

Analyse déterministe de la compétition nonlinéaire de modes dans un écoulement en cavité

L.R. Pastur^{1,2}, F. Lusseyran¹, Th.M. Faure^{1,3}, & C. Letellier⁴

¹ LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

² Université Paris Sud XI, F-91405 Orsay Cedex

³ Université Pierre et Marie Curie, Paris

⁴ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

luc.pastur@limsi.fr

Résumé. Les écoulements affleurants présentent généralement des régimes d'oscillations entretenues résultant d'un processus de rétro-action complexe, en particulier pour des nombres de Reynolds modérés. Des travaux antérieurs ont révélé un phénomène d'échange de modes qui restait à caractériser d'un point de vue dynamique. L'intermittence entre les deux modes dominants est ici caractérisée par dynamique symbolique. La première étape consiste à reconstruire, à partir des composantes principales de la série temporelle obtenue par vélocimétrie par effet Doppler (LDV), l'espace des phases du système. Le problème de la dimension élevée de cet espace (comprise entre 5 et 10) peut être contourné en considérant une section de Poincaré dans une restriction 2D de l'espace. Le point clef consiste à réaliser une partition de l'application angulaire de premier retour à une section de Poincaré. Cette partition permet alors, sans recourir à un critère de seuil arbitraire (tel que requis dans des méthodes de démodulation complexe), une quantification précise de tous les événements oscillants.

Abstract. Open flows over a cavity present, even for medium Reynolds numbers, sustained oscillations resulting from a complex feedback process. Previous works have revealed a mode-switching phenomenon which remained to characterize from a dynamical point of view. In the configuration here investigated, the intermittency between the two dominant modes is characterized using a symbolic dynamics based approach. The first step of the procedure is to reconstruct the phase space from the time series measured by the Laser Doppler Velocimetry (LDV) technique, using the principal components. The quite high dimensionality of the reconstructed space ($5 \leq d \leq 10$) can be overcome by using a Poincaré section in a 2D projection of the phase portrait. The key step consists to define a partition of the angular first-return map to the Poincaré section without any arbitrary thresholding (as demodulation techniques requires), this partition allows a very precise quantification of all oscillating events.

1 Introduction

L'écoulement en cavité est un paradigme abondamment étudié pour les écoulements autour de discontinuités structurelles d'engins [1]. Dans notre expérience, l'écoulement s'effectue à basse vitesse, et peut donc être considéré comme incompressible. L'instabilité de la couche de cisaillement fait apparaître, sur

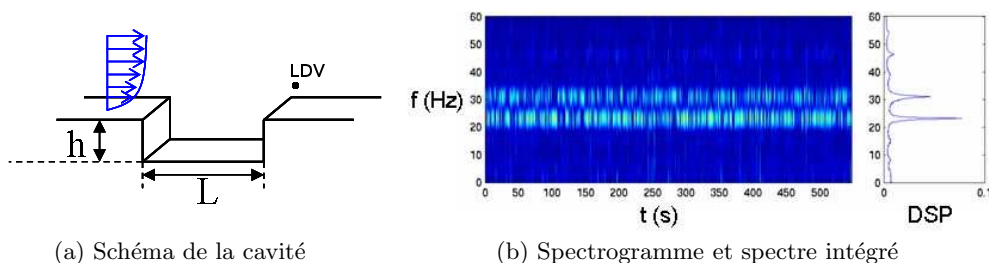


Fig.1. Schéma de l'expérience et spectrogramme du signal LDV. Dans le cas étudié, $U = 2,09 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, deux pics à $f_1 = 23.2 \text{ Hz}$ et $f_2 = 31.0 \text{ Hz}$ apparaissent clairement dans le spectre.

une plage continue du nombre de Reynolds, une compétition entre deux modes d'oscillation, qui s'excluent mutuellement (*cf* Fig 1b) [2].

2 Dispositif expérimental

La cavité a pour longueur $L = 100$ mm, hauteur $H = 50$ mm, largeur $S = 300$ mm (*cf* Figure 1a). Le rapport de forme de la cavité vaut $R = L/H = 2$. L'écoulement est créé par un ventilateur centrifuge placé en amont de la chambre de tranquillisation de la soufflerie. Un conduit se terminant par un nid d'abeille et un convergent amène l'écoulement vers la section d'essais. La paroi supérieure de la section d'essais se trouve à 75 mm au dessus de la cavité. L'épaisseur de la couche limite sur cette paroi reste inférieure à 10 mm et a essentiellement pour effet d'accélérer le fluide au dessus de la cavité ($U_1 > U_e$), par conservation du débit. La vitesse amont U_e est mesurée à 102 mm en amont de la cavité, et 25.5 mm au dessus de la plaque amont.

La vitesse longitudinale $u_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x$ de l'écoulement est mesurée par LDV au point aval représenté sur la Figure 1a. La source lumineuse est fournie par un laser Argon-ion continu à 488 nm (bleu). La fréquence moyenne d'échantillonnage, utilisée pour ré-échantillonner la série, vaut $f_{LDV} = 1530$ Hz.

3 Portrait de phase du système

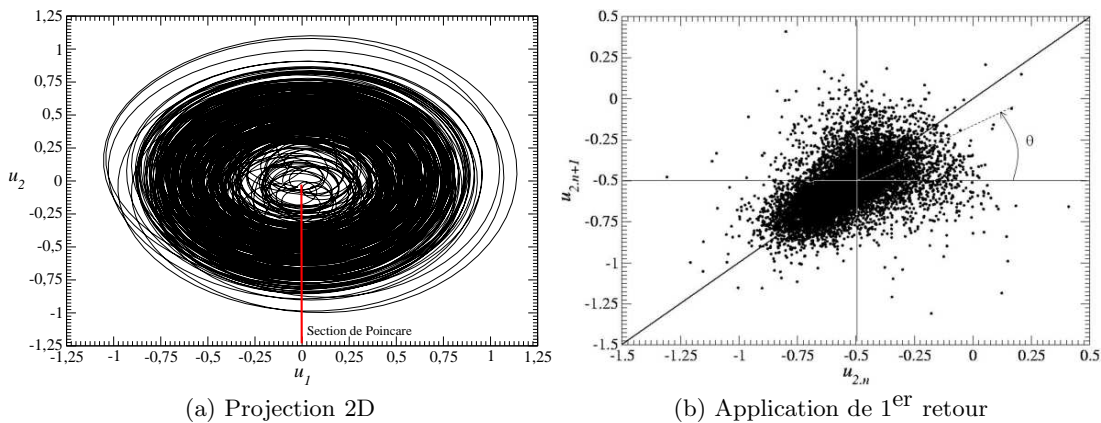


Fig.2. Portrait de phase construit sur les deux premières composantes principales de la matrice des retards, construite sur le signal LDV, et application de premier retour dans la section de Poincaré.

L'espace des phases du système est reconstruit à partir des composantes principales de la dynamique obtenues par une décomposition orthogonale propre de la matrice des retards [4]. La dimension de corrélation, d_c , du portrait de phases est évaluée à 4,2 à partir d'un algorithme de Grassberger-Proccacia [5], ce qui donne pour limite supérieure $d_e = 10$ pour la dimension de l'espace de plongement, d'après le critère de Takens. C'est une dimension trop élevée pour pouvoir étudier de façon approfondie une éventuelle structure déterministe de la dynamique sous-jacente. Il est néanmoins possible d'étudier la dynamique du système en considérant le sous-espace défini par les deux premières composantes principales de la dynamique (Fig. 2a). Une section de Poincaré

$$II = \{u_2 \in \mathbb{R} \mid u_1 = 0, \dot{u}_1 > 0\}, \quad (1)$$

est construite : un nuage de points est observé, ce qui signifie que le tore, s'il existe pour d'autres valeurs des paramètres, est déjà déstabilisé. Le portrait conserve une réminiscence d'une structure toroïdale mais est organisé autour d'une structure plus complexe. L'application de premier retour (Fig. 2b) ne permet pas

d'identifier une dynamique déterministe. Comme il l'a été montré dans le cas d'un jet [6], une structure toroidale peut cependant s'étudier avec une application de premier retour angulaire, construite sur la position angulaire θ_n du $n^{\text{ème}}$ itéré de l'application de premier retour relativement à l'axe horizontal, avec pour centre le barycentre de l'application (Figure 2b). L'angle θ_{n+1} est alors tracé en fonction de θ_n . La fonction de densité de probabilité $P(\theta_n)$ résultante est représentée Fig. 3. On y voit que la dynamique

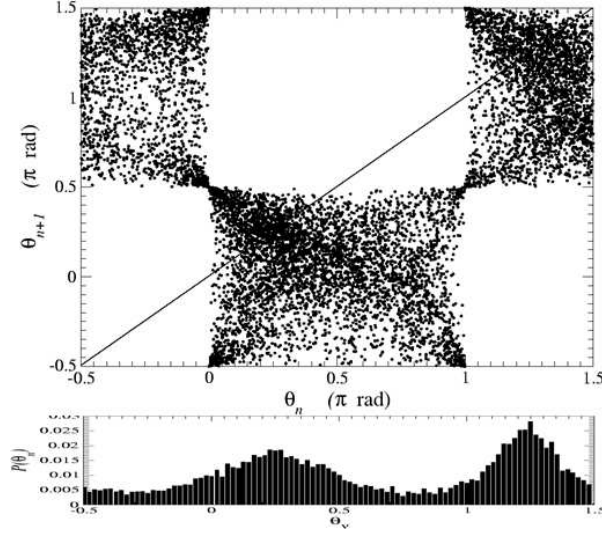


Fig.3. Application angulaire construite sur l'application de premier retour (en haut) et distribution angulaire de l'application de premier retour (en bas).

est essentiellement organisée autour de deux domaines angulaires, correspondant aux deux pics. Ces deux domaines sont situés au voisinage de la bissectrice, c'est-à-dire qu'ils entourent deux points de période 1 (des points proches de la bissectrice sont tels que $\theta_{n+1} \approx \theta_n$). Le premier pic de $P(\theta_n)$, centré sur $\theta_n = \pi/4$, correspond à des cycles de période moyenne 33.5 ms, de fréquence associée 29.9 Hz voisine de $f_2 = 31.0$ Hz. Le second pic, centré sur $\theta_n = 5\pi/4$, correspond à des événements de période moyenne de 42.3 ms, de fréquence associée 23.6 Hz très voisine de $f_1 = 23.2$ Hz. On peut ainsi séparer le domaine angulaire en deux sous-domaines, $\mathcal{I}_2 = [-\pi/4, 3\pi/4]$ associé au mode f_2 , et $\mathcal{I}_1 = [-\pi/2, -\pi/4[\cup]3\pi/4, 3\pi/2[$ associé au mode f_1 .

4 Dynamique symbolique

Afin d'étudier de manière plus approfondie la dynamique sous-jacente au système, une dynamique symbolique est définie sur l'application angulaire de premier retour (Fig. 2b). La $n^{\text{ème}}$ intersection avec Π est associée à un symbole selon que l'angle θ_n appartienne à l'intervalle \mathcal{I}_1 ou \mathcal{I}_2 , soit

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_n \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}] & \text{mode } f_2 \\ 1 & \text{si } \theta_n \in [-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}[& \text{mode } f_1 \end{cases} \quad (2)$$

Une telle partition ne donne pas de mode privilégié, puisque les deux modes sont équiprobables sur la série de mesures. Le nombre moyen d'oscillations par bouffée pour le mode f_2 (resp. f_1) est de 3,55 (resp. 3,85).

La probabilité pour qu'un mode soit entretenu sur un nombre i de cycles est donnée par la probabilité de trouver i symboles consécutifs identiques. Les courtes durées sont clairement privilégiées (de 1 à 2 oscillations sans transition) (Fig. 4).

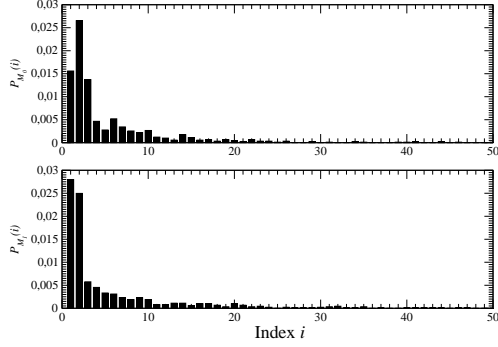


Fig.4. Distribution des durées de cycle (en unité de période) dans le mode f_2 (en haut), ou le mode f_1 (en bas). L'indice i représente le nombre de σ_n consécutifs se trouvant dans le même état 0 ou 1.

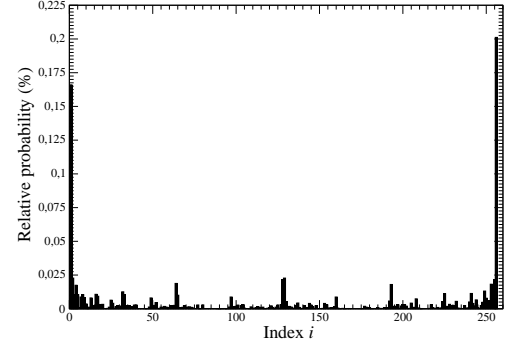


Fig.5. Probabilité des séquences à 8 caractères. L'indice i est associé à la séquence Σ_i (voir texte).

Une étude plus approfondie de la dynamique est possible à partir des séquences symboliques à p symboles consécutifs. Plus la séquence est longue, meilleure est l'analyse de la dynamique. La longueur p doit néanmoins rester raisonnablement basse pour que la statistique reste bien définie. Il a été montré qu'un bon choix pour p est tel que le rapport $q^p/N \approx 1\%$ [6], où $N \simeq 14300$ est le nombre de passages à travers Π et $q = 2^p$ est le nombre total de séquences possibles à p caractères. On se limite donc à des séquences de longueur $p = 8$, c'est-à-dire à 8 oscillations du signal. On définit ainsi 2^8 séquences Σ_i telles que $\Sigma_1 = 0000\ 0000$, $\Sigma_2 = 0000\ 0001$, ..., $\Sigma_{256} = 1111\ 1111$ et l'on étudie leur probabilité d'occurrence dans la section de Poincaré. Les deux séquences principales sont Σ_1 et Σ_{256} , qui correspondent respectivement chacune à 8 oscillations consécutives dans le mode f_2 et le mode f_1 . Les événements courts de 1 à 2 oscillations dans le même mode se répartissent sur d'autres séquences de probabilité moindre, mais leur contribution sommée est statistiquement prépondérante comme le suggère la Figure 4. On remarque par ailleurs que les séquences complémentaires, telle que $\Sigma_{65} = 0100\ 0000$ et $\Sigma_{192} = 1011\ 1111$, sont quasi équiprobables (séquences symétriques par rapport au couple $\{\Sigma_{128}, \Sigma_{129}\}$).

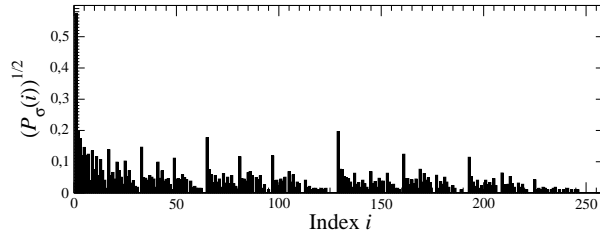


Fig.6. Fonction de densité de probabilité des séquences symboliques à 8 caractères construites sur les événements transitionnels.

Le codage peut également être réalisé sur les événements transitionnels :

$$\xi_i = \begin{cases} \text{N} & \text{si } \sigma_i\sigma_{i+1} = 00 \text{ ou } \sigma_i\sigma_{i+1} = 11 \\ \text{T} & \text{si } \sigma_i\sigma_{i+1} = 10 \text{ ou } \sigma_i\sigma_{i+1} = 01 \end{cases} \quad (3)$$

La nouvelle distribution de probabilité (Fig. 6) montre que la séquence la plus probable est $\Xi_1 = \text{NNNN NNNN}$, c'est-à-dire des séquences où le mode d'oscillation (f_1 ou f_2 indifféremment) est entretenu. Parmi les séquences les plus souvent réalisées, on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
 \Xi_{129} &= \text{TNNN NNNN} \\
 \Xi_{65} &= \text{NTNN NNNN} \\
 \Xi_{33} &= \text{NNTN NNNN} \\
 \Xi_{17} &= \text{NNNT NNNN} \\
 \Xi_9 &= \text{NNNN TNNN} \\
 \Xi_5 &= \text{NNNN NTNN} \\
 \Xi_3 &= \text{NNNN NNTN} \\
 \Xi_2 &= \text{NNNN NNNT}
 \end{aligned}$$

qui sont des permutations circulaires d'une transition T isolée. C'est la signature de séquences correspondant à des régimes entretenus à f_1 ou f_2 supérieures à 8 oscillations. Les séquences suivantes

$$\begin{aligned}
 \Xi_{193} &= \text{TTNN NNNN} \\
 \Xi_{161} &= \text{TNTN NNNN} \\
 \Xi_{97} &= \text{NTTN NNNN} \\
 \Xi_{81} &= \text{NTNT NNNN} \\
 \Xi_{49} &= \text{NNTT NNNN}
 \end{aligned}$$

indiquent que lorsque la dynamique visite un mode, la transition à l'autre mode s'accompagne le plus souvent d'un retour rapide (1 à 2 oscillations au plus) au premier mode d'oscillation. On comprend aisément que des événements aussi brefs puissent passer inaperçus lors d'une analyse spectrale. Cela explique également les différences quantitatives observées par exemple sur les durées de vie moyennes des modes, entre cette étude et celle basée sur la démodulation complexe des séries LDV [3] (de l'ordre de 4 oscillations de base dans la présente étude contre une petite vingtaine dans la précédente).

On peut également s'intéresser aux trajectoires respectivement associées aux modes f_1 et f_2 , ainsi qu'à leurs transitions. Les oscillations à f_1 (Fig. 7a) sont d'amplitude supérieure aux cycles sur f_2 (Fig. 7b), ce qui va dans le sens de la distribution spectrale relative entre les deux modes (Fig. 1b), celui-ci ne résultant donc pas d'un taux de présence plus important d'un mode par rapport à l'autre (celui-ci étant de 1/2 pour chacun d'eux — voir plus haut). On peut également suivre la transition, sur un cycle d'oscillation, entre une orbite parcourue à la fréquence f_1 vers une orbite à f_2 (Fig. 7c) ou de f_2 vers f_1 (Fig. 7d). L'étude détaillée de ces trajectoires pourra fournir une base solide à la caractérisation de la physique de transition.

5 Conclusion

La compétition non-linéaire entre les deux modes d'oscillation, observée dans la couche de cisaillement de notre écoulement en cavité, est ici étudiée par le biais d'outils d'analyse empruntés à la théorie des systèmes dynamiques. A partir du portrait de phase obtenu dans le sous-espace à deux dimensions engendré par les deux premières composantes principales de la dynamique, l'application angulaire de premier retour dans une section de Poincaré permet de définir la dynamique symbolique du système. Deux symboles (0 ou 1) sont utilisés pour distinguer les modes en compétition. Il est très remarquable que les outils, souvent réputés ne pouvoir caractériser que des dynamiques à peu de degrés de liberté, puissent malgré tout conduire à des résultats aussi précis sur les caractéristiques du portrait de phase de séries temporelles obtenues à partir d'un écoulement réel complexe. Néanmoins, par construction, la partition σ_n exclut à priori de l'analyse les éventuels événements correspondants à une coexistence mutuelle, ou une absence simultanée, des deux modes. Une étude statistique des séquences symboliques révèle une dynamique sous-jacente en partie déterministe, en partie stochastique. Les transitions entre modes, qui se révèlent très fréquentes, se produisent sur des temps de l'ordre de une à deux oscillations du cycle de base, ce qui explique que des techniques spectrales puissent passer à côté de tels événements.

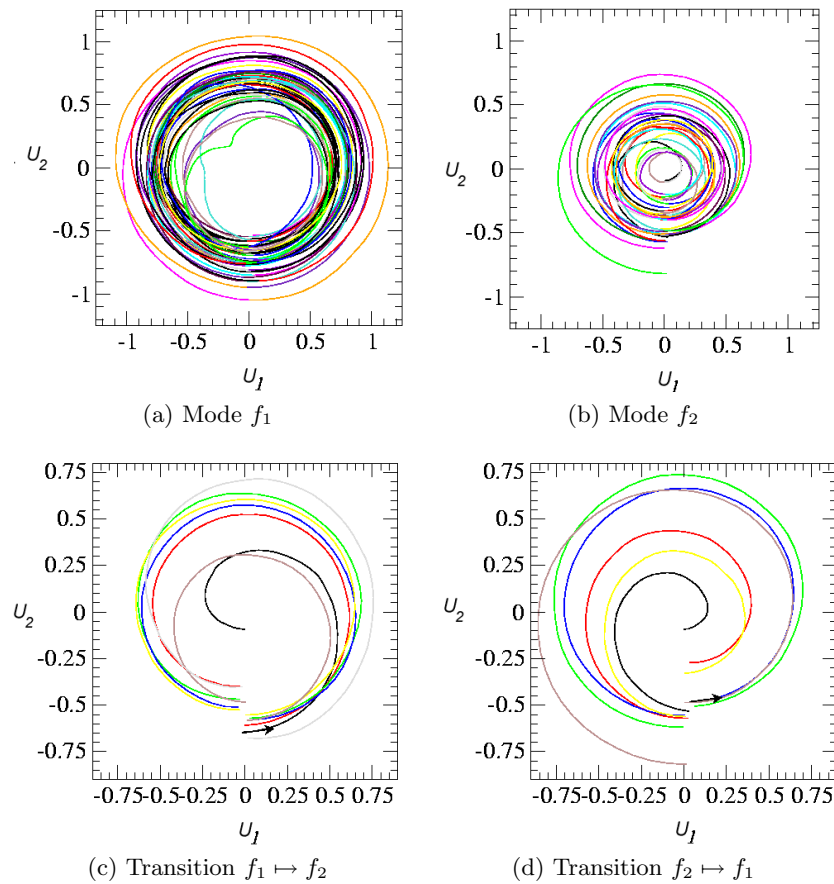


Fig.7. Trajectoires respectivement associées au mode f_1 (a), au mode f_2 (b), à la transition $f_1 \mapsto f_2$ (c) et à la transition $f_2 \mapsto f_1$ (d).

Références

1. D. ROCKWELL & E. NAUDASCHER, Self-sustained oscillations of impinging free shear layers, *Annual Review of Fluid Mechanics* **11**, 67-94, 1979.
2. R. PETHIEU, L.R. PASTUR, F. LUSSEYRAN & T.M. FAURE, Comptes-rendus de la Rencontre du Non Linéaire 2007, Ed. , pp.
3. L.R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T.M. FAURE, R. PETHIEU & P. DEBESSE, Quantifying the non-linear mode competition in the flow over an open cavity at medium Reynolds number, *Experiments in fluids* online first.
4. D.S. BROOMHEAD & G.P. KING, Extracting qualitative dynamics from experimental data, *Physica D* **20** 217-236, 1986.
5. P. GRASSBERGER & I. PROCCACIA, Characterization of strange attractors, *Physical Review Letters* **50** 346-349, 1983.
6. J. GODELLE & C. LETELLIER, Symbolic sequence statistical analysis for free liquid jets, *Physical Review E*, **62** (6), 7973-7981, 2000.