

Analyse topologique d'un nouvel attracteur chaotique toroidal

C. Letellier¹ & R. Gilmore^{1,2}

¹ CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² Physics Department, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA

Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé. La plupart des systèmes dynamiques tri-dimensionnels connus sont décrits par une surface branchée (gabarit). Toutefois, un système de dimension 3, récemment proposé par Diqian Li, se révèle être structuré autour d'un tore — dont le genre est déterminé à partir de la relation d'Euler-Poincaré — et dont la caractérisation topologique reste un problème ouvert. De plus, il possède une symétrie de rotation qui complique un peu plus l'analyse. Une première analyse topologique de ce système est ici proposée.

Abstract. Most of the known tri-dimensional dynamical systems are described by a branched manifold (template). Nevertheless, a 3D system, recently proposed by Diqian Li, is structured around a torus — whose genus is determined using the Euler-Poincaré formulae — but its topological characterization remains an open problem. Moreover, it presents a symmetry property which makes more difficult the analysis. A first topological analysis is here proposed.

1 Introduction

La caractérisation topologique des attracteurs chaotiques dont la dimension de Lyapunov est inférieure à 3 est relativement bien définie pour les systèmes très dissipatifs [1]. Toutefois, parmi cette famille d'attracteurs, les systèmes produisant un attracteur chaotique structuré sur un tore demeurent délicat à représenter par une surface branchée (un gabarit), principalement en raison du manque de modèle simple (la majeure partie des systèmes conduisant à un attracteur toroidal appartient à la famille des systèmes non autonomes, dont l'analyse est confrontée à des difficultés inhérentes à ces systèmes). Récemment, Diqian Li [2] a publié un système qui se présente comme un système de Lorenz modifié et qui produit un attracteur inscrit sur un tore. L'analyse de ce système dont l'importance pourrait bien être du même ordre que celle des systèmes de Lorenz (1963) ou de Rössler (1976) est ici entreprise. Il est montré que ce système répond à une symétrie de rotation — comme le système de Lorenz — et peut être plongé au sein d'une frontière toroidale de genre 3 [3]. Toutefois, la particularité de ce système est que les « trous » de cette frontière toroidale se croisent, nécessitant d'avoir recours à la relation d'Euler-Poincaré pour la détermination du genre. Il est également montré que l'attracteur de Li résulte d'une bifurcation « épluchage », c'est-à-dire d'une intersection de l'axe de rotation avec l'attracteur, comme cela a été récemment détaillée pour le système de van der Pol [4].

2 Le système de Li

Le système de trois équations différentielles ordinaires récemment proposé par Li [2] est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + dxz \\ \dot{y} = bx + ky - xz \\ \dot{z} = cz + xy - ex^2 \end{cases} . \quad (1)$$

Par comparaison avec le système de Lorenz, ce système présente deux termes nonlinéaires supplémentaires, dxz dans la première équation et ex^2 dans la troisième équation. Ce système a trois points singuliers, un

situé à l'origine de l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ et deux reliés par la symétrie de rotation et dont les coordonnées sont

$$F_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{ae(b+k)}{ac+cdk+bd-a}} \\ y_{\pm} = \pm \frac{a-bd}{a+dk} \sqrt{\frac{ae(b+k)}{ac+cdk+bd-a}} \\ z_{\pm} = \frac{a(b+k)}{a+bd} \end{cases}. \quad (2)$$

Le système de Li (1) est globalement invariant sous une symétrie de rotation d'ordre 2 $\mathcal{R}_z(\pi)$ à l'instar du système de Lorenz. Lorsque $x = y = 0$, les équations (1) se réduisent à $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ et $\dot{z} = cz$, c'est-à-dire qu'une trajectoire issue de conditions initiales inscrites sur l'axe Oz est éjectée à l'infini. Par comparaison avec le système de Lorenz, le flot est donc inversé. Pour les valeurs des paramètres ici considérées, $a = 40$, $b = 55$, $c = 11/6$, $d = 0.16$, $e = 0.65$ et $k = 20$, les deux points singuliers F_{\pm} sont complexes et ne sont donc pas pris en compte dans le reste de l'analyse. En tournant légèrement les axes Ox et Oy d'un angle $\theta = 0.16\pi$ autour de l'axe Oz , la symétrie d'ordre 2 devient évidente (Fig. 1) et le trou autour de l'axe Ox' devient ainsi apparent.

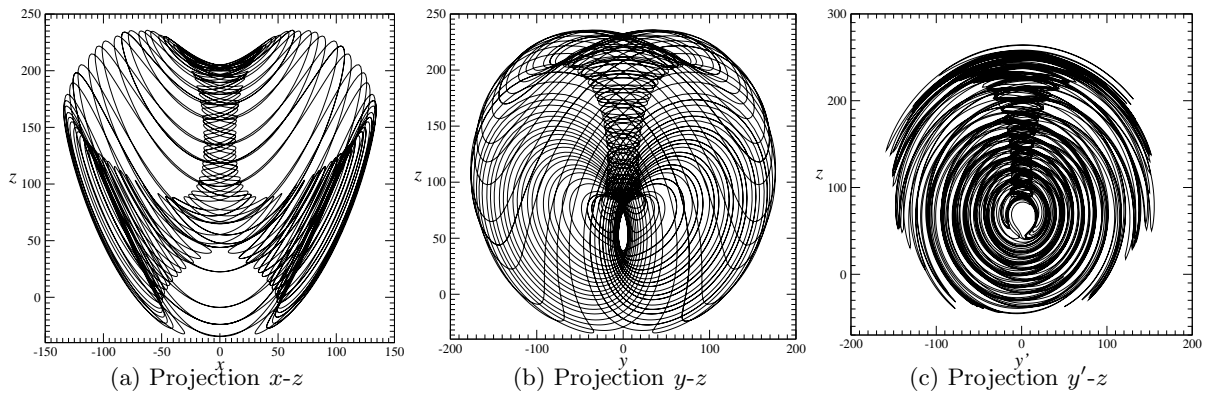


Fig.1. Attracteur solution du système de Li (1). Dans l'espace réorienté $\mathbb{R}^3(x', y', z)$, la symétrie d'ordre 2 devient évidente.

3 Frontières toroidales et section de Poincaré

3.1 Brève revue

Il est connu qu'un attracteur chaotique peut être borné par une surface semi-perméable définissant un domaine de l'espace des phases hors de laquelle une trajectoire ne peut s'échapper [5]. Une telle surface frontière est orientée, c'est-à-dire que toute orbite qui entre ne peut en sortir. En général, une telle surface dans \mathbb{R}^3 est une surface de genre g , où g est le nombre de « trous » de la frontière. Une surface avec $g = 0$ est une sphère et lorsque $g = 1$, nous obtenons ce que nous appelons un tore. La frontière toroidale est organisée autour d'un certain nombre de points singuliers qu'elle entoure : typiquement, il y a des foyers (correspondant à un contour sans singularité) et des cols (contour avec quatre singularités). Ainsi, il peut être montré que le nombre de singularités N_s est relié au genre g par la relation $N_s = 2(g - 1)$ [6].

Tout flot, restreint à une frontière toroidale, peut être représenté sous une forme canonique. Pour les genres $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$, il y a $0, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 5, 6, \dots$ formes canoniques inéquivalentes [6]. La forme canonique pour $g = 3$ est montrée Fig. 2 : elle est constituée d'un trou central pourvu de quatre

singularités entourant un col et deux autres trou dont le contour est circulaire et entourant des foyers. Ceci ne signifie pas qu'un système borné par un tore de genre 3 a nécessairement trois points singuliers mais que trois points singuliers sont entourés par le flot, les autres éventuels points singuliers sont hors de la frontière toroidale. La forme canonique (Fig. 2) correspond la frontière toroidale de l'attracteur de Lorenz.

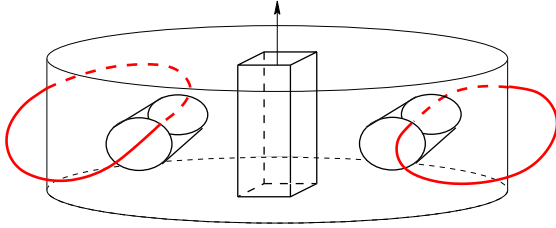


Fig.2. La forme canonique de genre 3 consiste en une frontière toroidale pourvue de trois trous intérieurs. Les quatre singularités de la surface sont confinées au trou central. La localisation des deux composantes de la section de Poincaré sont également représentées par deux boucles fermées.

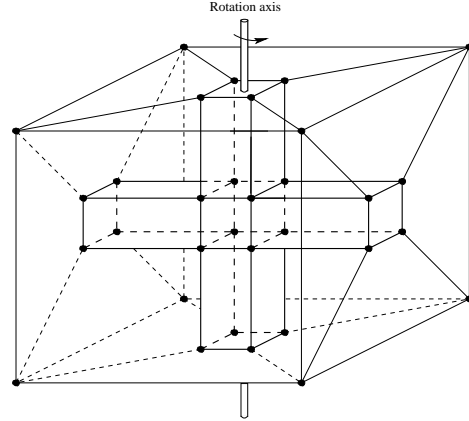


Fig.3. Frontière toroidale entourant l'attracteur de Li. Sa représentation schématique est constituée de 68 vertex, 72 arêtes et 36 faces. Le genre est trois.

Dans un espace de dimension trois, une surface de Poincaré est une surface minimale de dimension deux avec la propriété que la trajectoire traverse toujours cette surface de manière non tangente. Plus généralement, la section de Poincaré est une union disjointe d'un ou plusieurs disques [6]. En particulier, lorsqu'un système dynamique possède une symétrie d'ordre η , la surface de Poincaré est composée de η composantes de manière à calculer correctement une section de Poincaré [7]. En fait, le nombre de composantes déconnectées est égal au nombre de trous intérieurs associés à un point singulier de type foyer. La surface de Poincaré d'une frontière toroidale de genre g est constituée de $g - 1$ disques disjoints [6].

3.2 Cas du système de Li

La frontière toroidale entourant l'attracteur du système de Li est schématisée Fig. 3. Le genre g d'une telle surface n'est pas évidente, essentiellement en raison de l'intersection entre les deux trous. Dans un tel cas, il est utile d'appliquer la formule d'Euler-Poincaré [8]

$$N_V - N_E + N_F = 2 - 2g \quad (3)$$

où N_V est le nombre de vortex, N_E le nombre d'arêtes et N_F le nombre de faces de la surface. Appliquée à la représentation schématique de la Fig. 3, la formule conduit à une frontière toroidale de genre trois. Comparée à la forme canonique pour une frontière toroidale de genre 3 (Fig. 2), le trou central est d'une certaine manière dégénérée, suite à une bifurcation épluchage [9,3].

Il a été montré que la structure des attracteurs du type « Lorenz » résultait de la présence de deux foyers — symétriques l'un de l'autre — et de la stabilité transverse de l'axe z [10,11]. La stabilité transverse peut être calculée à partir de la matrice Jacobienne dans le plan $x-y$:

$$\mathcal{J}_{xy} = \begin{bmatrix} -a + dz & a \\ b - z & k \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées pour $z \in]70.1 ; 7098.6[$. Les points de l'axe Oz sont du type foyer sur cet intervalle; le foyer est stable pour $z < 125$ et instable pour $z > 125$. Pour $z < 70.1$, la

stabilité transverse est du type col et pour $z > 7098.6$, elle correspond à des nœuds instables. Utilisant la convention de dessiner les trous entourant des foyers par des cylindres (sans singularité) et ceux entourant les cols par des canaux rectangulaires (pourvus de quatre singularités), nous obtenons une croix dont la partie inférieure consiste d'un canal rectangulaire, et dont la partie supérieure consiste en un cylindre faisant un « Y » connectant les trous le long de l'axe x' (Fig. 4). Grossièrement, $z \approx 70$ correspond à l'axe horizontal au centre des deux trous autour de l'axe z et autour duquel chaque « aile » se développe. Puisque seuls les trous sans singularité peuvent être utilisés pour définir les composantes d'une section de Poincaré, il n'y a qu'une seule manière de tracer deux boucles fermées — comme un frontière de genre 3 l'indique — autour de chaque aile, en accord avec la symétrie de rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ (Fig. 4). Aucune partie de ces deux boucles fermées ne visite le canal rectangulaire comme le veut la théorie. La section de Poincaré est par conséquent définie comme l'union de deux disques bornés par les boucles fermées passant dans chaque trou (Fig. 4).

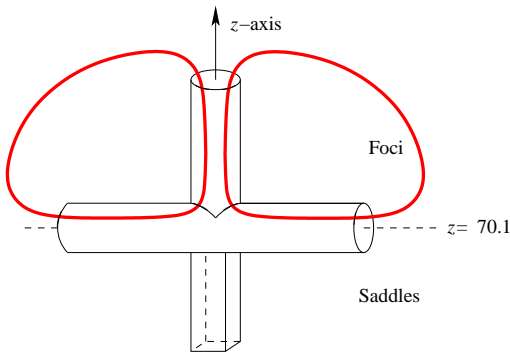


Fig. 4. Vue schématique des trous de la frontière toroïdale de genre 3 entourant l'attracteur de Li. Le canal rectangulaire présente quatre arêtes (des singularités) et ne peut être utilisé pour définir les composantes de la section de Poincaré. A l'opposé, les deux autres canaux ne présente aucune singularité et sont utilisés pour définir les deux composantes d'une telle section.

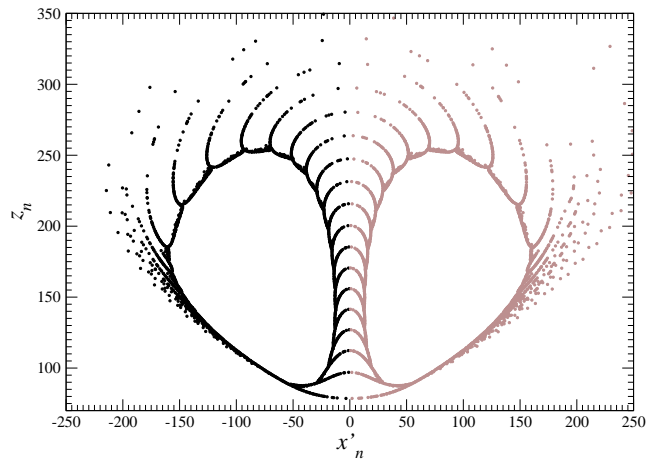


Fig. 5. Section de Poincaré de l'attracteur chaotique de Li. La structure toroïdale se traduit par une double forme annulaire de la section. 180000 points sont retenus pour cette section de Poincaré. Valeurs des paramètres : $a = 41$, $b = 55$, $c = 11/6$, $d = 0.16$, $e = 0.65$ et $k = 20$.

A partir de la définition des deux composantes de la surface Poincaré, celle-ci doit contenir le demi-axe autour duquel les deux trous sont organisés. La valeur en z de cet axe est de 70,1. La section de Poincaré définie comme

$$P = \{(x'_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y'_n = 0\}, \tag{5}$$

est représentée Fig. 5. Une double structure annulaire est observée. Au moins 29 plis peuvent être comptés dans chaque aile. La haute périodicité de l'orbite impliquée dans la « route vers le chaos » ne permet pas de distinguer clairement tous les plis (partie supérieure de chaque portion annulaire représentée Fig. 5).

4 Image de l'attracteur

Lorsqu'un système présente une symétrie, il est plus simple d'analyser l'image du système dynamique que le système original [9,3]. L'information identifiée sur le système image peut alors être redéployée sur le système original d'une manière assez simple. Pour ces raisons, l'image du système de Li (1) est construite en s'affranchissant de la symétrie. L'application $2 \rightarrow 1$ telle que $\Psi : \mathbb{R}^3(x', y', z) \mapsto \mathbb{R}^3(u, v, w)$ est définie

par :

$$\Psi \equiv \begin{cases} u = \operatorname{Re}(x' + iy')^2 = x'^2 - y'^2 \\ v = \operatorname{Im}(x' + iy')^2 = 2x'y' \\ w = z \end{cases} . \quad (6)$$

Cette application implique d'identifier les points liés par la symétrie, c'est-à-dire les points tels que $(+x', +y', z)$ et $(-x', -y', z)$ distincts de l'axe de symétrie avec un simple point (u, v, w) dans l'espace image. Le portrait de phase du système image peut être obtenue en appliquant l'application à une trajectoire dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x', y', z)$ du système original. Deux projections planes sont représentées Fig. 6. La structure toroïdale apparaît comme un tore de genre 1 dont le trou entoure grossièrement l'axe de rotation de la partie supérieure de l'attracteur image.

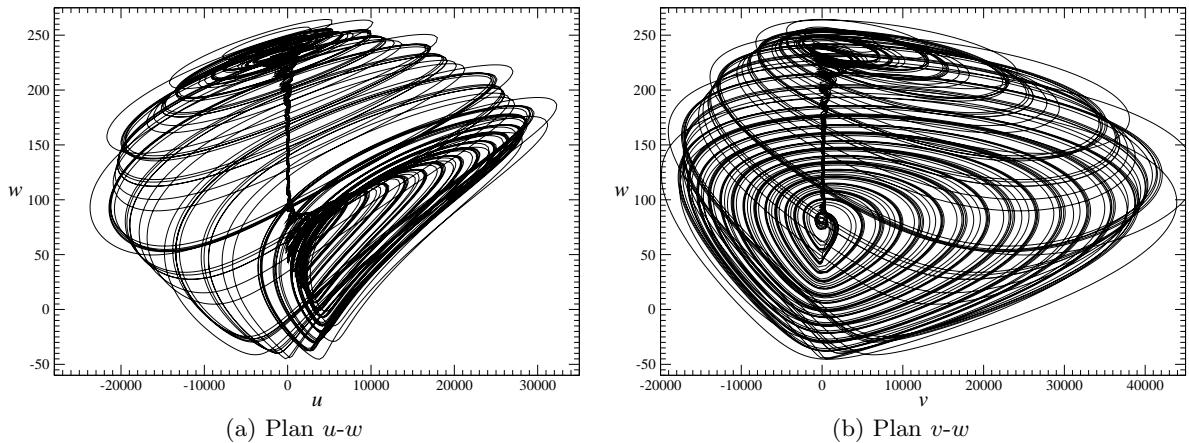


Fig.6. Deux projections planes de l'image de l'attracteur solution du système de Li. Mêmes valeurs des paramètres que Fig. 5.

La section de Poincaré peut être choisie comme

$$P_{\text{I}} = \{(u_n, w_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y_n = 0, \dot{y}_n > 0\} \quad (7)$$

ou

$$P_{\text{II}} = \{(u_n, w_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y_n = 0, \dot{y}_n < 0\} . \quad (8)$$

Les deux sections de Poincaré sont montrées Fig. 7. La forme annulaire — caractéristique d'un attracteur toroïdal — est clairement identifiée. Les nombreux plis, identifiés dans l'espace $\mathbb{R}^3(x', y', z)$, également évidents. Le trou est déformé. Cette propriété a une conséquence importante dans la structure du portrait de phase comme décrit ci-dessous. En effet, l'axe de rotation est parallèle au cœur du trou dans la partie supérieure de l'attracteur (Fig. 8) mais, comme cela est montré Fig. 7, la partie inférieure du trou est déformée et l'axe de rotation coupe la frontière toroïdale et l'attracteur qu'elle contient. L'axe de rotation coupe ainsi le tore d'une telle manière que la partie supérieure de l'attracteur est « couverte » comme cela est représenté Fig. 8.

5 Conclusion

Un nouvel attracteur chaotique toroïdal, récemment proposé par Li, a été étudié. Il est montré que cet attracteur est borné par un tore de genre trois avec auto-intersection des trous. Par conséquent, l'attracteur de Li correspond à un attracteur chaotique d'un nouveau type de topologie. Le système de Li est ainsi un nouveau système quadratique avec une rotation d'ordre 2. Ce système mérite de rejoindre les attracteurs de Rössler et de Lorenz pour illustrer différents types de topologies inéquivalentes.

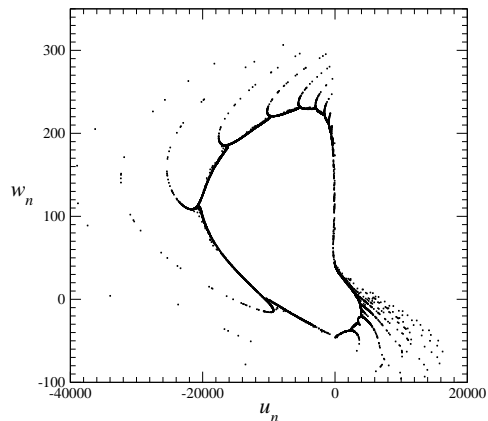


Fig.7. Section de Poincaré P_I et P_{II} de l'image de l'attracteur toroïdal chaotique de Li. Mêmes valeurs des paramètres que Fig. 5.

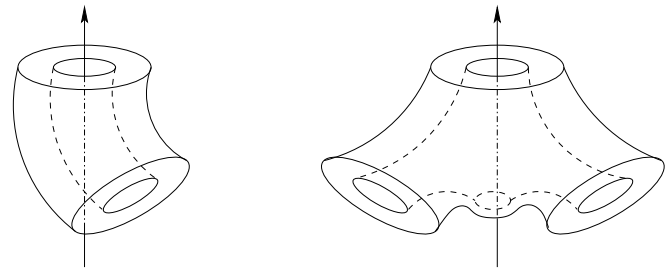


Image déformée

Double couverture

Fig.8. Double couverture du tore image de genre 1 et « déformé ». La double couverture est un tore de genre 3 comme indiqué Figs. 3 et 4.

Remerciements

Robert Gilmore remercie le CNRS — Département ST2I — pour sa position de chercheur invité au CORIA pour l'année 2006-2007.

Références

1. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
2. D. LI, A three-scroll chaotic attractor, *Physics Letters A*, **372** (4), 387-393, 2008.
3. R. GILMORE & C. LETELLIER, *The Symmetry of Chaos*, Oxford University Press, 2007.
4. C. LETELLIER, R. GILMORE & T. JONES, Peeling bifurcations of toroidal chaotic attractors, *Physical Review E*, **76**, 066204, 2007.
5. H. GIACOMINI & S. NEUKIRCH, Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model, *Physics Letters A*, **227**, 309-318, 1997.
6. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in \mathbb{R}^3 , *Physical Review E*, **69**, 056206, 2004.
7. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & G. GOUESBET. Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E*, **49** (4), 3492-3495, 1994.
8. M. GREENBERG & J. HARPER, *Algebraic Topology*, Benjamin/Cummings, 1981.
9. C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems : Two-fold covers, *Physical Review E*, **63**, 16206, 2001.
10. G. BYRNE, R. GILMORE & C. LETELLIER, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70**, 056214, 2004.
11. C. LETELLIER, G. AMARAL & L. A. AGUIRRE, Insights into the algebraic structure of Lorenz-like systems using feedback circuit analysis and piecewise affine models, *Chaos*, **16**, 013115, 2006.