

# Modèles POD pour la zone de paroi d'un canal turbulent

B. Podvin & L. Lorang

LIMSI-CNRS UPR3251, Université Paris-Sud, 91403 Orsay Cedex  
podvin@limsi.fr

**Résumé.** Nous étudions comment la zone de paroi d'un canal plan turbulent peut être représentée par un modèle d'ordre réduit correspondant à une projection de Galerkin sur les modes POD de l'écoulement. Les hypothèses de dérivation du modèle sont confrontées à la simulation numérique. Les prédictions du modèle sont comparées aux résultats de la simulation. En particulier nous examinons dans quelles conditions le modèle présente un comportement apparemment chaotique, qualitativement semblable à celui observé dans la simulation

**Abstract.** POD-based low-order models are built for the wall layer of a turbulent plane channel flow. We use a Galerkin projection of the Navier-Stokes equations onto the POD modes to obtain a system of ordinary differential equations for the POD modes. The derivation assumptions are validated using results from direct numerical simulation. The model predictions are compared with the direct computation of the POD modes in the simulation. In particular, we wish to determine under which conditions the model behavior is apparently chaotic, and qualitatively similar to that of the true POD modes.

## 1 Introduction

Les modèles réduits fondés sur la POD ont été appliqués à une grande diversité d'écoulements, provenant aussi bien d'expériences que de simulations numériques. La POD (Décomposition Orthogonale aux valeurs propres) est une technique statistique introduite par Lumley [7] et appliquée pour la première fois à l'écoulement turbulent dans une conduite cylindrique. Aubry *et al* [1] ont été les premiers à construire un modèle d'ordre réduit pour la zone de paroi d'un canal plan turbulent. D'autres exemples de réduction de modèles incluent la couche de mélange plane [2], un jet plan turbulent (Gordeyev [3]), ou les structures transitionnelles de la couche limite de plaque plane Rempfer and Fasel [10] ou les écoulements de sillage.

Représenter correctement la dynamique dans la zone de paroi d'un canal turbulent s'avère difficile, en raison de plusieurs facteurs. L'un de ces facteurs est la diversité des échelles mises en jeu. Les filaments de vitesse longitudinale alternativement rapides et lents, les 'streaks' s'étendent typiquement sur plusieurs centaines d'unités de paroi. Leur séparation transverse est bien définie et s'établit autour d'environ 100 unités de paroi. Les structures vorticales alignées avec l'écoulement sont en général caractérisées par des dimensions plus restreintes.

Un autre facteur est la complexité du mécanisme par lequel les diverses structures présentes dans la zone de paroi se génèrent et interagissent entre elles. Diverses théories ont été proposées, telles que celle de Waleffe [12,13], ou celle de Jimenez and Pinelli [5]. Notre point de vue ici est différent. Plutôt que de proposer une étiologie des structures cohérentes, nous utilisons l'existence de ces structures comme point de départ et cherchons à reproduire leur dynamique à l'aide d'une troncature acceptable des équations de Navier-Stokes. Une représentation de ces structures spatiales est fournie par la POD et un modèle pour l'évolution de ces structures peut être obtenu en projetant les équations de Navier-Stokes sur la base des fonctions POD. La dynamique prédite par le modèle est alors comparée aux résultats de la simulation numérique. L'article est organisé comme suit : dans une première partie, nous présentons les outils de la simulation numérique et de la POD. Dans une seconde partie, nous présentons quelques principaux résultats de l'intégration des modèles, que nous comparons à la simulation numérique. Nous présentons ensuite une conclusion.

## 2 Outils numériques

### 2.1 La simulation numérique directe

Nous utilisons un code de simulation numérique directe pour calculer l'évolution de l'écoulement dans un canal plan turbulent. Le code est semblable à celui de Kim, Moin et Moser [6] et a été décrit dans [8]. Le code est un code spectral avec des modes de Fourier dans les directions horizontales (notées  $x$  et  $z$ ) et des modes de Chebyshev dans la direction normale à la paroi (notée  $y$ ). On note respectivement  $u, v, w$  ou  $u_1, u_2, u_3$ . Les équations sont avancées en temps avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour les termes non-linéaires et un schéma de Crank-Nicolson pour les termes linéaires. Les conditions aux limites sont périodiques dans les directions horizontales et verticales. On définit un nombre de Reynolds macroscopique à partir de la vitesse au centre du canal  $U$  et de la demi-hauteur du canal  $Re$  et un nombre de Reynolds de paroi où la vitesse de référence est la vitesse de friction à la paroi. Les unités de référence faisant intervenir la vitesse de friction sont notées avec un  $+$ . Nous utilisons 96x65x96 modes (avant dealiasing). Les dimensions horizontales du domaine sont  $(L_1, L_3) = (4\pi, 4\pi/3)h$  ou  $(L_1+, L_3+) = (2380, 750)$ . Les statistiques de la turbulence ont été calculées et comparées à celles de la simulation de Kim, Moin and Moser [6]. L'accord observé est tout à fait satisfaisant.

### 2.2 Les modèles réduits POD

La POD est une technique statistique qui vise à identifier les mouvements organisés le mieux corrélés. Une introduction complète à la POD peut être trouvée dans Holmes, Lumley and Berkooz [4]. L'idée est de décomposer le champ de vitesse comme la superposition de structures spatiales dont l'amplitude varie avec le temps. Dans les directions horizontales, les modes POD sont les modes de Fourier de sorte que la décomposition du champ de vitesse peut être directement effectuée dans l'espace de Fourier. Dans tout ce qui suit la POD est appliquée à la fluctuation du champ de vitesse. On a ainsi

$$u_{lk}^i(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{lk}^n(t) \phi_{lk}^{in}(y) \quad (1)$$

où

- $u_{lk}^i$  est la  $i$ -ième composante du champ de vitesse dans l'espace de Fourier
- le mode POD  $a_{lk}^n(t)$  représente l'amplitude du  $n$ -ième mode POD. Sa moyenne est nulle et sa variance vaut  $\lambda_{lk}^n = \langle |a_{lk}^n(t)|^2 \rangle$ .
- $\lambda_{lk}^n$  est la  $n$ -ième valeur propre POD : elle contient l'énergie du  $n$ -ième mode POD associé au vecteur d'onde  $(l, k)$ .
- $\phi_{lk}^{in}$  est la  $i$ -ième composante de la  $n$ -ième structure spatiale POD. Par construction, les structures spatiales sont orthonormales :  $\int \phi_{lk}^{in} \phi_{lk}^{*jm} dy = \delta_{nm}$

La POD est appliquée à la zone de paroi  $0 < y+ < 70$  d'un canal turbulent, en utilisant environ 500 échantillons répartis sur  $2500U/h$ . On s'intéresse ici exclusivement à la partie fluctuante du champ de vitesse. On notera  $u_{lk}$  pour  $\hat{u}_{lk}$  afin d'alléger les notations.

Les modes POD sont obtenus en projetant le champ de vitesse sur la structure spatiale correspondante dans la zone de paroi.

$$a_{lk}^n(t) = \int_{y=0}^{y=70+} u_{lk}^j(y, t) \phi_{lk}^{*jn}(y) dy \quad (2)$$

## 3 Modèles d'ordre réduit

### 3.1 Caractéristiques des modèles

Nous utilisons la projection de Galerkin pour obtenir les équations d'évolution pour les modes POD (amplitudes temporelles des structures spatiales). La première étape consiste à sélectionner une troncature. On notera respectivement  $N_x, N_y$  et  $N_z$  le nombre de modes retenus dans les directions  $x, y$  et  $z$ . Le nombre total de modes sera donc  $N_x N_y N_z$ .

Puisque nous nous limitons à un nombre de modes relativement petit ( $O(100)$ ), il est nécessaire de modéliser les transferts d'énergie aux modes non résolus. Ces transferts sont représentés de manière très simple en s'appuyant sur une hypothèse de Heisenberg [1]. Un paramètre  $\alpha$  caractérisant l'intensité du transfert aux petites échelles, intervient donc dans le modèle. Ce paramètre peut être calculé à partir de la simulation numérique directe (voir [9] ou [11])

Le champ de vitesse moyenne est considéré ici comme une constante. L'influence de la zone externe, qui apparaît dans le modèle à travers un terme de pression, est négligée. La dimension du domaine correspondant au modèle, c'est-à-dire les modes les plus grands est de  $l_x = 600$  et de  $l_z = 400$ , ce qui correspond environ à deux paires de structures cohérentes.

### 3.2 Comparaison avec la simulation numérique directe

Une question mal résolue concerne l'évaluation de la performance du modèle lorsque le comportement souhaité est chaotique. Etant donné la dimension réduite des modèles et le caractère simplificateur des hypothèses de construction de ces modèles, la comparaison doit nécessairement porter sur des grandeurs statistiques telles que les moments ou l'analyse fréquentielle des modes. La figure 1 représente la densité spectrale des modes POD dans la simulation numérique directe. La figure 2 montre que Les modes avec variation longitudinale sont convectés par le champ de vitesse moyenne et sont donc caractérisés par une fréquence correspondant à une vitesse de convection d'environ  $U = 13u_*$ , où  $u_*$  est la vitesse de friction. L'amplitude de ces modes varie sur une échelle plus longue correspondant aux échelles caractéristiques des modes sans variation longitudinale.

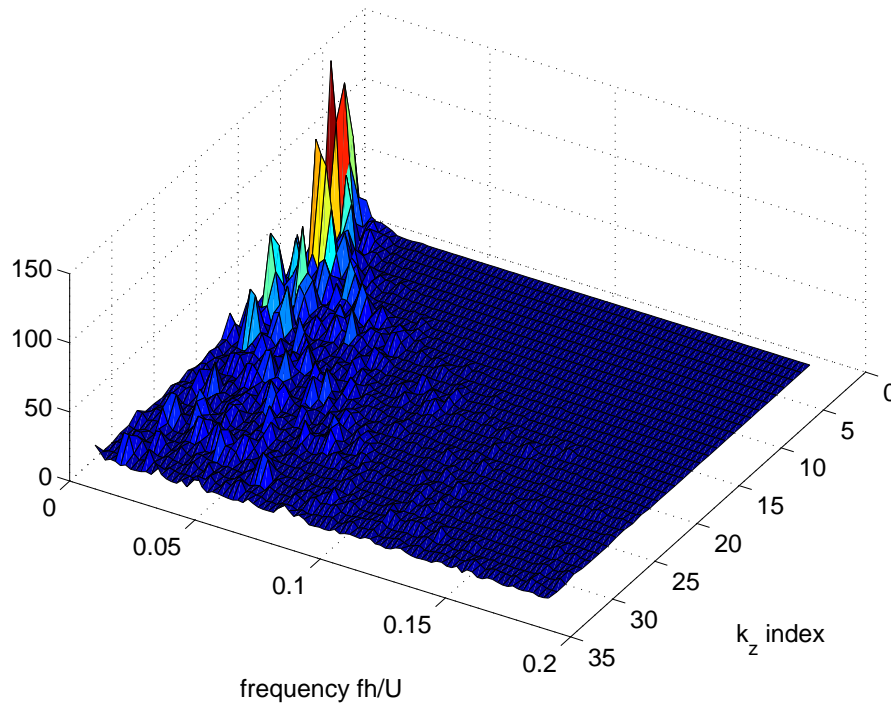
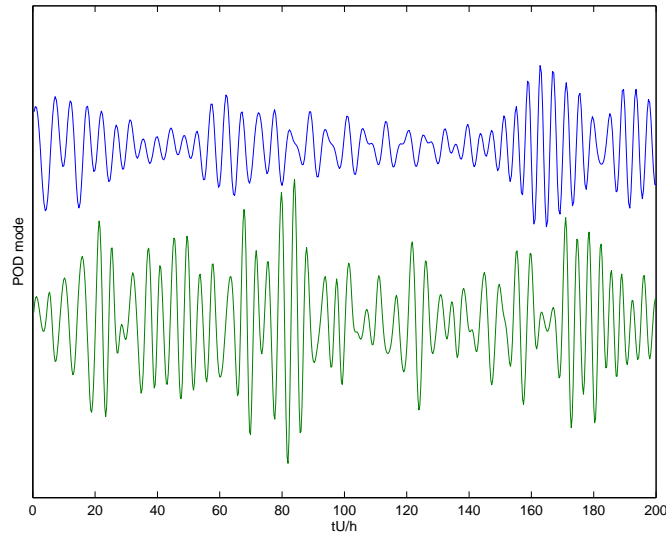


Fig.1. Densité spectrale des modes POD  $Re[a_{0k}]/\lambda_{0k}^{1/2}$



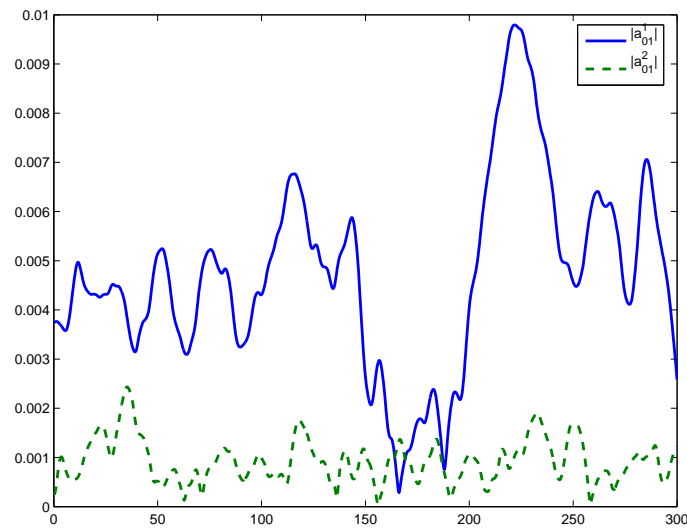
**Fig.2.** Mode avec variation longitudinale  $Re[a_{11}]/\lambda_{11}$ . (a) en haut : DNS (b) en bas : modèle avec  $(N_x, N_y, N_z) = (12, 1, 12)$  et un paramètre  $\alpha$  estimé à 0.8

### 3.3 Effet du nombre de modes normaux

Nous avons intégré des modèles avec respectivement 1 et 3 modes normaux. La figure 3 montre que la dynamique globale des modes est relativement inchangée. L'amplitude des modes d'ordre supérieur est importante que . On observe là un effet de troncature, puisque l'énergie ne peut être transmise aux modes d'ordre élevé et s'accumule dans les derniers modes inclus dans la troncature. On s'aperçoit en outre que les modes normaux sont correspondant à un même mode de Fourier sont couplés dans le modèle avec 3 modes normaux, ce qui n'est pas le cas dans la simulation.

## 4 Conclusion

Nous avons construit des modèles réduits POD pour la zone de paroi d'un canal plan turbulent à  $R^* = 180$ . Nous avons utilisé jusqu'à 12 modes de Fourier en  $x$  et en  $x$ , correspondant à des échelles spatiales respectives de 100 et 30 unités de paroi. L'influence du nombre de modes POD dans la direction normale a également été étudiée. Les prédictions des modèles ont été comparées aux résultats de la simulation numérique directe, de manière à la fois qualitative et quantitative. Un certain accord a été observé, mais nous avons également mis en évidence certaines divergences. L'importance de ces divergences, et par là la fiabilité des modèles d'ordre réduit, devra être évaluée en fonction de l'application envisagée.



**Fig.3.** POD modes  $Re[a_{01}^1]$  et  $Re[a_{01}^2]$  dans la simulation numérique directe

## Références

1. N. AUBRY, P. HOLMES, J.L. LUMLEY & E. STONE, The dynamics of coherent structures in the wall region of the wall boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **192**, 115–173, (1988).
2. J. DELVILLE, L. UKEILEY, L. CORDIER, J.P. BONNET & M. GLAUSER, Examination of large-scale structures in a turbulent plane mixing layer. Part 1 : proper orthogonal decomposition, *Journal of Fluid Mechanics*, **391**, 91–122, (1999).
3. S. GORDEYEV & F. THOMAS, Coherent structure in the turbulent planar jet. part 1. extraction of proper orthogonal decomposition eigenmodes and their self-similarity, *Journal of Fluid Mechanics*, **414**, 145–194, (2000).
4. P. HOLMES, J.L. LUMLEY & GAL BERKOOZ, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge University Press, (1996).
5. J. JIMENEZ & A. PINELLI, The autonomous cycle of near-wall turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **389**, 335–359, (1999).
6. J. KIM, P. MOIN & R. MOSER, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, **177**, 133–166, (1986).
7. J. L. LUMLEY, The structure of inhomogeneous turbulent flows, In A. M. Iaglom & V.I. Tatarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pp. 221–227. Nauka, Moscow, (1967).
8. B. PODVIN, On the adequacy of the 10-d model for the wall layer, *Physics of Fluids*, **13**, 210–224, (2001).
9. B. PODVIN & J. L. LUMLEY, A low-dimensional approach for the minimal flow unit, *Journal of Fluid Mechanics*, **362**, 121–155, (1998).
10. D. REMPFER & H. FASEL, Dynamics of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 275, 1994.
11. T.R. SMITH, J. MOEHLIS & P. HOLMES, Low-dimensional models for turbulent plane couette flow in a minimal flow unit, *Journal of Fluid Mechanics*, **538**, 71–110, (2005).
12. F. WALEFFE, Hydrodynamic stability and turbulence : Beyond transients to a self-sustaining process, *Studies in Applied Mathematics*, pp. 319–343, 1995.
13. F. WALEFFE, Transition in shear flows : non-linear normality versus non-normal linearity, *Physics of Fluids*, **7**, 3060–3066, (1996).