

Magnétohydrodynamique dans un disque képlerien : instabilité magnéto-rotationnelle et saturation non linéaire

A. Ribeiro¹, C. Nore^{1,2}, J. Léorat³, & J.-L. Guermond⁴

¹ LIMSI-CNRS, BP133, 91403 Orsay Cedex, France

² Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay cedex, France

³ LUTH, Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon, France

⁴ Department of Mathematics, Texas A&M University, 3368 Tamu, College Station, TX 77843-3368, USA

ribeiro@limsi.fr

Résumé. Nous présentons des simulations globales et non linéaires obtenues avec un code [1] éléments finis MHD (magnétohydrodynamique) en coordonnées cylindriques permettant d'imposer différentes conditions aux limites magnétiques entre vide et régions conductrices. Nous étudions l'évolution d'un écoulement azimuthal képlerien de fluide conducteur au sein d'un disque d'axe Oz , de faible épaisseur, soumis à un champ magnétique extérieur uniforme H_0 parallèle à l'axe. Cette configuration initialement stationnaire peut se déstabiliser par instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) suivant le choix des paramètres de contrôle, le nombre de Prandtl magnétique $Pm = Rm/Re = \nu/\eta$ (fixé ici à 1), le nombre de Reynolds Re et le nombre de Hartmann $Ha = \mu_0 H_0 L \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ qui mesure l'intensité du champ appliqué (où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, σ la conductivité électrique, ρ la masse volumique, ν la viscosité cinématique et η la diffusivité magnétique). La croissance exponentielle des fluctuations avec un taux proche de la fréquence de rotation maximale entraîne l'apparition d'une force de Lorentz qui va modifier l'écoulement azimuthal initial en brisant la symétrie équatoriale, mettant ainsi fin à cette phase linéaire. Les caractéristiques temporelles et spatiales du régime de saturation non linéaire dépendent des deux paramètres Re et Ha que nous avons fait varier. Les conditions aux limites magnétiques entre vide et conducteur jouent aussi un rôle primordial dans le régime non linéaire.

Abstract. A nonlinear and global numerical model for the magnetorotational instability in a disk geometry is considered using a MHD finite element code in cylindrical coordinates and different magnetic boundary conditions between vacuum and conducting regions. We study the evolution of a conducting fluid quasi-keplerian flow in a flat disk embedded in a uniform magnetic field H_0 parallel to the flow axis Oz . This configuration is selected as an initial condition since it can exhibit the linear magnetorotational instability (MRI) for a chosen range of control parameters, the magnetic Prandtl number, $Pm = Rm/Re = \nu/\eta$ (fixed to 1 herein), the Reynolds number Re and the Hartmann number $Ha = \mu_0 H_0 L \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ which measures the magnetic field intensity (where μ_0 is the vacuum permeability, σ the electric conductivity, ρ the fluid density, ν the kinematic viscosity and η the magnetic diffusivity). The fluctuation exponential growth with a growthrate comparable with the maximum rotation frequency generates a Lorentz force which will then become sufficiently strong to modify the initial azimuthal flow and breaks the equatorial symmetry. This leads to the end of the linear MRI stage. The temporal and spatial characteristics of the nonlinear regime depend on the parameters Re and Ha that are varied. The magnetic boundary conditions between vacuum and conducting regions also play a major role.

1 Introduction

L'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) a été mise en évidence de façon indépendante par Velikhov en 1959 et par Chandrasekhar en 1960. Son importance en astrophysique a été relevée par Balbus et Hawley en 1991 [2]. Elle a depuis été l'objet de nombreuses publications (voir par exemple l'article de revue [3]) soit théoriques soit numériques. Elle intervient dans de multiples scénarios astrophysiques faisant intervenir des phénomènes variés susceptibles d'apparaître dans des écoulements compressibles, avec moment angulaire, soumis à un champ de gravitation central, etc. La situation la plus simple donnant naissance à cette instabilité se rencontre dans un écoulement cisailé incompressible. Les écoulements d'intérêt astrophysique peuvent en effet souvent être classés dans cette catégorie comme, par exemple, dans les disques proto-stellaires ou les disques galactiques. Nous allons vérifier que de tels écoulements, qui

sont linéairement stables du point de vue purement hydrodynamique, deviennent instables en présence d'un champ magnétique uniforme. Cela peut être montré soit par une analyse locale du cisaillement [2] soit par une analyse globale [4,5], qui doit tenir compte des conditions aux limites du problème. Nous présentons ici un modèle numérique global et non linéaire.

2 Modèle numérique de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI)

2.1 Etat d'équilibre initial et conditions aux limites

Pour étudier les effets magnétohydrodynamiques (MHD) dans un écoulement en cisaillement, nous considérons un cylindre (plat) d'axe de symétrie Oz et de rayon R plus grand que sa hauteur L dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Nous étudions numériquement la perturbation d'un écoulement de type képlerien, purement azimutal $(u_r, u_\theta, u_z)(r, \theta, z, t) = (0, V(r), 0)$ et soumis à un champ magnétique extérieur uniforme $(0, 0, H_0)$. Afin de pouvoir comparer avec des publications précédentes de l'étude linéaire de la MRI [4,5], nous choisissons le profil $V(r)$ utilisé par [4]. Ce profil est caractérisé par un paramètre s_0 , tel que, près de l'axe du disque ($r \ll s_0$), le fluide est en rotation solide et, loin de l'axe ($r \gg s_0$), il développe un profil képlerien :

$$V_\theta(r) = \frac{\Omega_0 r}{\left(1 + \left(\frac{r}{s_0}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1)$$

Pour compenser les pertes par diffusion visqueuse, est appliquée la force motrice purement azimutale suivante :

$$f_K(r) = -\nu \left(\Delta V(r) - \frac{V(r)}{r^2} \right) = \frac{15}{2} \frac{\Omega_0 \nu}{s_0} \frac{X^2(1 + 0.1X^3)}{(1 + X^3)^{\frac{5}{2}}}, \quad (2)$$

où ν est la viscosité cinématique et $X = r/s_0$. Pour que $(0, V(r), 0)$ soit l'état de base cinématique, des conditions de glissement sans frottement (free-slip) sont imposées en $z = \pm L/2$: $u_z = 0, \partial u_r / \partial z = 0, \partial u_\theta / \partial z = 0$. En $r = R$, c'est-à-dire à la paroi latérale qui sépare le fluide du vide, on impose des conditions de Dirichlet : $u_r = 0, u_z = 0, u_\theta = V(R)$. Dans l'article [4], les conditions aux limites magnétiques sont telles que les composantes tangentielles du champ magnétique s'annulent : $B_r = 0, B_\theta = 0$ en $z = \pm L/2$. Ces conditions simplifiées seront appelées ici conditions de 'pseudo-vide' (PV). Le code SFE-MaNS [1] (voir section 2.3) que nous avons développé peut aussi bien traiter le cas des conditions PV que les conditions exactes de continuité du champ magnétique entre le conducteur et le vide dénotées 'vrai-vide' (VV). On sera amené à comparer l'importance de ces conditions aux limites magnétiques sur la solution à temps longs.

2.2 Equations de la MHD pour la MRI

Pour adimensionner les équations de la MHD, on utilise la hauteur du cylindre L et le temps de retournement $1/\Omega_0$ comme unités de longueur et de temps et $V^* = \Omega_0 L$ comme unité de vitesse. L'unité du champ magnétique est définie par $V^* \sqrt{\rho/\mu_0}$ (vitesse d'Alfvén), μ_0 la perméabilité magnétique du vide et ρ la densité du fluide. Les équations adimensionnées de la magnétohydrodynamique s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{h} + \mathbf{f}_K \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{h}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{h} \end{cases} \quad (3)$$

où la viscosité cinématique ν et la diffusivité magnétique η sont uniformes. Le processus diffusif est contrôlé par les deux paramètres standards : le nombre de Reynolds cinétique $Re = \Omega_0 L^2 / \nu$ et le nombre de Reynolds magnétique $Rm = \Omega_0 L^2 / \eta$. Le rapport de ces deux nombres, $Pm = Rm / Re = \nu / \eta$, est le nombre de Prandtl magnétique fixé à un dans notre étude ($Pm = 1$). La valeur numérique du champ uniforme extérieur ($H_0 = V^* h_0 \sqrt{\rho/\mu_0}$) doit être fixée par les conditions initiales. Une mesure pratique

du champ est donnée par le nombre de Hartmann : $Ha = \mu_0 H_0 L \sqrt{\sigma/\rho\nu} = (LV^*/\sqrt{\nu\eta})h_0$. On note que l'unité de longueur choisie dans [4] est la demi-hauteur du disque $L/2$, l'unité de vitesse correspondante est $\Omega_0 L/2$, d'où les relations entre leurs nombres de Reynolds magnétique C_Ω et de Hartmann Ha' et les nôtres (Rm, Ha) qui sont données par :

$$C_\Omega = \frac{Rm}{4}, \quad Ha' = \frac{Ha}{2}. \quad (4)$$

La région centrale ($r \ll s_0$) n'est *a priori* pas importante dynamiquement puisque le cisaillement y est nul. On choisit donc pour s_0 une valeur proche de la hauteur du disque, $s_0/L = 2.5$, comme dans [4]. Cette valeur détermine la vitesse azimutale maximale V_{max} atteinte en $r^* = 2^{1/3}s_0$. Une fois la géométrie fixée par (L, R, s_0) , les paramètres de contrôle sont Pm pour le fluide, Re pour l'écoulement et Ha pour l'amplitude du champ magnétique.

2.3 Caractéristiques de la méthode de résolution des équations couplées

La méthode développée et qui ne sera pas détaillée dans cette note, permet de résoudre les équations complètes de la MHD en trois dimensions pour toute géométrie axisymétrique (sphère, cylindre, ellipsoïde,...), qui sont d'un grand intérêt à la fois dans le domaine astrophysique et le domaine expérimental. L'algorithme permet de considérer un domaine de calcul numérique hétérogène composé de matériaux de conductivités électriques différentes. De manière naturelle, les équations sont résolues dans un repère cylindrique ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$) et chaque variable du problème est décomposée en séries de Fourier (cosinus-sinus) dans la direction azimutale \mathbf{e}_θ . A partir d'un problème 3D initial, on obtient ainsi M problèmes 2D couplés (M étant le nombre de modes de Fourier) à résoudre dans un plan méridien de la géométrie considérée. L'approximation de la solution dans le plan méridien est effectuée à l'aide d'éléments finis de Lagrange.

Le champ magnétique dans les régions isolantes est exprimé comme le gradient d'un potentiel scalaire $\mathbf{H}^v = \nabla\phi$ du fait qu'il soit à rotationnel nul. On réduit ainsi le nombre de variables du problème et on se restreint à des domaines géométriques dont le vide est simplement connexe. L'originalité de la méthode repose sur l'emploi d'une technique de pénalisation de type Galerkin discontinu pour imposer les continuités requises par le champ magnétique au niveau des interfaces isolant/conducteur. Il s'agit d'assurer la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} et de la composante normale de $\mu_r \mathbf{H}$.

Les équations de Navier-Stokes sont résolues à l'aide d'un schéma prédicteur-correcteur sous forme rotationnelle optimale pour l'approximation de la pression et l'avancée temporelle est discrétisée au moyen d'un schéma BDF2. La méthode de résolution des équations de Maxwell est détaillée et validée dans [1] et s'est avérée efficace dans le domaine de la dynamo cinématique. Les équations couplées sont résolues de façon alternée en temps.

3 Instabilité magnétorotationnelle (MRI)

Dans un champ magnétique externe uniforme et purement axial, l'écoulement quasi-képlerien $(0, V(r), 0)$ est une solution stationnaire que l'on va perturber par un faible champ azimutal. Le régime à temps courts devrait être décrit par les équations linéarisées et relever de l'instabilité magnétorotationnelle pour une gamme finie de nombres de Hartmann à un nombre de Reynolds magnétique fixé. L'intervalle d'instabilité a été déterminé dans [4] pour des perturbations axisymétriques dans le cas d'un cylindre de rayon infini. La symétrie par rapport à l'équateur ($z \rightarrow -z$) de ces perturbations est primordiale et les auteurs de [5] ont montré que les perturbations magnétiques quadrupolaires (i.e. paires en z) sont plus instables que les perturbations dipolaires (i.e. impaires en z).

On choisit donc la perturbation suivante pour $-0.5 \leq z \leq 0.5$ et $0 \leq r \leq R$:

$$(h_r, h_\theta, h_z) = (0, \cos(\pi z) \sin(\pi r/R), 0) \quad (Q) \quad (5)$$

L'excitation est caractérisée par la plus grande échelle verticale possible dans le cylindre et s'annule en R . Par exemple, pour $Rm = 154$, la plage d'instabilité MRI s'étend de $Ha \simeq 3$ à $Ha \simeq 38$. Nous

études d'abord le cas $Rm = 154$, $Ha = 33.6$, près de la branche à grands Ha avec $R/L = 30$. Les champs magnétique et cinétique fluctuants sont obtenus en soustrayant l'écoulement de base $V(r)$ de u_θ et le champ appliqué H_0 de h_z . La figure 1 (a) montre l'évolution temporelle des énergies magnétique et cinétique fluctuantes jusqu'à $t = 900$ soit 150 tours environ. Comme la perturbation initiale n'est pas un vecteur propre de l'instabilité, elle crée des oscillations faibles d'ondes d'Alfvén qui sont ensuite suivies par le régime MRI de $t = 20$ à $t = 70$. La figure 2 représente la forme des champs fluctuants au temps $t = 25$ (i.e. après 4 tours) pendant la phase linéaire MRI. Ces champs sont semblables à ceux de [4] obtenus en intégrant les équations linéarisées dans un disque de rayon infini et des conditions magnétiques PV. Le régime MRI prend fin à environ $t = 80$ (voir figure 1 a) lorsque la force de Lorentz, croissant de façon exponentielle, devient assez forte pour modifier l'écoulement de base quasi-képlerien.

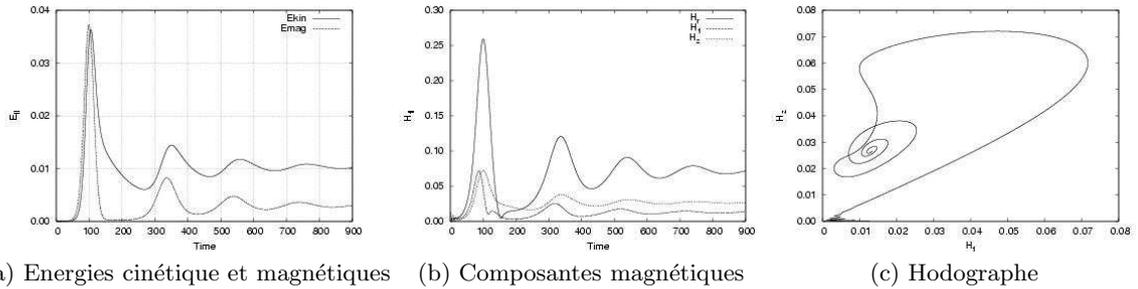


Fig.1. Disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$: (a) Evolution temporelle des énergies cinétique et magnétique fluctuantes; (b) Evolution temporelle des composantes magnétiques fluctuantes (H_r , H_θ , H_z); (c) Hodographe de H_z vs H_θ .

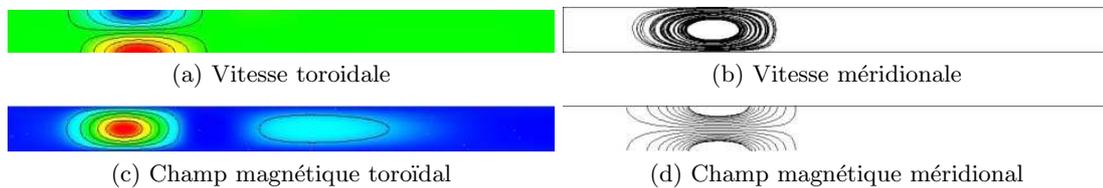


Fig.2. Vecteurs propres dans un disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$ et $t = 25$ pour une vue tronquée $0 \leq r/L \leq 20$ (le calcul est effectué dans un disque $R/L = 30$). L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

4 Evolution non linéaire

Le régime non linéaire à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$ est caractérisé par des maxima quasi-simultanés d'énergies cinétique et magnétique fluctuantes d'amplitudes décroissantes (voir figure 1 a). Des hodographes (figure 1 c) traçant une composante du champ magnétique fluctuante en fonction d'une autre (par exemple issues de la figure 1 b) suggèrent que le système évolue à $Rm = 154$ vers un point fixe à temps longs. Aux temps courts, la composante verticale de la force de Lorentz (impair en z) est plus faible que les deux autres composantes (aussi impaires en z) mais elle augmente plus vite et conduit à la brisure de symétrie équatoriale du champ de vitesse. Malgré la force de Lorentz, la symétrie quadrupolaire de l'état MRI est retrouvée à temps longs (voir figure 3) avec un quadrupole inversé (fig. 3 c et d).

Ce premier cas d'étude nous a permis de valider notre modèle de l'instabilité MRI en regard de références basées sur l'intégration des équations linéarisées [4,5] mais aussi de démontrer l'importance de la prise en compte du régime non linéaire.

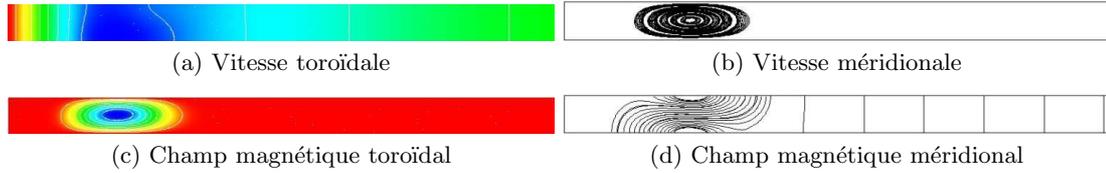


Fig.3. Champs magnétiques fluctuants dans un disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$ et $t = 900$ pour une vue tronquée $0 \leq r/L \leq 20$ (le calcul est effectué dans un disque $R/L = 30$). L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

5 Vers de plus grands nombres de Reynolds et des conditions aux limites réalistes

Afin de simuler de plus grands nombres de Reynolds magnétiques (avec $Pm = 1$) tout en limitant le temps calcul, nous avons choisi de diminuer le rapport de forme ($R/L = 15$) en vérifiant que les résultats étaient inchangés. Nous nous intéressons maintenant à $Rm = 280 = Re$ et $Ha = 32$ correspondant à la zone médiane d'instabilité MRI où la croissance linéaire doit être la plus rapide. Nous comparons les résultats obtenus selon les conditions aux limites magnétiques PV et VV.

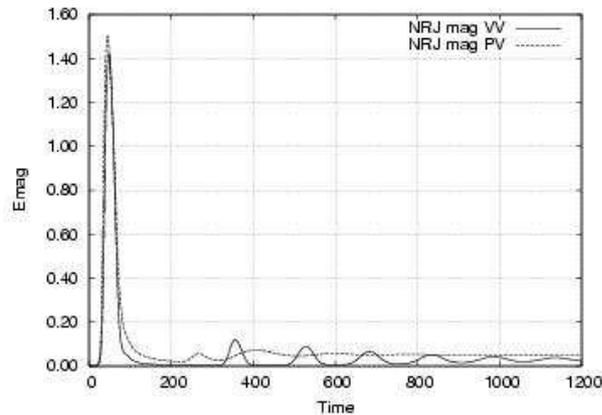


Fig.4. Disque képlerien à $Rm = 280$, $Ha = 32$: évolution temporelle des énergies magnétiques fluctuantes.

L'évolution temporelle des énergies magnétiques fluctuantes dans les cas PV et VV est représentée en figure 4. Elle est très différente suivant les conditions magnétiques. La distribution spatiale des champs à temps courts est similaire dans les deux cas (voir figure 5) et suit une répartition quadrupolaire comme attendu pour la perturbation (5) utilisée. Le taux de croissance de l'instabilité MRI est 0.2 (PV) et 0.19 (VV), ce qui donne un taux de croissance normalisé $\gamma_{\tau_{rot}} = 1.26$ et $\gamma_{\tau_{rot}} = 1.20$ respectivement, en accord avec les résultats de [5]. La croissance se fait donc sur un temps de retournement de l'écoulement. L'écart entre les deux cas se manifeste aux temps intermédiaires : la figure 6 montre à $t = 200$ des symétries différentes (le champ magnétique toroïdal reste pair au cours du temps pour le cas PV alors qu'il peut changer de parité pour le cas VV). A temps longs, la symétrie quadrupolaire est retrouvée pour les deux cas (voir figure 7) mais avec des orientations opposées. On retrouve encore pour $Re = 280$ des états stationnaires. Le travail en cours consiste à augmenter Re dans la configuration VV en vue de comparer avec les régimes chaotiques obtenus dans les calculs locaux à des nombres de Reynolds de l'ordre de 700 [6].

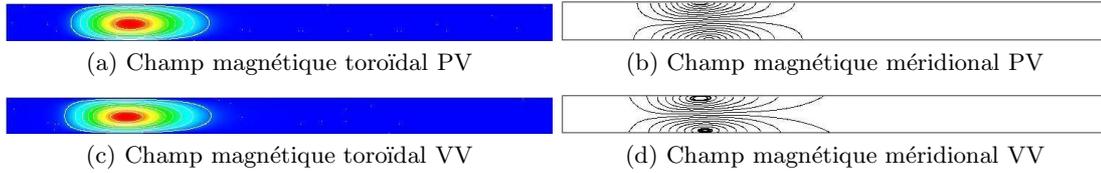


Fig.5. Champ magnétique fluctuant dans un disque képlerien à $Rm = 280$, $Ha = 32$ et $t = 25$ pour $0 \leq r/L \leq 15$: (a-b) PV, (c-d) VV. L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

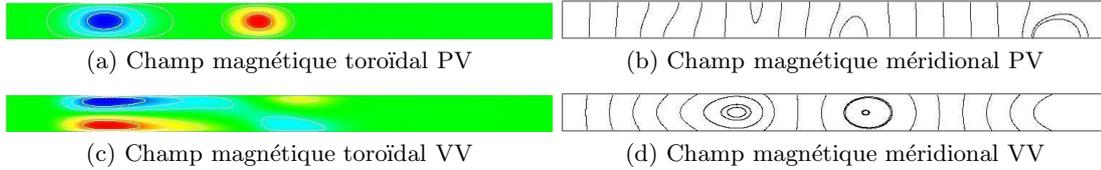


Fig.6. Comme la figure 5 mais à $t = 200$.

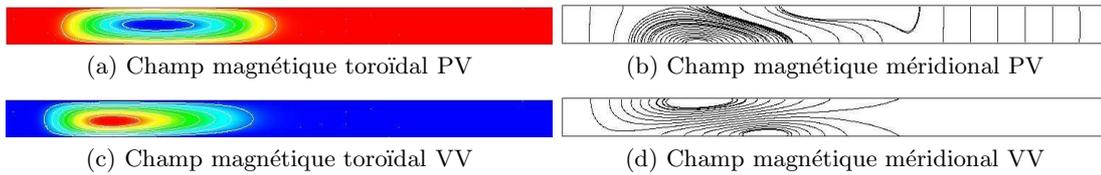


Fig.7. Comme la figure 5 mais à $t = 1200$.

Références

1. J.-L. GUERMOND, R. LAGUERRE, J. LÉORAT & C. NORE, An Interior Penalty Galerkin Method for the MHD equations in heterogeneous domains, *Journal of Computational Physics*, **221**, 349-369, (2007).
2. S. A. BALBUS & J. F. HAWLEY, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I-Linear analysis, *Astrophysical Journal*, **376**, 214-222, (1991).
3. S. A. BALBUS & J. F. HAWLEY, Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks, *Reviews of Modern Physics*, **70**, 1-53, (1998).
4. L. L. KITCHATINOV & M. V. MAZUR, On the global stability of rotating magnetized disks, *Astronomy & Astrophysics*, **324**, 821-828, (1997).
5. L. L. KITCHATINOV & G. RUDIGER, Seed fields for galactic dynamos by the magnetorotational instability, *Astronomy & Astrophysics*, **424**, 565-570, (2004).
6. A. BRANDENBURG, A. NORDLUND, R. F. STEIN & U. TORDELSSON, Dynamo-generated turbulence and large scale magnetic fields in a Keplerian shear flow, *Astrophysical Journal*, **446**, 741-754, (1995).