieur de la première, copie conforme, mais plus grande et toute plissée. Il se met alors à l'abri, mue, et attend que sa cuticule gonfle et se minéralise en une carapace. Les plis sont aléatoires et se croisent, sinon la nouvelle cuticule ressemblerait à un accordéon, et le crabe serait soit très long, soit très gras.

Tout défaut topologique coûte une énergie élastique que le tissu cherche à minimiser. Un pli peut être une vallée (en  $V$ ) ou une crête (en  $\Lambda$ ). Le croisement d'un  $V$  et d'un  $\Lambda$  est un col (selle de cheval), source de courbure, donc coûteux en énergie et visible (cellule de 7 ou de 8 côtes). En fait, deux plis se croisant constituent une selle pour singe (trois  $V$  pour les jambes et la queue et trois  $\Lambda$ ), sans signature topologique locale et moins coûteuse en énergie. Ce que l'on peut constater en géologie.

**Abstract.** The crab's cuticle is a topological foam, a disordered, two-dimensional tiling by cells in contact. Two cells share an edge (interface), three cells and three edges are incident on a vertex. Cells are hexagonal on average. A dipole  $5/7$  constitutes a dislocation. Division of an hexagonal cell creates a quadrupole of two back-to-back dislocations,  $7/5|5/7$ , and successive divisions of the heptagonal cells enables one dislocation to climb away from the other, leaving behind a row of new hexagonal cells that forms a fold on a flat tissue. This is the mechanism for growth of a biological tissue. The dislocation (itself a dipole of disclinations 5 and 7) and the fold (extra matter, bounded by two dislocations) are topological defects, sources of large, nonlinear distortions, identified when surrounded by a closed contour, like a charge or a current in electromagnetism.

Before moulting, the crab has prepared, by the growth mechanism, its new cuticle that lies under the old one, a conformal, but larger and folded copy of the former, metrically perfect and with all its topological intricacies. It hides, moults and waits for its new cuticle to stretch and harden. Successive cellular divisions create the necessary folds, that are randomly oriented and must cross each other, lest the new crab should resemble an accordion.

A topological defect has an elastic energy, that is minimized by the soft tissue. A fold can look like a valley ( $V$ ) or a crest ( $\Lambda$ ). The crossing of a  $V$  and a  $\Lambda$  is a saddle-point that is costly in energy and identifiable topologically (a negative disclination, isolated cell with 7 or 8 sides). Actually, two crossing folds make up a monkey-saddle (threes  $V$  for the legs and the tail and three  $\Lambda$ ), without local topological signature and less costly in energy; this is as observed in geology or simply on a sheet of paper folded twice.

## 1 Introduction

Avant de muer, le crabe se construit une nouvelle cuticule à l'intérieur de l'ancienne, sa copie conforme, mais plus grande et toute plissée. La nouvelle cuticule est une déformation plastique considérable de l'ancienne, effectuée par un mécanisme intrinsèque. Le crabe se met alors à l'abri, mue, et attend que sa cuticule gonfle et se minéralise en une carapace. Les plis sont aléatoires et se croisent, sinon la nouvelle cuticule ressemblerait à un accordéon, et le crabe serait soit très long, soit très gras [1].

### 1.1 L'élasticité des milieux continus est fondamentalement non-linéaire

L'élasticité d'un matériau est décrite par une application  $\Phi(\mathbf{r}')$  de l'état réel déformé du matériau déformé ( $\mathbf{r}'$ ), sur un état de référence ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}$ ), où toutes les tensions ont été relâchées localement. L'état de référence est sans déformations élastiques; n'y subsistent que les déformations plastiques permanentes [2]. La déformation élastique est décrite par le tenseur des déformation  $\epsilon(\mathbf{r}')$ , ou par le tenseur métrique (matrice des coefficients de la première forme quadratique fondamentale)  $\mathbf{g} = \mathbf{1} + 2\epsilon = \Phi^+ \Phi$  de l'état déformé. La déformation plastique, topologique, n'est jamais infinitésimale. L'application  $\Phi$  a pour matrice jacobienne  $\delta_{ij} + \partial u_i / \partial x'_j$ , où  $\partial u / \partial x'$  mesure la distortion.

Dans la matière molle, ou au voisinage de défauts topologiques, singularités de l'application, les déformations sont importantes, et les termes quadratiques en la distortion ne peuvent pas être négligés, comme ils le sont en élasticité linéaire [3]. Pour les films ou les membranes, il y a, en plus de l'élongation, une déformation de courbure qui est, elle aussi, quadratique en la distortion. L'énergie de courbure de Helfrich [4] s'écrit en termes des courbures principales, valeurs propres de la matrice  $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}$ , qui implique la seconde forme quadratique fondamentale  $\mathbf{b}$  en plus de la première [5].

### 1.2 Trois types de défauts topologiques

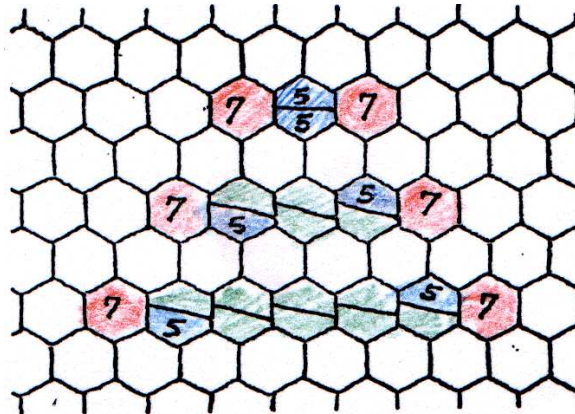
L'état d'un milieu continu élastique est donc décrit par la géométrie différentielle. Les singularités de l'application sont de trois types, avec des tenseurs fondamentaux qui sont les sources de déformations plastiques spécifiques, dont le crabe aura besoin pour constituer sa nouvelle cuticule : La dislocation, défaut de translation; la disinclinaison, défaut de rotation, source de courbure. Le troisième type de défaut, la matière ajoutée (*extra matter*), mesure précisément le tissu supplémentaire impliqué dans la nouvelle cuticule du crabe, donc dans la formation d'un pli. Le tenseur source s'appelle tenseur de non-métricité [2].

## 2 Élasticité et plasticité des matériaux cellulaires : Division cellulaire et plasticité

Ici, le matériau (épithélium biologique tel que la cuticule du crabe, ou surface de la terre en géologie) est représenté comme pavage cellulaire bidimensionnel (trois cellules et arêtes incidents sur un sommet), une mousse de cellules ou de bulles ou d'éléments finis. Alors, l'état de référence est un rayon d'abeille (*honeycomb*), un pavage d'hexagones (ou son dual, une triangulation par triangles équilatéraux). Une cellule de  $6 - q$  côtés représente (le coeur d') une disclination de charge  $q$ , et un dipôle de cellules voisines  $(6 - b)/(6 + b)$ , une dislocation de vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$ , presque perpendiculaire. La matière ajoutée dans un pli est la rangée de cellules entre deux dislocations dos-à-dos. L'application de l'état réel dans l'état de référence est explicite dans un pavage cellulaire. Notamment, un contour fermé (arêtes adjacentes du sommet  $A'$  à  $B' \equiv A'$ ) dans l'état réel, entourant une dislocation, a pour image dans l'état de référence un chemin non fermé  $AB$ . Le vecteur de non-fermeture  $\mathbf{AB}$ , indépendant du point de départ  $\mathbf{A}$ , est le vecteur de Burgers caractéristique de la dislocation. (Exemples et détails [1]).

La croissance d'un tissu, sous des contraintes physiques (comme le confinement sous ou sur un épiderme courbé ou le cisaillement), induisent des transformations topologiques locales, donc la création et le mouvement de défauts topologiques, disinclinaisons, dislocations et matière ajoutée. Une mousse topologique bidimensionnelle peut être le siège de deux transformations topologiques élémentaires locales, la division cellulaire et l'échange de voisins entre quatre cellules [6]. La division d'une cellule hexagonale crée deux dislocations opposées,  $7/5|5/7$ , avec les pentagones voisins. La division ultérieure d'une des cellules heptagonales fait monter l'une des dislocations par rapport à l'autre, et ainsi de suite, pour laisser entre les deux dislocations une rangée de cellules hexagonales supplémentaire  $7/5|6/6|6/6|...|6/6|5/7$ , formant un pli, crête (en  $A$ ) ou vallée (en  $V$ ) (Fig. 1).

C'est évidemment le mécanisme de croissance intrinsèque d'un tissu biologique. (La montée de la dislocation s'arrête sur des disinclinaisons positives, donc au sommet d'appendices ou au fond de cavités).



**Fig. 1.** Matière ajoutée (rangée supplémentaire de cellules) produite par divisions successives, donc par la montée d'une dislocation  $(5/7)$  par rapport à l'autre. Si la première division est symétrique ( $6 \rightarrow 5/5$ ), un pli se forme, crête (en  $\Lambda$ ) ou vallée (en  $V$ ), entre les deux dislocations dos-à-dos. [1]

Notons qu'il y a, en plus de la rangée de cellules supplémentaires, une petite déformation de cisaillement. Par contre, ce n'est pas le mécanisme de formation des plissements géologiques.

La mue du crabe correspond donc à la la copie conforme de sa cuticule, agrandie et plissée, dans un espace géométrique limité et sous fortes contraintes mécaniques. Nous avons présenté le mécanisme local nécessaire à cette plasticité globale. De tels mécanismes de morphogenèse par cisaillement et croissance sont familiers aux biologistes, aux orthodontistes, mais aussi aux artistes (Dürer) et aux caricaturistes.

### 3 Croisement de deux plis

Examinons le croisement de deux plis créés par divisions cellulaires successives et montée de dislocation. Le croisement est non-singulier : Il se fait sur une cellule hexagonale, qui est divisée en 4 hexagones, ou en  $5/7|7/5$  qui se réduit à  $6/6|6/6$  par échange de voisins.

Le croisement d'un pli en  $V$  et d'un pli en  $\Lambda$  formerait un col (selle de cheval), une singularité locale, source de courbure, donc coûteuse en énergie et visible (cellule de 7 ou de 8 côtes). En fait, deux plis se croisant constituent une selle pour singe (trois  $V$  pour les jambes et la queue et trois  $\Lambda$ ), sans singularité ou signature topologique locale et moins coûteuse en énergie. Le vérifier en pliant deux fois une feuille de papier. On peut aussi l'observer en géologie (Fig. 2). Le flambage d'un cylindre en compression le long de son axe est limité par le croisement des plis.

### 4 Longueur des plis entrecroisés

La matière ajoutée dans la nouvelle cuticule du crabe est localisée dans les plis. Les plis sont aléatoires et se croisent, pour garantir l'uniformité et l'isotropie de la matière ajoutée (sauf au voisinage des singularités donnant sa forme au crabe, qui reste quasiment invariante au cours de sa mue). Quelle est la longueur de ces plis entrecroisés ?

L'image dans l'état de référence d'un contour fermé entourant un pli entier dans l'état réel, est un contour fermé (le vecteur de Burgers résultant des deux dislocations opposées bordant le pli est nul). L'image dans l'état de référence d'un contour fermé traversant plusieurs plis (séparant leurs dislocations) a pour vecteur de Burgers la somme vectorielle des vecteurs de Burgers des dislocations dépareillées à l'intérieur. Chaque vecteur de Burgers est de longueur unité (une rangée de cellules supplémentaires) et de direction (perpendiculaire au pli) aléatoire. Les plis non traversés (entièrement à l'intérieur ou à l'extérieur du contour) ne contribuent pas.

Soit un contour de taille linéaire de  $N$  cellules. Il traversera  $\sim N$  plis si les plis sont petits ( $< N$ ), ou tous les plis  $\sim N^2$  si les plis sont grands ( $> N$ ). La longueur du vecteur de Burgers résultant est respectivement  $\sqrt{N}$ , ou  $N$  [7]. Le coût en énergie est beaucoup plus grand et les cicatrices de la croissance sont moins locales dans le second cas, Il semble donc naturel que les plis restent petits dans le crabe où la croissance est contrôlée par le désordre de la structure et la géométrie locale [6]. Notons l'importance du désordre (comme toujours en biologie) : les défauts sont rapidement écartés, invisibles et insensibles à distance.

La problématique de la mue du crabe (*la mémoire de l'épiderme*) a été exposée par Y. Bouligand.



**Fig. 2.** Croisement de deux plis en selle de singe, Big Sur State Park, CA

## Références

1. N. RIVIER, M.F. MIRI & C. OGUEY, Plasticity and topological defects in cellular structures : Extra matter, folds and crab moulting, *Colloids and Surfaces A*, **263**, 39-45 (2005).
2. M.F. MIRI & N. RIVIER, Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A*, **35**, 1727-1739 (2002).
3. F. ROTHEN, PIOTR PIERANSKI, N. RIVIER, A. JOYET, Cristaux conformes *European Journal of Physics*, **14**, 227-233 (1993).
4. J. CHARVOLIN, *Architectures de la matière molle*, p.69, 106, Belin, Paris (2008).
5. B. DOUBROVINE, S. NOVIKOV & A. FOMENKO, *Géométrie Contemporaine I* Mir, Moscou (1982).
6. N. RIVIER & B. DUBERTRET, La topologie de l'épiderme *Pour la Science*, **44** (1), 104-109 (2004).
7. J. M. KOSTERLITZ & D. J. THOULESS, Ordering, metastability and phase transition in two-dimensional systems *Journal de Physique C* (France), **6**, 1181-1203 (1973).

## Ondes non linéaires dans l'expérience de Faraday

N. Rojas<sup>1</sup>, M. Argentina<sup>1</sup>, E. Cerda<sup>2</sup> & E. Tirapegui<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université de Nice-Sophia-Antipolis, UFR Sciences, LJAD, Parc Valrose, 28, avenue Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France

<sup>2</sup> Departamento de Física and Centro para Investigación Interdisciplinaria Avanzada en Ciencias de los Materiales, Universidad de Santiago, Av. Ecuador 3493, Santiago, Chile.

<sup>3</sup> Facultad de Ciencias Físicas y Mat., Depto. Física, Univ. de Chile, casilla 487-3, Santiago, Chile

Nicolas.ROJAS@unice.fr

**Résumé.** Dans ce travail, nous proposons une dérivation robuste des équations non linéaires qui décrivent la dynamique de l'épaisseur d'une couche de fluide mince vibrée dans la limite des petits nombres de Reynolds. Cette approche est en fait suffisamment générale pour qu'elle puisse être appliquée pour tous les problèmes de dynamique de couche mince de fluide visqueux.

**Abstract.** In this article, we propose a robust derivation of the non linear equations that describe the dynamics of a thin fluid layer vibrated, in the limit of the low Reynolds number. This approach is general and remains relevant for thin viscous fluid layer dynamics.

Dans un article publié en 1831, Michael Faraday décrit la formation de structures obtenues en vibrant un plateau recouvert par un milieu granulaire [1]. En annexe, il étudie les patterns constitués d'ondes de surface d'un fluide vibré. Bien plus tard [2], avec l'hypothèse de fluide non visqueux, l'origine de l'instabilité fut proposée : une résonance paramétrique. En approximation shallow water, les ondes de surface se comportent comme des oscillateurs harmoniques de fréquence  $\sqrt{gk}$ ,  $k$  étant le nombre d'onde de la déformation de surface. La vibration périodique du récipient contenant ce fluide induit donc un mouvement périodique des ondes. L'amplitude des ondes de surface obéit donc à une équation de Mathieu, dont les solutions se déstabilisent avec un forçage sous harmonique. Lorsque les effets visqueux sont pris en compte, la surface du fluide vibré se déforme en produisant de petites vagues avec des longueurs caractéristiques sans lien avec la taille du récipient. Les expériences menées sur les fluides visqueux ont montré une grande variété de patterns, comme des carrés, des hexagones, des rhomboèdes [3,4,5,6] mais aussi des quasi-patterns [7,5,6] ou encore des oscillons [8,9,6]. Du point de vue théorique, l'inclusion de la dissipation visqueuse dans la détermination du seuil d'instabilité permet d'obtenir de bonnes prédictions par rapports aux mesures expérimentales [10].

Nous étudions les équations de la dynamique d'un fluide newtonien incompressible décrit par :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

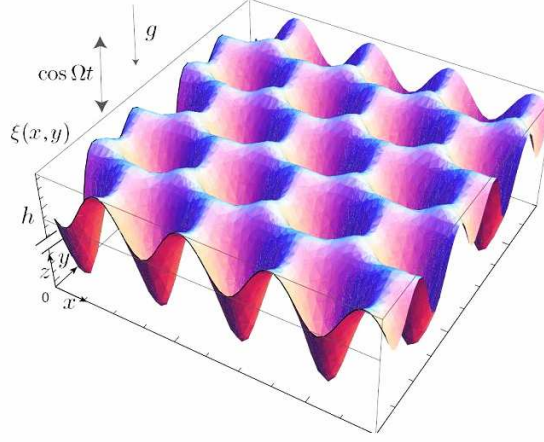
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\nu$  sont la vitesse et la viscosité cinématique du fluide alors que  $\pi = (p - p_s)/\rho$  mesure la déviation de la pression de l'état hydrostatique  $p_s$ . A l'équilibre, cette grandeur est  $p_s = p_0 - \rho g(t)[z - h]$ . Le paramètre  $\rho$  est la densité du liquide. La fonction  $g(t)$  représente l'accélération verticale imposée au fluide, elle se décompose  $g(t) = g(1 + \Gamma \cos(\Omega t))$ .  $\Gamma$  mesure l'accélération imposée par les vibrations du récipient contenant le fluide normalisée par l'accélération gravitationnelle.

Le dispositif expérimental que nous souhaitons modéliser est représenté dans la Figure 1.

A ces équations qui décrivent ce qu'il se passe dans la couche du fluide, il faut rajouter les conditions aux frontières. Sur le récipient, nous considérons les conditions limites de non-glissement, c'est-à-dire la vitesse  $\mathbf{v}(z=0) = 0$  et que la surface du fluide n'est pas cisailée, ce qui se traduit par :

$$T_{jk} \hat{n}_k|_{z=\xi} = [p_0 + \gamma \kappa] \hat{n}_j, \quad (3)$$



**Fig. 1.** Un récipient contenant une épaisseur  $h$  de fluide au repos est mis en vibration périodique et verticale.

où  $T_{jk}$  est le tenseur des taux de déformations,  $p_0$  la pression atmosphérique,  $\gamma$  la tension de surface du fluide et  $\kappa$  la courbure de la surface. Enfin, pour décrire l'évolution de la surface, nous utilisons la condition cinétique que nous écrivons :

$$v_z|_{z=\xi} = \partial_t \xi + (\mathbf{v}_\perp|_{z=\xi} \cdot \nabla_\perp) \xi \quad (4)$$

où l'opérateur  $\nabla_\perp$  représente le gradient par rapport aux variables horizontales  $x, y$ .

Dans le but d'écrire le système sans dimensions, nous effectuons les changements d'échelle suivants :  $t \rightarrow \tilde{t}/\Omega$ ,  $x, y \rightarrow L\tilde{x}, L\tilde{y}$ , la coordonnée verticale et la position de la surface libre :  $z, \xi \rightarrow \tilde{z}, \tilde{\xi}$ . Ces dilatations font apparaître deux paramètres sans dimension  $\epsilon = h/L$  qui mesure le rapport d'aspect de l'expérience et  $R_e = \frac{\Omega h^2}{\nu}$ . Le nombre de Reynolds qui mesure l'importance des effets visqueux par rapport à l'inertie du fluide. Nous obtenons ainsi les deux équations :

$$\begin{aligned} R_e[\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)] \mathbf{v}_\perp &= -\nabla_\perp \pi + (\epsilon^2 \nabla_\perp^2 + \partial_z^2) \mathbf{v}_\perp, \\ \epsilon^2 R_e[\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)] v_z &= -\partial_z \pi + \epsilon^2 (\epsilon^2 \nabla_\perp^2 + \partial_z^2) v_z, \end{aligned} \quad (5)$$

Nous avons enlevé les tildes des variables afin d'alléger les notations. Enfin, les deux conditions limites à la surface deviennent :

$$\begin{aligned} \partial_z \mathbf{v}_\perp|_{z=\xi} + \epsilon^2 [\nabla_\perp v_z + \partial_z \mathbf{v}_\perp (\nabla_\perp \xi)^2 - \nabla_{\mathbf{v}_\perp} (\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla_\perp \xi) - (\nabla_\perp \xi \cdot \nabla_\perp) \mathbf{v}_\perp]|_{z=\xi} \\ - 2\epsilon^2 \nabla_\perp \xi [\nabla_\perp \cdot (\mathbf{v}_\perp|_{z=\xi})] + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\pi|_{z=\xi} + 2\epsilon^2 \nabla_\perp \cdot (\mathbf{v}_\perp|_{z=\xi}) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = G(t)[\xi - 1] + \sigma \kappa, \quad (7)$$

La paramètre  $\sigma$  est relié par la tension de surface  $\tau$  du fluide :  $\sigma = \tau h^3 / \eta \Omega L^4$ . Il est possible de prendre deux limites pour ce système suivant si  $R_e$  est grand ou petit.

Pour de grands nombres de Reynolds, nous obtenons les équations d'Euler étudiées dans l'article écrit par Benjamin et Ursell [2]. Pour de faibles déformations, l'équation qui décrit la position de l'interface est

$$\ddot{\xi}_k + k \tanh(kh)(1 + \sigma k^2 - \Gamma \cos t) \xi_k = 0, \quad (8)$$

où  $\Gamma$  est l'accélération induite par le récipient, normalisée par l'accélération gravitationnelle.  $\xi_k$  est l'amplitude de vibration de nombre d'onde  $k$ . Avec une dilatation temporelle, elle peut être ramenée à une équation de type Mathieu :

$$\ddot{f} + (p^2 - \mu \cos(2t))f = 0 \quad (9)$$

Avec la méthode multi-échelle, appliquée dans la limite des faibles forçages  $\mu$ , nous allons dériver la partie linéaire de l'équation d'amplitude. Pour ce faire, nous écrivons :

$$f = B(T)e^{ipt} + \overline{B(T)}e^{-ipt} + \mu C(t, T) + o(\mu^2). \quad (10)$$

La variable  $T$  est une variable lente, définie par  $T = \mu t$ . La fonction  $C(t, T)$  obéit à la relation suivante :

$$\partial_t^2 C + p^2 C = -2ip\partial_T B e^{ipt} + 2ip\partial_T \overline{B} e^{-ipt} + \cos(2t) \left( B(T)e^{ipt} + \overline{B(T)}e^{-ipt} \right), \quad (11)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique forcé. Les deux premiers termes du forçage sont dits résonnants, car ils induisent une résonance séculaire sur  $C(T)$ . En revanche, le troisième terme génère des oscillations avec des fréquences  $(2 + p)$ ,  $(p - 2)$ ,  $-(2 + p)$  et  $2 - p$ . Une résonance séculaire se produira si une de ces fréquences devient égale à  $\pm p$ . Dans ce cas, le module de la correction  $C(T)$  croît linéairement et peut donc devenir plus grande que  $B(T)$ , ce qui n'est pas compatible avec les hypothèses de calcul. Cependant, si on impose que la somme des termes résonnants du second membre est nulle,  $C(T)$  reste bornée en module. Cette alternative, dite de Fredholm génère l'équation d'amplitude suivante [11] :

$$\partial_T B = -\frac{i}{4} \overline{B}, \quad \text{si } p = 1 \quad (12)$$

$$\partial_T B = 0, \quad \text{si } p \neq 1 \quad (13)$$

Si  $p^2 \neq 1$ , la correction  $C(T)$  contiendra des harmoniques de  $p$ . Dans le cas  $p^2 = 1$ , on parle de résonance paramétrique et il est possible de calculer les termes non linéaires de cette équation. La dynamique de l'amplitude des oscillations  $B$  est régie par l'équation [11] :

$$\partial_t B = (\mu + i\nu)B - (1 + i\alpha)|B|^2 B + \gamma \overline{B} + (1 + i\beta)\Delta B, \quad (14)$$

où le paramètre  $\gamma$  est proportionnel à l'accélération a-dimensionnée induite par le récipient du fluide.

Nous avons ici décrit très succinctement le comportement asymptotique linéaire du fluide non visqueux vibré. Lorsque le fluide est très visqueux, c'est à dire pour des petits nombres de Reynolds, l'approche qui vient d'être présentée n'est plus valable et il faut traiter le problème autrement. Ce sont maintenant les termes inertiels de équations de Navier et Stokes (5) qui sont supposés perturbatifs.

En intégrant sur l'épaisseur du fluide la relation décrivant l'incompressibilité (2) nous obtenons avec la condition cinématique (4) :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \int_0^\xi \mathbf{v}_\perp(\mathbf{x}, z, t) dz. \quad (15)$$

$$\partial_t \xi + \nabla_\perp \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (16)$$

Pour résoudre les équations (3,15,16) avec (5), nous nous plaçons dans la limite de fond peu profond, c'est à dire  $\epsilon \ll 1$ , ce qui permet de faire une expansion de Taylor des différentes variables qui définissent le fluide :  $\mathbf{v}_\perp$ , vitesse dans le plan horizontal,  $v_z$ , composante vertical du champs de vitesse et l'écart à la pression relative  $\pi$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\perp(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \\ v_z(\mathbf{x}, z, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \nabla_\perp \cdot \mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} \\ \pi(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mathbf{x}, t) \frac{z^n}{n!}, \end{aligned} \quad (17)$$

Les nouvelles inconnues sont donc les variables indicées  $v_n(\mathbf{x}, t)$  et  $\pi_n(\mathbf{x}, t)$ . Pour écrire ces équations nous avons utilisé la relation d'incompressibilité du fluide, ce qui explique la présence du gradient horizontal

dans l'expansion de  $v_z$ . En injectant ces définitions dans l'équation (1), nous effectuons l'expansion de Taylor et nous résolvons le système ordre par ordre en puissance de  $z$ . Les inconnues  $\pi_n$  et  $\mathbf{v}_n$  peuvent être calculées dans la limite  $\epsilon$  et  $R_e$  petit devant 1, il résulte qu'elle sont toutes fonctions de deux variables  $\pi_0$  et  $\mathbf{v}_0$  :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= -\epsilon^2 \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0, \\
\pi_2 &= -\epsilon^2 \nabla_{\perp}^2 \pi_0, \\
\mathbf{v}_1 &= \nabla_{\perp} \pi_0, \\
\mathbf{v}_2 &= R_e \partial_t \mathbf{v}_0 - \epsilon^2 [\nabla_{\perp}^2 \mathbf{v}_0 + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0)], \\
\mathbf{v}_3 &= R_e [\partial_t \nabla_{\perp} \pi_0 + 2(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0)] - 2\epsilon^2 \nabla^2 (\nabla_{\perp} \pi_0), \\
\mathbf{v}_4 &= R_e [3(\nabla_{\perp} \pi_0 \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{v}_0 - 3(\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{v}_0) \nabla_{\perp} \pi_0 + 3(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\perp}) \nabla_{\perp} \pi_0 - \mathbf{v}_0 (\nabla_{\perp}^2 \pi_0)] + \mathcal{O}(\epsilon^4, \epsilon^2 R_e, R_e^2), \\
\mathbf{v}_5 &= R_e [-4 \nabla_{\perp} \pi_0 (\nabla_{\perp}^2 \pi_0) + 6(\nabla_{\perp} \pi_0 \cdot \nabla_{\perp}) \nabla_{\perp} \pi_0] + \mathcal{O}(\epsilon^4, \epsilon^2 R_e, R_e^2).
\end{aligned} \tag{18}$$

Il reste à évaluer ces deux inconnues à l'aide de la définition du flux de masse (15) et de la condition aux bord dynamique à la surface du liquide (3). La non linéarité de cette deuxième relation, nous incite à continuer l'expansion de Taylor en puissance de  $\epsilon$  et  $R_e$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_0^{(0)} + R_e \mathbf{v}_0^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{v}_0^{(2)} + \dots \\
\pi_0(\mathbf{x}, t) &= \pi_0^{(0)} + R_e \pi_0^{(1)} + \epsilon^2 \pi_0^{(2)} + \dots
\end{aligned}$$

Ainsi, ordre par ordre nous calculons les termes  $\pi_0^{(i)}$  et  $\mathbf{v}_0^i$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0^{(0)} &= 3 \frac{\mathbf{q}}{\xi^2} \\
\nabla_{\perp} \pi_0^{(0)} &= -3 \frac{\mathbf{q}}{\xi^3} \\
\mathbf{v}_0^{(1)} &= \left[ \frac{3}{4!} \mathbf{v}_2 \xi^2 + \frac{7}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^3 + \frac{2}{5!} \mathbf{v}_4 \xi^4 + \frac{18}{7!} \mathbf{v}_5 \xi^5 \right]_{\epsilon=0} \\
\nabla_{\perp} \pi_0^{(1)} &= \left[ -\frac{15}{4!} \mathbf{v}_2 \xi - \frac{27}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^2 - \frac{7}{5!} \mathbf{v}_4 \xi^3 - \frac{60}{7!} \mathbf{v}_5 \xi^4 \right]_{\epsilon=0} \\
\mathbf{v}_0^{(2)} &= \left[ \frac{3}{4!} \mathbf{v}_2 \xi^2 + \frac{7}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^3 + \frac{1}{2} \mathbf{A} \right]_{R_e=0} \\
\nabla_{\perp} \pi_0^{(2)} &= \left[ -\frac{15}{4!} \mathbf{v}_2 \xi - \frac{27}{5!} \mathbf{v}_3 \xi^2 - \frac{3}{2\xi} \mathbf{A} \right]_{R_e=0}
\end{aligned} \tag{19}$$

Nous avons introduit l'opérateur  $\mathbf{A}$  afin de rendre les expressions plus compactes. Il est défini de la manière suivante :  $\mathbf{A} = -\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{q}) + \frac{3}{2} [\frac{\mathbf{q}}{\xi}, \nabla_{\perp} \xi] - \frac{3}{2} \nabla_{\perp} \xi (\nabla_{\perp} \cdot (\frac{\mathbf{q}}{\xi}))$  avec  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \nabla_{\perp}) \mathbf{a}$  représentant le crochet de Lie. Nous utilisons ces grandeurs dans la condition au bord dynamique tangentielle et nous obtenons finalement avec la relation de conservation de la masse :

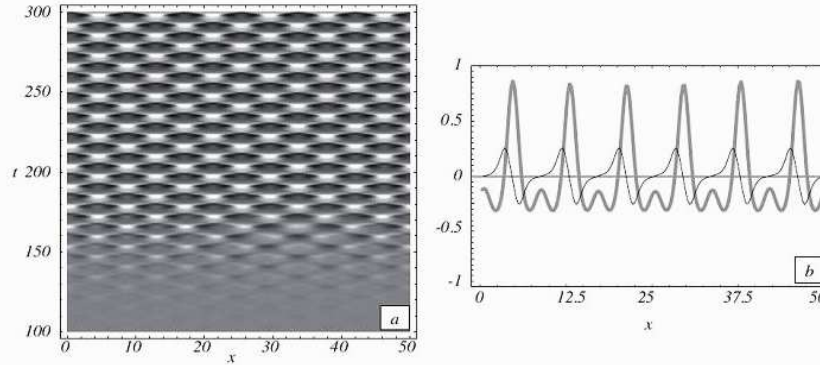
$$\begin{aligned}
&\frac{6}{5} R_e \left[ (\xi^3 \partial_t + \frac{9}{7} \xi^2 (\mathbf{q} \cdot \nabla_{\perp})) (\frac{\mathbf{q}}{\xi}) + \frac{1}{7} \xi \mathbf{q} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{q}) \right] + 3\mathbf{q} + \xi^3 (G(t) - \sigma \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp} \xi \\
&- \frac{3}{2} \epsilon^2 \left[ -\xi^2 \mathbf{A} + \xi^3 \nabla_{\perp} \left( \nabla_{\perp} \cdot (\frac{\mathbf{q}}{\xi}) \right) + \frac{5}{4} \xi^4 \left( \nabla_{\perp}^2 (\frac{\mathbf{q}}{\xi^2}) + \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot (\frac{\mathbf{q}}{\xi^2})) \right) - \frac{9}{10} \xi^5 \nabla_{\perp}^2 (\frac{\mathbf{q}}{\xi^3}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\partial_t \xi + \nabla_{\perp} \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{21}$$

Ces deux équations sont fermées et leur résolution permet de calculer  $\xi$  et  $\mathbf{q}$ , qui sont reliées aux champs de vitesse et de pression au travers de expansions (18) et (19). Contrairement aux approches classiques



faiblement non-linéaires justifiées dans le voisinage des bifurcations, notre approche reste valide tant que les paramètres  $\epsilon$  et  $R_e$  restent petits. Notre calcul est donc basé sur une perturbation du cas très visqueux, alors que les calculs basés sur les formes normales sont des perturbations du cas non visqueux, ou des perturbations aux voisinage des bifurcations. Nos équations non-linéaires peuvent être résolues numériquement par des méthodes de différences finies. En utilisant une discrétisation spatiale *staggered*, où les variables  $q$  et  $\xi$  sont évaluées sur deux grilles décalées d'une demi longueur de discrétisation, la dynamique temporelle est obtenue avec une méthode Runge Kutta précise au quatrième ordre. Les simulations numériques montrent que pour des forçages du type  $G(t) = G(1 + \Gamma \cos(t))$ , une instabilité spatiale se produit en faisant émerger une longueur d'onde. L'amplitude de ces ondulations croient dans le temps avant de se saturer grâce aux non-linéarités. Dans la figure ( 2), nous montrons l'évolution spatio-temporelle de la surface du fluide, ainsi que la distribution spatiale de  $\xi$  et  $q$ .



**Fig. 2.** (a) Evolution Spatiotemporelle de la surface  $\xi - 1$ . Les paramètres sont  $R_e = 5.0$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $G = 3.0$ ,  $B = 0.8$ ,  $\Gamma = 3.5$ ,  $dx = 0.25$ ,  $dt = 0.1$ . (b) Champs  $\xi$  en courbe épaisse grise et  $q$  en courbe fine et noire au temps  $t = 300$ .

Nous avons aussi effectué des simulations numériques sur des domaines horizontaux bi-dimensionnels, avec des forçages sur plusieurs fréquences :  $G(t) = G(1 + \Gamma(\cos \phi \cos(mt) + \sin \phi \sin(nt)))$  et nous montrons dans la figure ( 1) la structure hexagonale que prend l'interface  $\xi$ , lorsque  $\phi$  est voisin de  $\pi/4$ . En revanche, en dehors de ce voisinage, les structures spatiales sont en général de type carrées [12].

De plus, nous retrouvons les équations de Stokes, en négligeant les termes en  $\epsilon^2$  et  $R_e$  :

$$\partial_t \xi = \frac{1}{3} \nabla_{\perp} \cdot (([G(t) - \sigma \nabla_{\perp}^2] \nabla_{\perp} \xi) \xi^3), \quad (22)$$

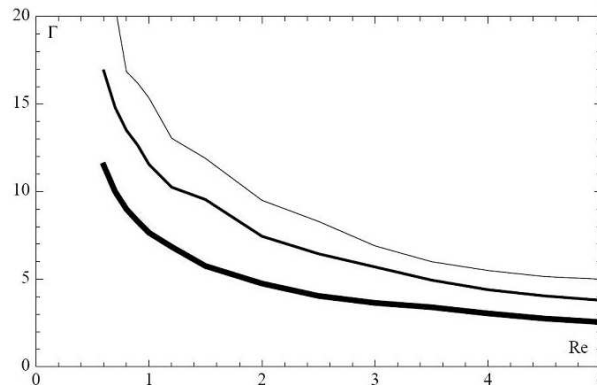
Dans cette limite, l'équation est non-linéaire, puisque le flux de masse  $\mathbf{q}$  est proportionnel à  $\xi^3$ . Dans ce régime de paramètre, si on linéarise le système autour de la position d'équilibre, on constate que le fluide reste stable par rapport à des perturbation spatiales et ce quelque soit la fonction de forçage  $G(t)$ . En effet, l'évolution temporelle des modes spatiaux de Fourier  $h_k(t)$  de nombre d'onde  $k$  sont

$$h_k(t) = h_k(0) \exp \left[ -\frac{k^2}{3} \left( \int_0^t G(s) ds + \sigma k^2 t \right) \right] \quad (23)$$

En revanche, dans le cas d'eau peu profonde  $\epsilon \ll 1$ , la linéarisation du système autour de  $\xi = 1$  et  $q = 0$  donne l'équation d'un oscillateur amorti, forcé paramétriquement :

$$\frac{6}{5} R_e \partial_t^2 \xi + 3 \partial_t \xi - (G(t) - \sigma \nabla_{\perp}^2) \nabla_{\perp}^2 \xi + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon^2 R_e, R_e^2, \dots) = 0.$$

Dans cette limite, nous retrouvons le critère d'instabilité décrit par des précédents travaux [10]. Nous avons mesuré numériquement pour  $G(t) = G(1 + \Gamma \cos(t))$ , la dépendance du seuil d'instabilité en  $\Gamma$ , quand le nombre de Reynolds augmente. Nous avons dessiné nos courbes dans un graphique en Log-Log et il apparaît que seuil est obtenu pour  $\Gamma \sim R_e^{-0.7}$ .



**Fig. 3.** Le seuil d'instabilité de l'accélération normalisée  $\Gamma$  décroît quand le nombre de Reynolds augmente. Les courbes en trait très épais, épais et fin sont obtenues pour respectivement  $B = 0.7$ ,  $B = 7$  et  $B = 15$ . La tension de surface tend à augmenter le seuil d'instabilité pour  $\sigma$ . Les autres paramètres choisis pour ces mesures sont  $\epsilon = 0.5$ ,  $dx = 0.25$ ,  $dt = 0.1$ .

Dans ce travail, nous avons dérivé les équations qui décrivent la dynamique de la surface d'un fluide visqueux, contenu dans un récipient vibrant à faible rapport d'aspect. Nous pensons que notre approche est suffisamment générale pour être développée hors contexte des instabilités de Faraday.

N. O. Rojas remercie le support financier de CONICYT. Les simulations ont été effectuées avec le logiciel XDIM développé par M. Monticelli et P. Couillet.

## Références

1. M. FARADAY, On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **52**, 319-340 (1831).
2. T. B. BENJAMIN & F. URSELL, The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **225**, 505 (1954).
3. H. W. MULLER, Periodic triangular patterns in the Faraday experiment, *Physical Review Letters*, **71**, 3287 (1993).
4. H. ARBELL & J. FINEBERG, Two-mode rhomboidal states in driven surface waves, *Physical Review Letters*, **84** (4), 654 (1999).
5. H. ARBELL & J. FINEBERG, Temporally harmonic oscillons in newtonian fluids, *Physical Review Letters*, **85** (4), 756 (2000).
6. H. ARBELL & J. FINEBERG, Pattern formation in 2-frequency forced parametric waves, *Physical Review Letters*, **E**, **65**, 036224 (2002).
7. W. S. EDWARDS & S. FAUVE, Parametrically excited quasicrystalline surface waves, *Physical Review Letters*, **E**, **47**, 788 (1993).
8. J. WU, R. KEOLIAN & I. RUDNICK, Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton, *Physical Review Letters*, **52**, 1421 (1984).
9. O. LIOUBASHEVSKI, H. ARBELL & J. FINEBERG, Dissipative solitary states in driven surface waves, *Physical Review Letters*, **76**, 3959 (1996).
10. E. A. CERDA & E. L. TIRAPEGUI, Faraday's instability in viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, **368**, 195 (1998).
11. S. DOUADY, S. FAUVE & O. THUAL, Oscillatory phase modulation of parametrically forced surface waves, *Europhysics Letters*, **10**, 309, (1989).
12. N. ROJAS, M. ARGENTINA, E. A. CERDA & E. L. TIRAPEGUI, Faraday waves in viscous fluids, to be submitted to *Physical Review Letters*,

# Le chaos dans l'activité cardiaque : le déterminisme en question.

Elise Roulin, Ubiratan S. Freitas, & Christophe Letellier

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex  
roulin@coria.fr

**Résumé.** L'identification d'une dynamique chaotique à partir de données biologiques, comme à partir de tout autre type de données expérimentales, constitue un véritable défi, principalement parce qu'elle requiert la preuve formelle d'un déterminisme sous-jacent. Une fois de plus, il est montré ici qu'une telle preuve est impossible à obtenir de façon satisfaisante. Toutefois, la détection de non-linéarités et le calcul d'entropies de Shannon à partir d'enregistrements circadiens du rythme cardiaque nous a permis de séparer trois différentes classes de patients, discriminant ainsi des pathologies telles que la fibrillation auriculaire de l'insuffisance cardiaque congestive, et d'un groupe de témoins sains.

**Abstract.** Identifying chaos from biological data as from any experimental data is very challenging, mainly because it requires a definite proof for an underlying determinism. It is shown that once again it was not possible to provide such a proof. Nevertheless, detecting a nonlinearity and computing Shannon entropies helped us to discriminate three classes of subjects, namely healthy subjects, patients with congestive heart failure and patients with atrial fibrillation.

## 1 Introduction

De nombreuses études ont déjà tenté de mettre en évidence le caractère chaotique du rythme cardiaque. La plupart d'entre elles utilisent des critères géométriques tels que les dimensions de corrélation ou les exposants de Lyapunov ([1,2], entre autres). Ces techniques sont peu discriminantes et peu robustes à la présence de bruit ; de plus, elles ne peuvent pas, à elles seules, être concluantes quant à la présence ou non de chaos [3,2]. L'analyse de données suppléatives [4] peut être utilisée pour détecter une non-linéarité sous-jacente à la dynamique ou, lorsqu'elle est associée à une technique de modélisation globale, pour détecter une composante déterministe sous-jacente à la dynamique [5]. Mais là encore, il est impossible de conclure quant à la présence de chaos au sein de la dynamique étudiée.

Un comportement chaotique est décrit par des « fluctuations produites par des lois déterministes qui néanmoins conduisent à une dynamique irrégulière et imprévisible à long terme » [6]. Ainsi, avant de pouvoir affirmer qu'une dynamique présente un caractère chaotique, il est nécessaire de fournir une évidence claire que des équations déterministes la gouvernent. Or les travaux cités précédemment n'ont jamais fourni de véritable preuve du déterminisme du rythme cardiaque. La question de la présence de chaos au sein de l'activité cardiaque « normale », déjà discutée en 1989 [7] sous un angle plus général, demeure donc aujourd'hui encore sans réponse.

Une technique pour répondre à cette question semblait avoir été proposée par Barahona et Poon [8]. Malheureusement, il a récemment été montré que cette technique n'était pas toujours capable de distinguer un bruit coloré (stochastique) d'une dynamique chaotique [9]. Une autre approche, consistant à identifier un modèle global [10,11] directement issu des données expérimentales, a été largement expérimentée et dans des domaines variés tels que la chimie [12,13], l'écologie [14], l'astrophysique [15], etc. Dans tous ces cas, un modèle global a été obtenu, démontrant clairement la présence d'un déterminisme ; à notre connaissance, aucun modèle global n'a été obtenu à partir de données biomédicales. Bien entendu, cet échec à l'identification d'un modèle, et donc à la preuve évidente d'un déterminisme, ne constitue pas une réponse définitive dans la mesure où la technique de modélisation globale n'est concluante que

lorsqu'un modèle est effectivement obtenu. L'absence de modèle à partir des données issues de l'activité cardiaque ne permet pas de conclure à l'absence d'un déterminisme sous-jacent à la dynamique cardiaque.

En effet, il peut devenir impossible d'identifier un modèle global lorsque les variables observées sont de qualité insuffisante, ou inadéquatement choisies, pour décrire l'ensemble de la dynamique [16]. Par exemple, l'identification d'un modèle global à partir d'une série temporelle non bruitée de la variable  $z$  du système de Rössler échoue, en dépit de l'évidence d'un déterminisme sous-jacent. Cette absence de « modélisabilité » est fortement liée à un défaut d'observabilité dont découle la dégradation de l'espace des phases reconstruit [17]. Ainsi, un système déterministe — et ceci même lorsque sa dimension est faible — peut déjà être inobservable sur une partie de l'espace des phases et ceci conduit inévitablement à l'impossibilité d'obtenir un modèle global [17].

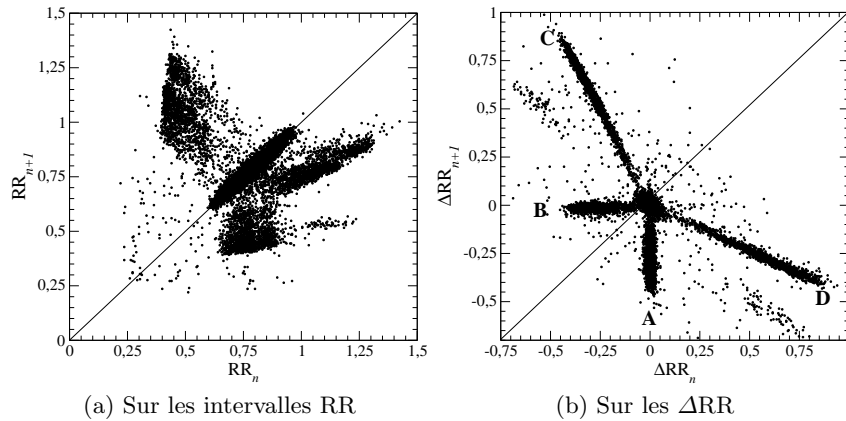
## 2 Etude des dynamiques cardiaques

Dans cette étude, 15 électrocardiogrammes fournis par PhysioNet sont analysés. Ils consistent en 24h consécutives d'enregistrement de l'activité électrique du cœur de 5 patients atteints d'insuffisance cardiaque congestive, 5 autres souffrant de fibrillation auriculaire, et 5 sujets sains. Nous avons procédé à de nombreux essais en vue d'obtenir un modèle global à partir de ces données. Aucune n'a été en mesure de fournir un modèle stable produisant une dynamique plus riche qu'un cycle limite de période 1. Or l'obtention d'un tel modèle ne peut pas aboutir à la conclusion de l'existence d'un déterminisme sous-jacent, dans la mesure où la modélisation de données supplétives, donc non déterministes, conduit également à ce type de cycle limite [18]. En conséquence, une fois de plus, il est impossible de conclure quant à la question du caractère déterministe de la dynamique cardiaque. Néanmoins, nous n'affirmons pas pour autant que la dynamique étudiée est stochastique, puisque de nombreuses causes peuvent être invoquées pour expliquer l'échec de la modélisation globale; entre autres, le manque d'observabilité de la dynamique cardiaque pourrait indiquer que la variable utilisée ne permet pas d'identifier un éventuel déterminisme sous-jacent. Il pourrait être également invoqué que la nature des perturbations extérieures conduit à une variabilité du rythme cardiaque qui, par essence, ne pourrait être qu'aléatoire.

Un objectif plus simple consiste à rechercher la présence d'un processus non-linéaire gouvernant la dynamique. Pour ce faire, la « titration du bruit » [19] repose sur la comparaison entre les prédictions sur un pas en avant fournies respectivement par un modèle linéaire et par un modèle non-linéaire. Pour procéder à la titration des données cardiaques, du bruit blanc (ou corrélé linéairement) de déviation standard  $\sigma$  croissante est ajouté aux données jusqu'à ce que la non-linéarité devienne indétectable [19]. Au-dessus de cette valeur seuil — appelée *limite de bruit*, LB — les modèles non-linéaires deviennent moins performants que les modèles linéaires. Ainsi,  $LB > 0$  indique la présence d'un processus non-linéaire sous-jacent. La valeur LB estime l'impact de ce processus sur la dynamique qui en résulte. Ainsi, la limite de bruit quantifie la présence des non-linéarités éventuelles, mais ne répond en aucun cas à la question du déterminisme et, contrairement à ce qui a été publié, ne permet pas de quantifier une « intensité de chaos » [9]. Dans cette étude, nous avons préféré estimer la probabilité  $p$  avec laquelle un modèle non linéaire fournit de meilleurs prédictions qu'un modèle linéaire, cette probabilité étant bien plus discriminante que la limite de bruit puisque  $LB = 0$  lorsque  $p < 0,99$ .

Commençons par choisir la meilleure observable de la dynamique cardiaque. Une application de premier retour sur les intervalles RR (Fig. 1a) — soit sur la durée entre deux ondes R consécutives, typiquement entre deux battements cardiaques — présente une ellipse, développée le long de la première bissectrice, qui correspond à la variabilité sinusale « normale », soit à la variabilité à long terme. Les points éloignés de la première bissectrice représentent quant à eux de grandes variations d'un battement au suivant : ce sont des arythmies. Quelques nuages pourraient être distingués si leurs frontières n'étaient pas brouillées par la variabilité à long terme.

Afin de nous affranchir de la variabilité circadienne, la variable  $\Delta RR_n = RR_{n+1} - RR_n$  est maintenant utilisée pour reconstruire l'application de premier retour (Fig. 1b) : celle-ci présente un petit nuage de points centré sur l'origine du plan et associé à la variabilité sinusale. Quatre autres nuages de points sont clairement distingués. Chacun d'eux se développe selon un segment bien défini, permettant de caractériser différents processus : le segment vertical  $A$  correspond à la première grande fluctuation du rythme suivant



**Fig. 1.** Applications de premier retour du patient  $c_3$  souffrant d'insuffisance cardiaque congestive.

une phase de faible variabilité (située dans le nuage central); le segment horizontal  $B$  correspond à la dernière grande fluctuation de rythme précédant le retour à une variabilité plus faible. Il est intéressant de remarquer que le segment  $C$  est défini par  $\Delta RR_{n+1} = -2\Delta RR_n$  et le segment  $D$  par  $\Delta RR_{n+1} = -\frac{1}{2}\Delta RR_n$ . La plupart des battements anormaux chez ce sujet sont tels qu'ils lient le segment  $C$  et le segment  $D$ , de façon univoque dans le sens  $C \Rightarrow D$ , et seulement possible dans le sens inverse. Ceci produit une séquence typique pour cette arythmie telle que :

$$\begin{array}{cccccc} RR_n & T & T & T - \tau & T + \tau & T & T \\ \Delta RR_n & 0 & -\tau & +2\tau & -\tau & 0 & \end{array}$$

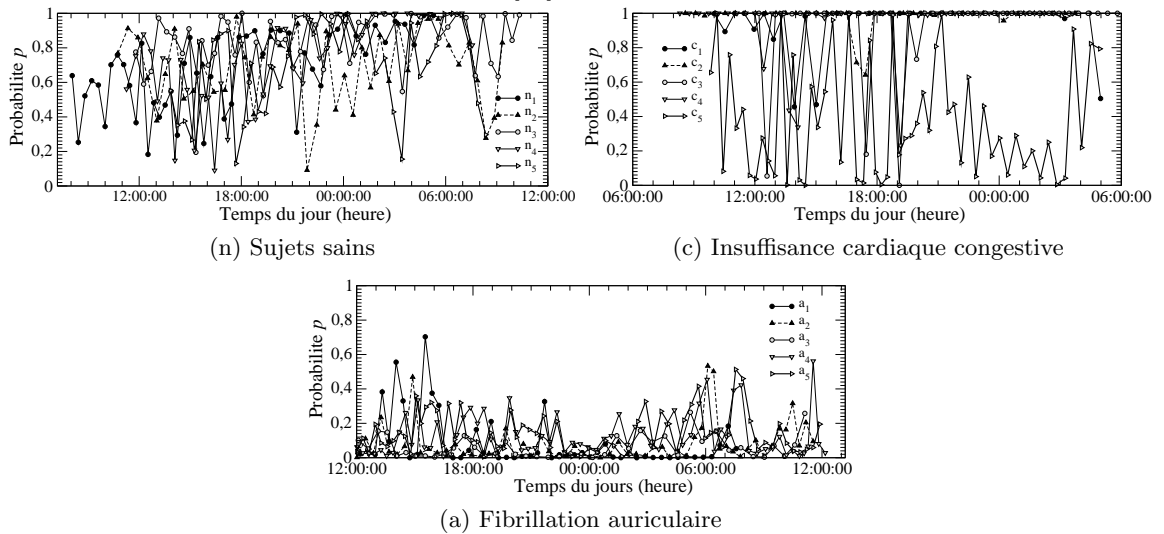
où  $T$  est la valeur moyenne de l'intervalle RR « normal » et  $\tau$  est le délai avec lequel le battement ectopique anticipe le battement normalement attendu.

Un battement prématuré se traduit par l'activation soudaine d'un foyer ectopique provoquant une contraction prématurée du tissu myocardique et conduisant à un RR court, immédiatement suivi d'une compensation permettant une re-synchronisation sur l'horloge cardiaque et se caractérisant par un RR long. La manière la plus simple pour transcrire une telle arythmie est d'enchaîner deux intervalles RR consécutifs de durées respectives de  $T - \tau$  et  $T + \tau$ , ce qui entraîne la succession de trois  $\Delta RR$  « anormaux » :  $-\tau$ ,  $+2\tau$  et  $-\tau$ . La succession immédiate de ces deux battements — court et long — est gouvernée par un processus déterministe; en revanche, la durée du délai  $\tau$  et l'instant de sa première apparition ne le sont pas. Ceci est clairement mis en évidence dans l'application de premier retour sur les  $\Delta RR$  par l'étendue du segment  $A$ , autorisant ainsi de nombreuses valeurs de  $\tau$ . S'il n'est pas possible de conclure quant à l'existence un processus déterministe global gouvernant la dynamique cardiaque, le déroulement de l'arythmie est par contre de nature déterministe.

L'application de premier retour sur les  $\Delta RR$  étant plus instructive que celle sur les intervalles RR, une technique inspirée de la titration du bruit a été appliquée à ces  $\Delta RR_n$  afin de détecter une non-linéarité éventuelle au sein de la dynamique cardiaque. La probabilité  $p$  pour un modèle prédictif non-linéaire d'être plus performant qu'un modèle linéaire est estimée sur une fenêtre de 2000 points (Fig. 2), ce qui permet de suivre l'évolution de la dynamique sur la durée de l'enregistrement. L'observation des variations temporelles de  $p$  pour les sujets sains (Fig. 2n) montrent que les valeurs de  $p$  subissent une dérive temporelle qui semble être liée à la durée de l'enregistrement plutôt qu'à une quelconque rythmicité circadienne.

La probabilité moyenne  $\bar{p}$  qu'un modèle non-linéaire soit plus approprié à la description de la dynamique cardiaque des sujets sains  $n$  est assez élevée (Tab. 1), ce qui tend à prouver qu'un processus non-linéaire sous-jacent gouverne la dynamique cardiaque « normale ». Les patients  $c$  atteints d'insuffisance cardiaque congestive présentent une très forte probabilité  $p$  — proche de 1 la plupart du temps — (Fig. 2c) : ceci indique que leur comportement cardiaque est mieux prédit par un modèle non-linéaire, plus particulièrement durant la nuit. Un seul patient, le  $c_5$ , présente une valeur de  $p$  compatible avec

une meilleure description par un modèle linéaire. En fait, ce patient présente très peu de variations du rythme cardiaque et le nuage central de son application de premier retour sur les  $\Delta RR$  est bien plus confiné que celui des patients sains, présentant cependant le même motif (un seul nuage central). Son comportement est donc presque strictement périodique, ce que nous savons être une situation délétère concernant de nombreux rythmes biologiques [7,20,21]. Les dynamiques cardiaques  $a$  correspondant à des fibrillations auriculaires ont une probabilité moyenne  $\bar{p}$  très faible (Fig. 2a) — typiquement proche de 0,1 — suggérant manifestement que cette activité cardiaque n'est pas mieux décrite par un modèle non-linéaire. À ces résultats s'ajoutent l'absence de modèle global pour décrire la dynamique de la fibrillation auriculaire, et les fluctuations de grande amplitude visibles sur l'application de premier retour qui ne laisse cependant apparaître aucune structure claire; ce qui tend à affirmer que la fibrillation auriculaire résulterait plutôt d'un processus stochastique [22].



**Fig. 2.** Probabilités  $p$  calculées à partir des séries temporelles des  $\Delta RR_n$  pour les 15 sujets.

Ainsi, l'activité cardiaque des sujets sains est gouvernée par une composante non-linéaire prépondérante. Les patients  $c_{1-4}$ , atteints d'insuffisance cardiaque congestive, présentent une composante non-linéaire plus importante encore. La fibrillation auriculaire correspond à une désynchronisation de l'activation cellulaire responsable de multiples réentrées entraînant une activation cyclique et anarchique du myocarde contractile, qui devient mécaniquement inefficace et n'assure plus la fonction de pompe du cœur. Ce comportement chronique s'accompagne de différentes manifestations extérieures de cette insuffisance (hypertension et constriction artérielles, entre autres), et atténue la capacité de réaction du cœur face aux modifications de l'environnement. Seul le sujet  $c_5$  semble présenter un comportement stochastique. Une explication possible pourrait être que le tissu cardiaque, trop endommagé par la pathologie, ne puisse plus présenter un caractère non-linéaire adaptatif.

**Tab.1.** Régressions linéaires de la probabilité  $p$  exprimée en fonction du temps  $t$  (en heures) pour chaque type de sujets.  $\rho$  est le coefficient de corrélation,  $\bar{p}$  la valeur moyenne et  $\sigma_p$  la déviation standard de la probabilité  $p$ .

S	régression linéaire	$\rho$	$\bar{p}$	$\sigma_p$
n	$p = 0.45 + 0.01312t$	0.370	0.726	0.232
c	$p = 0.74 + 0.00339t$	0.058	0.805	0.336
a	$p = 0.10 + 0.00047t$	0.027	0.107	0.123

Les dynamiques cardiaques peuvent également être étudiées par dynamique symbolique [23]. La partition utilisée ici est à trois symboles, et se définit par :

$$\begin{cases} 0 & \Delta RR_n < -\varepsilon \\ 1 & \text{si } -\varepsilon < \Delta RR_n < -\varepsilon \\ 2 & -\varepsilon < \Delta RR_n \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  définit la partition. Les entropies de Shannon  $S_i$  ont été calculées à partir de cette dynamique symbolique [24] pour les 5 patients  $c_i$ , avec  $\varepsilon$  choisi respectivement à 0,05 s ( $P_{05}$ ), puis 0,17 s ( $P_{17}$ ) (Tab. 2). Les entropies les plus discriminantes obtenues pour les 15 sujets sont celles utilisant la partition  $\varepsilon = 0.17$ . Les valeurs moyennes des entropies des trois catégories de sujets se répartissent comme :

$$\overline{S}_n < \overline{S}_c < \overline{S}_a .$$

Dans ce cas, l'entropie très faible associée aux sujets sains indiquerait que la dynamique gouvernant les fluctuations « normales » est plus simple que celle rencontrée chez les sujets c ou a. Ceci est à mettre en regard avec l'apparition de nouveaux foyers d'impulsions observée lorsqu'une pathologie de type insuffisance cardiaque se manifeste, augmentant ainsi le nombre de sources et, de fait, la complexité de la dynamique. Dans le cas de la fibrillation, les foyers se multiplient et se déclenchent irrégulièrement, la dynamique résultante présentant des caractéristiques stochastiques comme l'ont révélé les très faibles valeurs de  $p$  et les valeurs élevées d'entropies.

**Tab.2.** Entropies de Shannon calculées à partir de séquences symboliques à 5 symboles pour les partitions  $P_{05}$  et  $P_{17}$ .

Subjects	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$\overline{S}$	
$n_i$	$P_{05}$	1,67	1,95	2,27	3,29	1,56	2,15
	$P_{17}$	0,13	0,05	0,02	0,12	0,01	0,07
$c_i$	$P_{05}$	0,49	1,40	0,93	0,73	0,06	0,72
	$P_{17}$	0,21	1,72	0,87	0,50	0,02	0,67
$a_i$	$P_{05}$	6,13	5,97	5,81	5,96	5,93	5,96
	$P_{17}$	5,12	4,68	5,41	3,98	3,73	4,58

### 3 Conclusion

Il ne nous est actuellement pas possible de conclure sur le caractère chaotique de la dynamique cardiaque. Néanmoins, nous avons montré que la dynamique cardiaque des sujets sains présentait une très forte composante non-linéaire, contrairement à celle des sujets souffrant de pathologies cardiaques. La dynamique symbolique appliquée à l'activité cardiaque a ensuite permis de discriminer les trois classes de sujets en fonction de leur pathologie, et de « quantifier » la complexité de la dynamique associée. Enfin, l'application de premier retour sur les  $\Delta RR$  a mis en évidence une composante causale dans le processus d'extrasystoles. Nous pensons que ces résultats peuvent contribuer à tendre vers notre objectif final, à savoir l'amélioration des diagnostics médicaux par une meilleure compréhension des effets des pathologies sur la dynamique du corps humain.

*Remerciements* La position de post-doctorant de U. S. Freitas' est soutenue par l'ADIR ASSISTANCE et la Région de Haute-Normandie.

### Références

1. J. E. SKINNER, C. CARPEGGIANI, C. E. LANDISMAN & K. W. FULTON, Correlation dimension of heart beat intervals is reduced in conscious pigs by myocardial ischemia, *Circulation Research*, **68**, 966-976, 1991.

2. S. GUZZETTI, M. G. SIGNORINI, C. COGLIATI, S. MEZZETTI, A. PORTA, S. CERUTTI & A. MALLIANI, Non-linear dynamics and chaotic indices in heart rate variability of normal subjects and heart-transplanted patients, *Cardiovascular Research*, **31**, 441-446, 1996.
3. J. K. KANTERS, N.-H. HOLSTEIN-RATHLOU & E. AGNER, Lack of evidence for low-dimensional chaos in heart rate variability, *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*, **5**, 591-601, 1994.
4. J. THEILER, A. LOGTIN, S. EUBANK, B. GALDRIKIAN & J. D. FARMER, Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data, *Physica D*, **58**, 77-94, 1992.
5. M. E. D. GOMES, A. V. P. SOUZA, H. N. GUIMARÃES & L. A. AGUIRRE Investigation of determinism in heart rate variability, *Chaos*, **10** (2), 398-410, 2000.
6. L. GLASS, Chaos and hear rate variability, *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*, **10**, 1358-1360, 1999.
7. R. POOL, Is it healthy to be chaotic?, *SCIENCE*, **243**, 604-607, 1989.
8. M. BARAHONA & C.-S. POON, Detection of nonlinear dynamics in short noisy time series, *Nature*, **381**, 215-217, 1996.
9. U. S. FREITAS, E. ROULIN & C. LETELLIER, Failure for distinguishing colored noise from chaos by the "Noise titration" technique, *Submitted*.
10. G. GOUESBET & C. LETELLIER, Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial  $L_2$ -approximation on nets, *Physical Review E*, **49** (6), 4955-4972, 1994.
11. L. A. AGUIRRE & S. A. BILLINGS, Identification of models for chaotic systems from noisy data : implications for performance and nonlinear filtering, *Physica D*, **85**, 239-258, 1995.
12. C. LETELLIER, L. LE SCELLER, E. MARÉCHAL, P. DUTERTRE, B. MAHEU, G. GOUESBET, Z. FEI & J. L. HUDSON, Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution, *Physical Review E*, **51** (5), 4262-4266, 1995.
13. C. LETELLIER, J. MAQUET, H. LABRO, L. LE SCELLER, G. GOUESBET, F. ARGOUËL & A. ARNÉODO, Analyzing chaotic behaviour in a Belousov-Zhabotinskii reaction by using a global vector field reconstruction, *Journal of Physical Chemistry A*, **102**, 10265-10273, 1998.
14. J. MAQUET, C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Global models from the Canadian Lynx cycles as a first evidence for chaos in real ecosystems, *Journal of Mathematical Biology*, **55** (1), 21-39, 2007.
15. L. A. AGUIRRE, C. LETELLIER & J. MAQUET, Forecasting the time series of sunspot numbers, *Solar Physics*, **241**, 103, 2008.
16. C. LETELLIER, J. MAQUET, L. LE SCELLER, G. GOUESBET & L. A. AGUIRRE, On the non-equivalence of observables in phase space reconstructions from recorded time series, *Journal of Physics A*, **31**, 7913-7927, 1998.
17. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213, 2005.
18. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & U. S. FREITAS Frequently Asked Questions about global modelling, *Chaos*, submitted.
19. C.-S. POON & M. BARAHONA, Titration of chaos with added noise, *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, **98**, 7107-7112, 2001.
20. J. M. DEKKER, E. G. SCHOUTEN, P. KLOOTWIJK, J. POOL, C. A. SWENNE & D. KROMHOUT, Heart rate variability from short electrocardiographic recordings predicts mortality from all causes in middle-aged and elderly men, *American Journal of Epidemiology*, **145** (10), 899-908, 1997.
21. M. WYSOCKI, C. CRACCO, A/ TEIXEIRA, A. MERCAT, J.-L. DIEHL, Y. LEFORT, J.-P. DERENNE & T. SIMIŁOWSKI, Reduced breathing variability as a predictor of unsuccessful patient separation from mechanical ventilation, *Critical Care Medicine*, **34** (8), 2076, 2006.
22. D. T. KAPLAN & R. J. COHEN, Is fibrillation chaos?, *Circulation Research*, **67**, 886-892, 1990.
23. C. LETELLIER, E. ROULIN, S. LORIOT, J.-P. MORIN & F. DIONNET, Symbolic dynamics for arrhythmia identification from heart variability of rats with cardiac failures, *8th Experimental Chaos Conference*, Florence, June 14-17, 2004.
24. C. LETELLIER, Estimating the Shannon entropy : recurrence plots versus symbolic dynamics, *Physical Review Letters*, **96**, 254102, 2006.



# Equation de Cahn-Hilliard 1D pour les systèmes à phase modulée

Simon Villain-Guillot

Centre de Physique Moléculaire Optique et Hertzienne,  
Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération 33405 Talence Cedex France  
s.villain@cpmoh.u-bordeaux1.fr

**Résumé.** La formation d'un état de phase modulée, où le paramètre d'ordre est modulé spatialement, peut être décrite par une équation de Cahn et Hilliard modifiée comprenant un terme d'interaction à longue portée qui empêche la formation de domaines macroscopiques. En utilisant comme ansatz une famille de solutions stationnaires de l'équation originelle de Cahn et Hilliard, nous avons calculé la période de la phase modulée correspondant à l'état thermodynamique le plus stable. Nous trouvons que cette période varie comme la puissance (1/3) de l'intensité de la force d'interaction à longue portée.

**Abstract.** The formation of modulated phase patterns can be modeled by a modified Cahn-Hilliard equation which includes a long range interaction term preventing the formation of macroscopic domains. Using stationary solutions of the original Cahn-Hilliard equation as analytical ansatzs, we compute the thermodynamically stable period of a 1D modulated phase pattern. We find that the period scales like the power (1/3) of the strength of the long range interaction

## 1 Introduction

Lorsqu'un système homogène est mis soudainement hors équilibre, il va spontanément se séparer en deux phases différentes, plus stables, et caractérisées par deux valeurs différentes du paramètre d'ordre. L'instabilité dominante sélectionnera une modulation du paramètre d'ordre de longueur d'onde bien définie. Et l'amplitude de cette instabilité va croître exponentiellement puis saturer rapidement, du fait des non linéarités. La distribution spatiale du paramètre d'ordre (ou le motif) obtenue sera caractéristique d'une micro ségrégation, composée d'interfaces (ou interphases) bien définies délimitant des domaines monophasés constitués d'une des deux nouvelles phases stables. Ces interfaces vont ensuite interagir mutuellement et coalescer, au cours d'une seconde étape, une dynamique plus lente, auto inhibée, durant laquelle le nombre de domaines va décroître et leur taille typique augmenter. La fin de ce processus, appelé mûrissement d'Ostwald, dépendra du type d'interactions. Soit cette dynamique va jusqu'à son terme et il ne reste alors qu'une seule interface séparant deux domaines semi infinis, un pour chaque nouvelle phase stable : on parle alors de macro ségrégation. Ou bien, en présence d'interactions à longues portées, la coalescence s'interrompt à une certaine échelle, laissant le système dans une phase thermodynamiquement stable de micro ségrégation où le paramètre d'ordre reste modulé spatialement [1].

Dans cet article, nous allons utiliser une famille de solution exacte de l'équation de Ginzburg-Landau comme ansatz pour étudier la micro ségrégation et calculer la période caractéristique de la phase modulée finale, énergétiquement la plus stable.

## 2 Le modèle originel de Cahn et Hilliard

L'équation de Cahn-Hilliard (ou version conservative de l'équation de Ginzburg Landau dépendante du temps) est une équation de diffusion modifiée, pour un paramètre d'ordre scalaire qui s'écrit sous sa forme adimensionnée :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \frac{\delta F_{GL}(\Psi)}{\delta \Psi} = \nabla^2 (-\varepsilon \Psi / 2 + 2\Psi^3 - \nabla^2 \Psi).$$

Le paramètre d'ordre réel  $\Psi$  correspond à la magnétisation dans un ferromagnétique, ou bien à une fluctuation de la densité d'un fluide autour de sa valeur moyenne durant une transition de phase ou bien encore à la concentration locale d'un composant d'un alliage binaire. Cette équation proposée par Cahn et Hilliard [2], a été aussi obtenu à partir de considérations microscopiques par Langer [3]. Un bruit conservatif peut être ajouté pour modéliser les fluctuations thermiques [4]; mais dans cet article, nous n'allons considérer que l'équation (C-H) originelle.

Elle admet deux solutions stationnaires homogènes qui sont les extrema du potentiel symétrique de Landaul  $-\frac{\varepsilon}{4}\Psi^2 + \frac{1}{2}\Psi^4$ . Pour  $\varepsilon$  négatif, il n'y a qu'une seule solution homogène stable :  $\Psi = 0$ . Lorsque le paramètre de contrôle  $\varepsilon$  passe d'une valeur négative à une valeur positive, le système passe par une bifurcation fourche : la solution  $\Psi = 0$  devient instable et deux autres solutions stables apparaissent  $\Psi_b = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ .

**Les réseaux symétriques de Solitons** Si nous cherchons des solutions symétriques satisfaisant  $\langle \Psi \rangle = 0$ , il existe en fait, pour  $\varepsilon > 0$ , toute une famille de solutions de l'équation (G-L) unidimensionnelle [5] :

$$\frac{-\varepsilon}{2}\Psi + 2\Psi^3 - \nabla^2\Psi = 0. \quad (1)$$

Ces solutions, appelées réseaux de solitons, s'écrivent :

$$\Psi_{k,\varepsilon}(x) = k\Delta\text{Sn}\left(\frac{x}{\xi}, k\right) \text{ où } \xi = \Delta^{-1} = \sqrt{2\frac{k^2+1}{\varepsilon}} \quad (2)$$

et où  $\text{Sn}(x, k)$  est la fonction Jacobienne elliptique sine-amplitude, ou cnoïdale. Cette famille de solutions est paramétrée par  $\varepsilon$  et par le module de Jacobi  $k \in [0, 1]$ , ou paramètre de ségrégation. Ces solutions vérifient l'équation (1) et l'intégrale première associée :

$$(\nabla\Psi)^2 = \Psi^4 - \frac{\varepsilon}{2}\Psi^2 + \frac{k^2}{\xi^4}. \quad (3)$$

Elles décrivent un motif périodique de période

$$\lambda = 4K(k)\xi, \text{ où } K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \quad (4)$$

est l'intégrale elliptique complète du premier genre.  $K(k)$  caractérise avec  $k$  la ségrégation, définie comme le rapport entre la taille des domaines monophasés,  $L = \lambda/2$ , et la largeur des interfaces les délimitants,  $2\xi$ .

Cette famille de solutions interpole continûment de la sinusoïde (lorsque  $k = 0$ ), correspondant à la distribution du paramètre d'ordre au voisinage de la température critique [6] ou pour des temps courts [7], et la fonction créneau (pour  $k = 1$ ), appropriée pour décrire la forte ségrégation des phases modulées à basse température [8].

L'équation (4) et la relation  $\xi = \Delta^{-1}$ , permettent de réécrire ces solutions sous la forme :

$$\Psi_{k,\lambda}(x) = \frac{4K(k) \cdot k}{\lambda} \text{Sn}\left(\frac{4K(k)}{\lambda}x, k\right).$$

De plus, en utilisant les équations (2) et (4), nous pouvons relier  $\lambda$ ,  $k$  et  $\varepsilon$  dans une équation d'état

$$\left(\frac{\lambda}{4K(k)}\right)^2 = \frac{2(1+k^2)}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Cette équation implicite nous montre que si l'on impose le paramètre de contrôle  $\varepsilon$ , alors  $\lambda$  et  $k$  sont dépendants l'un de l'autre. Par conséquent, l'amplitude des modulations, mais aussi l'énergie par unité de longueur, sont fonctions d'une seule variable,  $k$  ou  $\lambda$ .

**Calcul de l'énergie** En utilisant l'équation (3), ainsi que  $\int_0^K \text{Sn}^2(x, k) dx = \frac{K-E}{k^2}$  et

$$\int_0^K \text{Sn}^4(x, k) dx = \frac{2+k^2}{3k^4} K - 2E \frac{1+k^2}{3k^4},$$

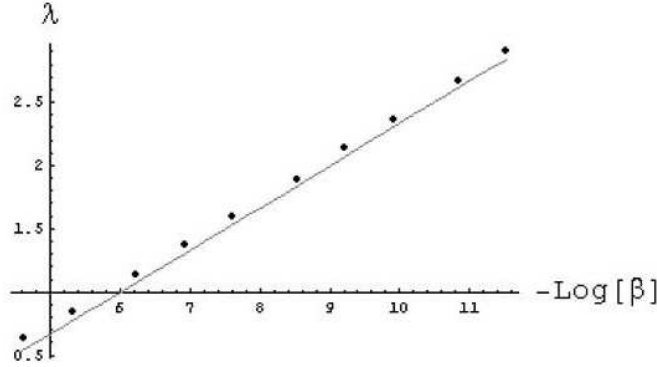
nous trouvons pour  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} F_{GL}(k, \lambda) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{1}{2} (\nabla \Psi(r))^2 - \frac{\varepsilon}{4} \Psi^2(r) + \frac{1}{2} \Psi^4(r) dr = \\ &= \left(\frac{4K}{\lambda}\right)^2 \left[ \frac{-\varepsilon}{4} \left(1 - \frac{E}{K}\right) + \left(\frac{1+2k^2}{6} - \frac{E}{6K} (1+k^2)\right) \left(\frac{4K}{\lambda}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Donc  $F(k = cste, \lambda)$  est minimum pour

$$\left(\frac{\lambda_k}{4K}\right)^2 = \frac{4}{\varepsilon} \left(\frac{1+k^2}{3} + \frac{k^2}{3(1-\frac{E}{K})}\right),$$

tandis que  $F(k, \lambda = cste)$  est minimum pour  $k$  vérifiant l'équation (5) Par conséquent, en aucun point de l'espace  $(k, \lambda)$ , nous ne pouvons avoir simultanément  $(\frac{\partial F}{\partial k})_\lambda$  et  $(\frac{\partial F}{\partial \lambda})_k$  qui s'annulent. Il n'y a donc pas de minimum global, sauf pour  $k \rightarrow 1$  et  $\lambda \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire pour une ségrégation complète (Fig. 1).



**Fig. 1.** Graphe de  $F(k, \lambda)$ . On voit que dans l'espace  $(k, \lambda)$ , les dérivées partielles  $(\frac{\partial F}{\partial k})_\lambda$  et  $(\frac{\partial F}{\partial \lambda})_k$  ne s'annulent jamais simultanément. Il n'y a donc pas de minimum sauf pour  $k \rightarrow 1$  et  $\lambda \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire pour ségrégation complète.

### 3 Cas des phases modulées spatialement : le modèle de Oono

**Présentation du modèle** Dans cet article, nous souhaitons déterminer la période de l'état de phase modulée unidimensionnelle. C'est l'état thermodynamiquement stable dans le cas où il y a une compétition entre deux types de forces d'interactions : une interaction à courte portée qui tend à homogénéiser le système et une force d'interaction à longue portée, ou non local, qui empêche la formation de domaine de trop grande taille. Cette compétition se traduit par la formation d'un état micro séparé (ou super cristal) avec un paramètre d'ordre modulé spatialement, définissant des domaines de taille uniforme [1].

Si nous partons d'un développement de type Ginzburg Landau au voisinage du point critique où les interactions responsables de la modulation sont décrite par des termes locaux, sous forme de dérivées du paramètre d'ordre  $(\nabla \Psi)^2$  et  $(\nabla^2 \Psi)^2$  comme dans le modèle de Swift Hohenberg, il a été montré que, en dessous d'une certaine température, la ségrégation macroscopique, ou séparation globale en deux région semi infinies avec une interface unique, était énergétiquement favorable comparée à une micro séparation de phase [9,10]. Comme il y a toujours une troncation du développement [10,11] ce type d'approche est incapable de prendre en compte les interactions à longue portée entre domaines éloignés. Il a cependant

été montré qu'en leur présence, l'état de phase modulée demeurerait la phase thermodynamiquement stable, même loin du point critique [8].

Une autre approche a été proposée par Oono [12]. Elle repose sur l'étude de la dynamique de la transition de phase, et partant de la description de Leibler [13], Oono a obtenu l'équation de Cahn-Hilliard modifiée suivante, souvent utilisée numériquement :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \nabla^2 \frac{\delta F_{GL}(\Psi)}{\delta \Psi} \right) - \beta^2 \Psi = \nabla^2 \left( -\frac{\varepsilon}{2} \Psi + 2\Psi^3 - \nabla^2 \Psi \right) - \beta^2 \Psi. \quad (7)$$

$-\beta^2 \Psi$  modélise les interactions à longue portée qui vont favoriser la phase modulaire : si  $\Psi$  est constant dans un domaine, la première partie du terme de droite peut s'annuler, mais la seconde partie relancera la dynamique et fragmentera les grands domaines.

**Dérivation du modèle de Oono** Considérons une densité d'énergie libre qui s'écrit

$$F(\Psi) = F_{GL} + F_{int} = \frac{1}{2} (\nabla \Psi(r))^2 - \frac{\varepsilon}{4} \Psi^2(r) + \frac{1}{2} \Psi^4(r) + \int \Psi(r') g(r', r) \Psi(r) dr',$$

où  $g(r', r)$  décrit les interactions à longue portée, à savoir  $4\pi \frac{\beta^2}{|r'-r|}$  pour  $D=3$ , ou  $|x'-x|$  si  $D=1$  [13]. Cette interaction est répulsive si  $\Psi(r')$  et  $\Psi(r)$  sont de même signe ; elle va donc favoriser la formation d'interfaces. Si nous voulons étudier la dynamique de la séparation de phase, nous utilisons l'équation conservative de Cahn-Hilliard :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla_r^2 \left( \frac{\delta F(\Psi)}{\delta \Psi} \right) = \nabla_r^2 \left( -\frac{\varepsilon}{2} \Psi + 2\Psi^3 - \nabla^2 \Psi + \int \Psi(r') g(r', r) dr' \right).$$

En utilisant le fait que  $\frac{-1}{|r'-r|}$  est la fonction de Green associée à l'opérateur Laplacien  $\nabla_r^2$  pour  $D=3$ , l'équation précédente se transforme alors en

$$\nabla_r^2 \left( \int \Psi(r') g(r', r) dr' \right) = \int \Psi(r') \nabla_r^2 g(r', r) dr' = -\beta^2 \int \Psi(r') \delta(r', r) dr' = -\beta^2 \Psi(r).$$

qui permet de retrouver l'équation (7). Remarquons que même avec ce nouveau terme ajouté à l'équation de Cahn Hilliard originel, la dynamique reste conservative.

**Analyse linéaire de stabilité** Pour simplifier, nous prendrons désormais  $\varepsilon = 1$ . Si nous étudions la stabilité linéaire de la solution homogène  $\Psi = 0$ , en considérant ses différents modes de Fourier  $\Psi_{\mathbf{q}}$  à  $t = 0$  :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \Psi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \sigma t},$$

nous trouvons un résultat proche de celui de Cahn et Hilliard, le facteur d'amplification  $\sigma(\mathbf{q})$  s'écrivant maintenant :

$$\sigma(\mathbf{q}) = \left( \frac{1}{2} - \mathbf{q}^2 \right) \mathbf{q}^2 - \beta^2$$

Nous voyons immédiatement que  $\Psi = 0$  est linéairement instable ( $\sigma(\mathbf{q}) > 0$ ) si  $\beta < 0.25$ , avec une bande de modes Fourier instable  $0.5\sqrt{1 - \sqrt{1 - 16\beta^2}} < q < 0.5\sqrt{1 + \sqrt{1 - 16\beta^2}}$ . Le mode le plus instable est toujours  $q_{C-H} = 0.5$  indépendamment de  $\beta$ . Ainsi, durant la première partie de la dynamique (la décomposition spinodale), les domaines monophasiques qui apparaissent ont une taille uniforme proche de  $L_{C-H} = 2\pi$ , exactement comme pour la dynamique de Cahn Hilliard ordinaire.

L'état stationnaire, qui est le résultat de cette dynamique rapide et de sa saturation, est instable vis à vis d'un doublement de période. Cette instabilité est cause du mûrissement d'Ostwald. Mais, contrairement à la dynamique (C-H) simple, où ce processus de doublement de période perdure jusqu'à la

ségrégation complète, nous voyons que dans le cadre du modèle de Oono, les modulations de grandes longueurs d'ondes sont ici stables pour  $q < 0.5\sqrt{1 - \sqrt{1 - 16\beta^2}}$ . Du fait de l'interaction à longue portée, même pour de très petite valeurs de  $\beta$ , il y aura toujours une région autour de  $q = 0$  pour laquelle  $\sigma(\mathbf{q}) < 0$  ( $\sigma(\mathbf{0}) = -\left(\frac{\beta}{4}\right)^2$ ). Ce qui autorise la stabilité d'une phase modulée spatialement.

Cette approche qualitative de la dynamique est confirmée numériquement et quantitativement si l'on regarde directement l'énergie libre.

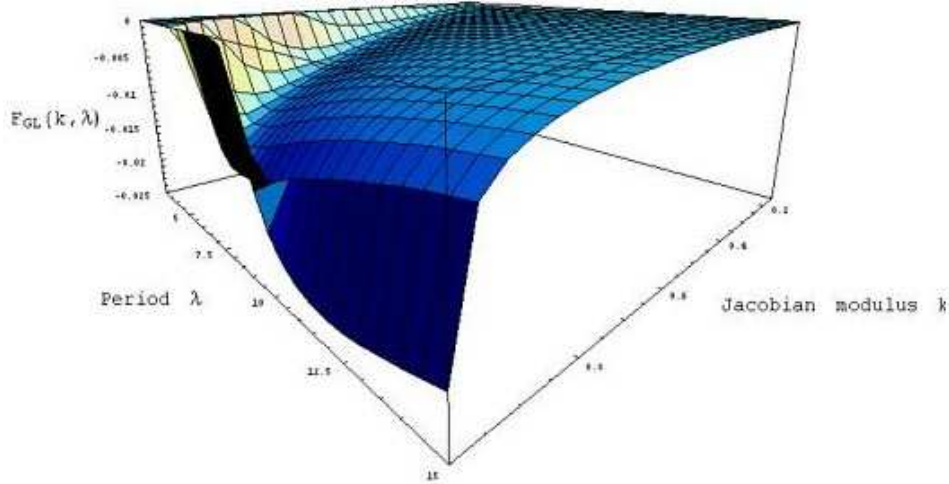
**Calcul de l'énergie libre** Pour  $D=1$ , l'énergie libre par unité de longueur associée à l'interaction à longue portée est [14]

$$F_{int} = \frac{4\pi}{\lambda} \beta^2 \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \Psi(r') |r' - r| \Psi(r) dr dr'.$$

Si nous cherchons des solutions dans la famille d'ansatz  $\Psi_{k,\lambda}(x)$ , nous obtenons alors

$$\begin{aligned} F_{int} &= \frac{4\pi}{\lambda} \beta^2 \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} k^2 \left(\frac{4K}{\lambda}\right)^2 |r' - r| \operatorname{Sn}\left(\frac{4K(k)}{\lambda} r, k\right) \operatorname{Sn}\left(\frac{4K(k)}{\lambda} r', k\right) dr dr' \\ &= \frac{\pi}{K} \beta^2 \int_0^{2K} \int_0^{2K} k^2 |x' - x| \operatorname{Sn}(x, k) \operatorname{Sn}(x', k) dx dx'. \end{aligned}$$

Ainsi, cette contribution est indépendante de  $\lambda$  et ne dépend que de  $k$ . Et la minimisation de l'énergie libre par rapport à  $\lambda$  se fait donc uniquement sur la partie  $F_{GL}$  et nous donne  $\lambda_k = 8K \sqrt{\frac{1+k^2}{3} + \frac{k^2}{3(1-\frac{E}{K})}}$  comme dans l'équation (6). Si nous tenons compte de  $F_{int}$ , nous devons simplement minimiser par rapport à la variable  $k$  la fonction d'une seule variable  $F_{GL}(k) + F_{int}(k)$ , ce qui peut être fait numériquement pour différentes valeurs de  $\beta$ . La Figure 2 présente  $\lambda(\beta^2)$  qui se comporte comme  $(\beta^2)^{1/3}$ .



**Fig. 2.** Graphe de la période  $\lambda(\beta^2)$  obtenue par minimisation numérique de la fonction  $F_{GL}(k) + F_{int}(k, \beta^2)$  par rapport à  $k$ . Nous voyons que les points obtenus vérifient une loi d'échelle en  $(\beta^2)^{1/3}$ .

## 4 Conclusion

Même si l'équation de Oono est singulière en  $\beta = 0$ , la famille de solutions  $\Psi_{k,\lambda}(x)$  est un bon ansatz pour décrire les profils pour  $D=1$ . Numériquement (surtout pour les faibles valeurs de  $\beta$ ) nous trouvons des solutions numériques proches de  $\Psi_{k,\lambda_k}(x)$ , avec  $k$  donné par la minimisation de  $F_{GL}(k, \lambda_k) + F_{int}(k)$ .

Cependant, si l'on regarde en détail, les domaines ne sont plus exactement homogènes mais présentent une faible concavité. Si on impose des conditions au bords (i.e. on fixe la périodicité), cette concavité devient de plus en plus prononcée lorsque  $\beta$  croît et conduira éventuellement à une fragmentation des domaines ( $\lambda \rightarrow \lambda/2$ ).

Contrairement à un développement des interactions en gradient du paramètre d'ordre [9,10] où, suffisamment loin du point critique, la ségrégation devient macroscopique, nous vérifions ici que pour le modèle de Oono, la phase où le paramètre d'ordre est modulé spatialement demeure la phase qui est énergétiquement sélectionnée, même pour les grande valeur de  $\varepsilon/\beta^2$ .

*Remerciements* Je tiens à remercier la Fondation Sciences Mathématiques de Paris qui a financé ma participation au semestre « Singularités » organisé par L. Saint-Raymond, C. Josserand et J. Eggers au Centre Emile Borel, Institut Henri Poincaré.

## Références

1. M. SEUL & D. ANDELMAN, *Science*, **267**, 476 (1995).
2. J. W. CAHN & J. E. HILLIARD, *Journal of Chemical Physics*, **28**, 258 (1958).
3. J.S. LANGER, *Annals of Physics*, **65**, 53 (1971).
4. H.E. COOK, *Acta Met.*, **18**, 297 (1970).
5. A.I BUZDIN & V.V. TUGUSHEV, *Sov. Phys. JETP*, **58**, 428 (1983).
6. A. BRAZOVSKII, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **68**, 175 (1975) — *Sov. Phys. JETP*, **41**, 85, (1975).
7. S. VILLAIN-GUILLOT & C. JOSSERAND, *Physical Review E*, **66**, 036308 (2002).
8. D. ANDELMAN, F. BROCHARD & J.-F. JOANNY, *Journal Chemical Physics*, **86**, 3673 (1987).
9. A.I BUZDIN & H. KACHKACHI, *Journal of Chemical Physics*, **86**, 3673(1987).
10. R. R. NETZ, D. ANDELMAN & M. SCHICK, *Physical Review Letters*, **79**, 1058 (1997).
11. K. KAWASAKI, T. OTHA & M. KOHROGUI, *Macromolecules*, **21**, 2973 (1988).
12. Y.OONO & S. PURI, *Physical Review Letters*, **58**, 836 (1987) — Y.OONO & Y. SHIWA, *Modern Physics Letters B*, **1**, 49 (1987).
13. L. LEIBLER, *Macromolecules*, **13**, 1602 (1980).
14. F. LIU & N. GOLDENFELD, *Physics Review A*, **41**, 4805 (1989).

# Index

Aguirre Luis, 70  
Alexandrou Antigoni, 124  
Amroun Aliane Dalila, 1  
Anantharaman Arnaud, 6  
Argentina Médéric, 188  
Aziz-Alaoui M. A., 46, 142

Bachelard Romain, 12, 52  
Barkley Dwight, 118  
Bielawski Serge, 154  
Bodea Simona, 18  
Boedec Gwenn, 24  
Boimond Jean-Louis, 88  
Bonn Daniel, 178  
Bortolozzo Umberto, 100  
Boudaoud Arezki, 34  
Bouget François-Yves, 130  
Boyer François, 28  
Brunel Marc, 1

Cadivel Martin, 142  
Cadot Olivier, 34  
Cancès Eric, 6  
Casanova Didier, 124  
Cebron David, 40  
Cerdeña Enrique V., 188  
Chandre Cristel, 12  
Chetrite Raphaël, 82  
Ciliberto Sergio, 82  
Clerc M. G., 100  
Corellou Florence, 130  
Corson Nathalie, 46  
Couprie Marie-Emmanuelle, 12, 52  
Cuvelier Antoine, 172

De Buyl Pierre, 52  
De Ninno Giovanni, 52  
Deschamps Julien, 166  
Duchemin Laurent, 58  
Dudley John Michael, 94  
Durniak Céline, 64

Elías R. G., 100

Falcon Eric, 28  
Fanelli Duccio, 12, 52

Finot Christophe, 94  
Freitas Ubiratan Santos, 70, 172, 194

Gawedzki Krzysztof, 82  
Georgelin Marc, 166  
Ginoux Jean-Marc, 76  
Godoy-Diana Ramiro, 118  
Gomez-Solano Juan Rubén, 82

Habibi Mehdi, 178  
Hamaci Samir, 88  
Hammani Kamal, 94  
Harvey Paul, 64  
Haudin Florence, 100  
Herreman Wietze, 40  
Hombly Fabrice, 24

Jaeger Marc, 24  
Juric Damir, 160

Larger Laurent, 148  
Lavorel Guillaume, 106  
Le Bars Michael, 40, 58, 106, 136  
Le Dizès Stéphane, 40  
Le Gal Patrice, 40, 136  
Leblond Hervé, 1  
Lefranc Marc, 130, 154  
Leoncini Xavier, 12  
Leonetti Marc, 24  
Letellier Christophe, 1, 70, 76, 172, 194

Malasoma Jean-Marc, 112  
Marais Catherine, 118  
Masson Jean-Baptiste, 124  
Maubert Pierre, 40  
Millot Guy, 94  
Morant Pierre-Emmanuel, 130  
Morfill Gregor, 64  
Morize Cyprien, 136  
Moulay Djamila, 142  
Muir Jean-François, 172

Naeck Roomila, 172  
Nourine Mourad, 148

Oden Jérémy, 154

Périnet Nicolas, 160  
Pastur Luc, 1  
Peil Michael, 148  
Petrosyan Artyom, 82  
Pocheau Alain, 18, 166  
Popoff Michel, 124

Rabarimanantsoa Herinaina, 172  
Rahmani Yaser, 178  
Residori Stefania, 100  
Ribe Neil, 178  
Rivier Nicolas, 184  
Rojas Nicolas, 188  
Roulin Elise, 194  
Ruffo Stefano, 12

Samsonov Dmitry, 64

Sanchez François, 1

Thommen Quentin, 130  
Tilgner Andreas, 136  
Tirapegui Enrique, 188  
Touzé Cyril, 34  
Tuckerman Laurette, 160  
Turkcan Sylvan, 124

Vandermoëre Constant, 130  
Vergassola Massimo, 124  
Villain-Guillot Simon, 200  
Voisinne Guillaume, 124

Wesfreid José-Eduardo, 118

Zhdanov Sergey, 64