

Multiplicité extrême de motifs convectifs

Laurette S. Tuckerman¹ & Katarzyna Borońska²

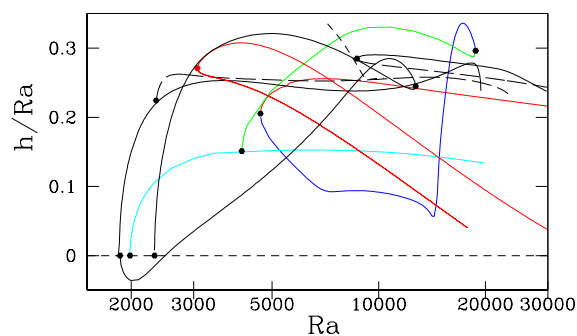
¹ PMMH-CNRS (ESPCI, P6, P7), 10 rue Vauquelin, 75231 Paris

² LIMSI-CNRS, B.P. 133, 91403 Orsay Cedex

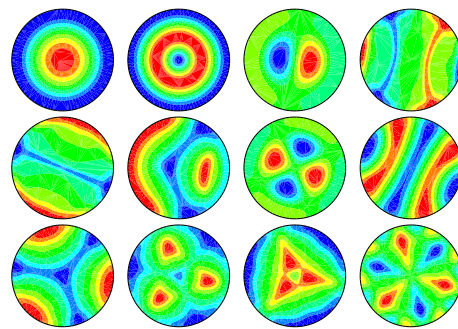
laurette@pmmh.espci.fr

Résumé. Dans un cylindre rempli d'eau ($Pr = 6.7$) et ayant rayon deux fois la hauteur ($\Gamma \equiv R/H = 2$), Hof, Lucas et Mullin [1] ont observé *cinq* motifs distincts différents au même nombre de Rayleigh, $Ra = 14\,200$: deux, trois et quatre rouleaux parallèles, un motif “mercedes” avec trois zones radiales de fluide descendant ou montant, et même un état axisymétrique. Ayant réussi à simuler ces motifs numériquement, nous avons cherché à construire un diagramme de bifurcation complet et, en particulier, de comprendre la relation entre ces motifs et les états créés à partir de l'état conductif, qui doivent obligatoirement être de nature trigonométrique. Le diagramme s'avère extrêmement riche, avec au moins 14 branches d'états stationnaires stables et instables, et au moins 2 branches d'états oscillatoires, liés entre eux par des bifurcations. Ce diagramme représente un compromis entre, d'un côté, les principes physiques régissant la convection dans l'intérieur, tels que la sélection de nombre d'onde, et de l'autre côté, les principes mathématiques de symétrie imposés par les frontières cylindriques du récipient.

Dans un cylindre rempli d'eau ($Pr = 6.7$) et ayant rayon deux fois la hauteur ($\Gamma \equiv R/H = 2$), Hof, Lucas et Mullin [1] ont observé *cinq* motifs distincts différents au même nombre de Rayleigh, $Ra = 14\,200$: deux, trois et quatre rouleaux parallèles, un motif “mercedes” avec trois zones radiales de fluide descendant ou montant, et même un état axisymétrique. Ayant réussi à simuler ces motifs numériquement, nous avons cherché à construire un diagramme de bifurcation complet et, en particulier, de comprendre la relation entre ces motifs et les états créés à partir de l'état conductif, qui doivent obligatoirement être de nature trigonométrique.



(a) Diagramme de bifurcations



1ère rangée : tore, deux tores, dipole, trois rouleaux.

2ème rangée : deux rouleaux, CO, pizza, quatre rouleaux.

3ème rangée : mercedes, trefle, mitsubishi, marguerite.

Non représentés : tore, deux tores et deux rouleaux instables.

Fig.1. Diagramme de bifurcations (gauche) contenant 15 branches stationnaires.

Pour effectuer l'intégration temporelle des équations de Boussinesq, nous avons utilisé un code pseudo-spectral, que nous avons aussi adapté de sorte à calculer les états stationnaires par la méthode de Newton et la stabilité linéaire par la méthode d'Arnoldi [2]. Nous avons initialisé nos simulations avec la même perturbation à des différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra , menant à des différents motifs convectifs. Ceux-ci ont, à leur tour, été utilisés comme conditions initiales pour d'autres simulations temporelles et la continuation des branches.

Le diagramme, montré dans la figure 1, s'avère extrêmement riche, avec au moins 15 branches d'états stationnaires stables et instables, et au moins 2 branches d'états oscillants, liés entre eux par des bifurcations. Ce diagramme représente un compromis entre, d'un côté, les principes physiques régissant la convection dans l'intérieur, tels que la sélection de nombre d'onde, et de l'autre côté, les principes mathématiques de symétrie imposés par les frontières cylindriques du récipient.

Dans la figure 2, nous montrons les premières bifurcations à partir de l'état conductif. Ces bifurcations sont forcément vers des états trigonométriques. Pour notre rapport d'aspect, $\Gamma = 2$ et avec des parois latérales isolantes, les quatre premiers seuils sont ($m = 1, Ra = 1828$), ($m = 2, Ra = 1849$), ($m = 0, Ra = 1861.5$), et ($m = 3, Ra = 1985$). Seulement la première branche ($m = 1, Ra = 1828$) peut être stable près du seuil.

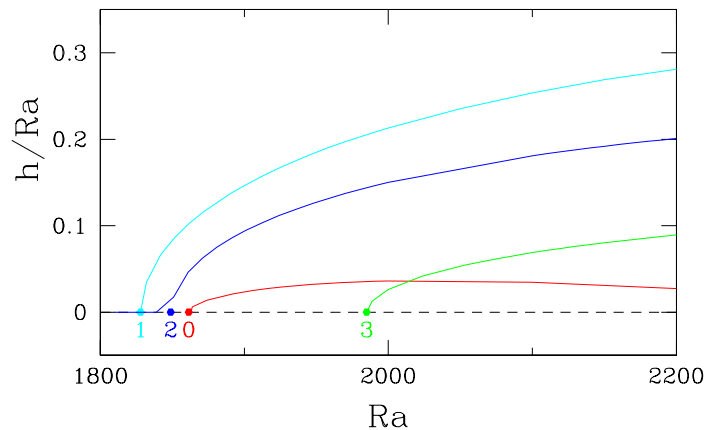


Fig.2. Premières bifurcations à partir de l'état conductif.

Afin d'éclaircir le diagramme 1, nous montrons des diagrammes partiels, certains liés avec les premières bifurcations. Le plus esthétique, montré dans la figure 3, est celui issu de la bifurcation primaire ayant $m = 3$. Quatre branches différentes y appartiennent, nommées **Marguerite**, **Mitsubishi**, **Trèfle** et **Mercedes**. Nous montrons ensuite les branches issues de la bifurcation primaire ayant $m = 2$. Ce diagramme, montré dans la figure 4, contient deux branches, nommées **Pizza** et **Quatre rouleaux**. Les branches axisymétriques sont montrées dans la figure 5.

Références

1. B. HOF, G. J. LUCAS & T. MULLIN, Flow state multiplicity in convection, *Physics of Fluids*, **11**, 2815–2817 (1999).
2. C.K. MAMUN & L.S. TUCKERMAN, Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow, *Physics of Fluids*, **7**, 80–91 (1995).

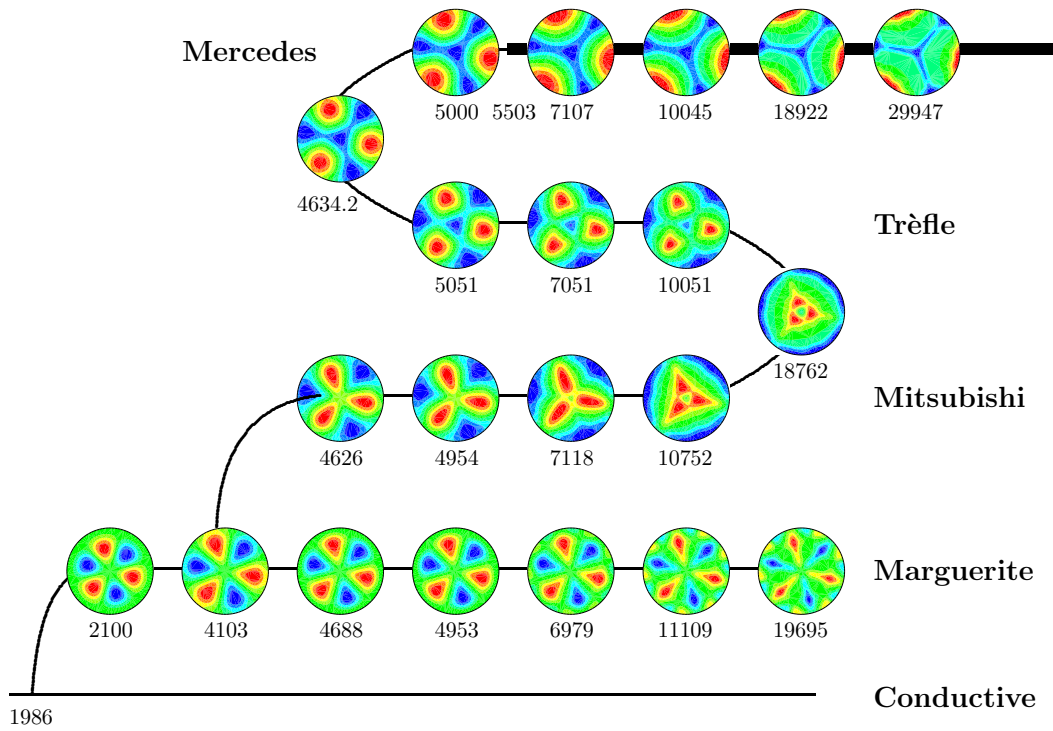


Fig.3. Diagramme de bifurcation partiel et schématique des branches ayant une symétrie de rotation d'ordre trois. La branche **Conductive** devient instable à $Ra = 1986$ vers un mode propre trigonométrique $m = 3$. La branche que nous avons nommé **Marguerite** est créée à cette bifurcation et subit une bifurcation à $Ra = 4103$ qui brise la symétrie entre le fluide chaud montant et le fluide froid descendant, ce qui mène à la branche **Mitsubishi**. Des bifurcations noeud-col à $Ra = 18762$ et à $Ra = 4634.2$ relie celle-ci aux branches **Trèfle** et **Mercedes**. Seulement la branche **Mercedes** est stable, et ceci que à partir de $Ra \geq 5503$, comme le montre le trait plein.

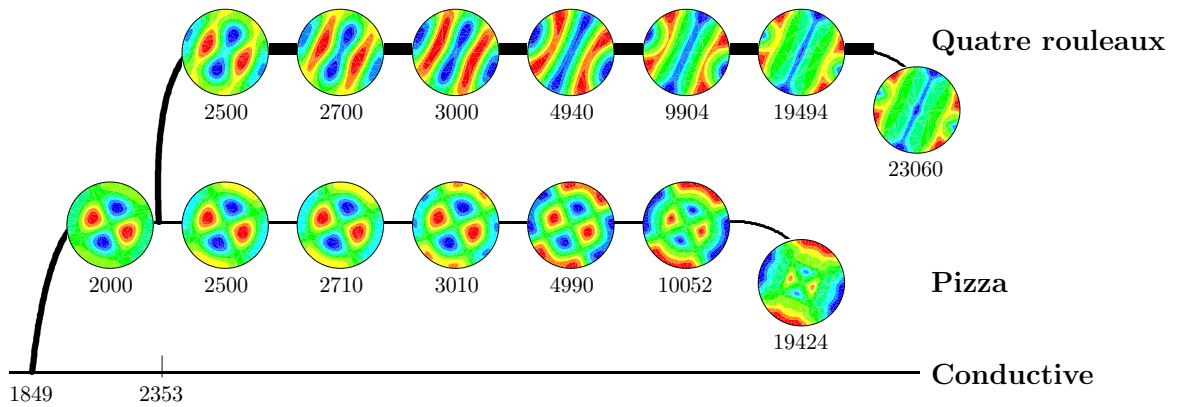


Fig.4. Diagramme de bifurcation partiel et schématique des branches issues de la bifurcation primaire ayant $m = 2$. La branche **Pizza** est créée à la bifurcation de fourche primaire à $Ra = 1849$ et existe jusqu'à $Ra \leq 19450$, où elle termine à une bifurcation noeud-col. Elle est stable pour $1878.6 \leq Ra \leq 2353$. A $Ra = 2353$, la branche pizza subit une bifurcation secondaire qui brise la symétrie entre le fluide chaud ascendant et le fluide froid descendant, menant à l'état ayant **Quatre rouleaux**. Cette branche termine à une bifurcation noeud-col à $Ra \approx 23060$. Elle est stable pour $Ra \leq 22638$.

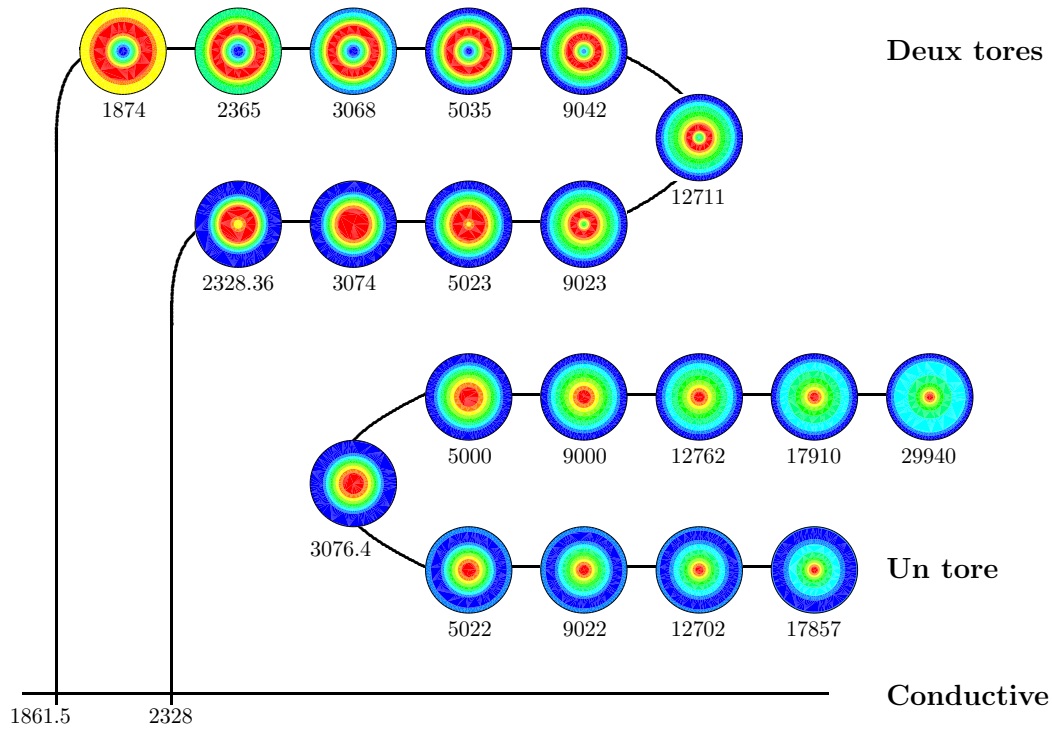


Fig.5. Diagramme de bifurcation partiel et schématique des branches axisymétriques ($m = 0$). Les deux branches supérieures résultent de deux bifurcations de fourche à partir de la branche conductive à $Ra = 1861.5$ et $Ra = 2328$. Certains de ces états contiennent deux rouleaux convectifs toroidaux (**Deux tores**). Ces deux branches se rencontrent et disparaissent à une bifurcation noeud-col à $Ra = 12711$. Deux autres branches sont issues d'une bifurcation noeud-col à $Ra = 3076.4$. Ces états contiennent un rouleau toroidal (**Un tore**). La branche supérieure est stable pour $Ra \geq 4917$ et existe au moins jusqu'à $Ra = 29940$, tandis que la branche inférieure est instable et ne peut être calculée plus loin que $Ra = 17857$.