

Instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession

Romain Lagrange¹, Patrice Meunier¹, Christophe Eloy¹ & François Nadal²

¹ IRPHE, CNRS & Aix-Marseille Université, 49 rue Joliot-Curie, 13013 Marseille

² Commissariat à l'Énergie Atomique, CESTA 33114 Le Barp

lagrange@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Dans ce papier nous analysons de façon théorique et expérimentale l'instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession. Pour des nombres de Reynolds petits cet écoulement est stable et peut être décrit comme une superposition de modes de Kelvin forcés par le mouvement de précession. Pour des grands nombres de Reynolds l'écoulement devient instable. Un mécanisme de résonance triadique entre modes de Kelvin explique ce phénomène et permet de déterminer le seuil de stabilité. Cette théorie est en très bon accord avec les mesures expérimentales.

Abstract. This paper addresses experimentally and theoretically the instability of a fluid inside a precessing cylinder. For small Reynolds numbers this flow is stable and can be described as a superposition of Kelvin modes forced by the precessional motion. For larger Reynolds numbers it becomes unstable. A mechanism of triadic resonance between Kelvin modes explains this phenomenon and allows to determine the stability threshold, in excellent agreement with experimental results.

1 Introduction

L'étude de l'instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession s'applique à de nombreux domaines. Par exemple, en aéronautique, la présence d'un fluide (tel que le carburant liquide) dans un objet volant (satellite, fusée) peut avoir des conséquences dangereuses sur la stabilité de cet objet. En effet, si un léger angle de précession apparaît du fait d'une non-axisymétrie de l'objet, l'écoulement à l'intérieur de celui-ci peut exercer un couple sur sa structure et dévier sa trajectoire. Il semble donc important de connaître l'écoulement à l'intérieur de l'objet, mais aussi de connaître le couple induit. D'un point de vue géophysique, la précession de la Terre génère un forçage sur son noyau liquide. L'écoulement induit par ce forçage pourrait alors être responsable de la géodynamo, qui crée le champ magnétique terrestre. On comprend ainsi pourquoi l'étude de l'écoulement dans un objet en précession a déjà fait l'objet de nombreuses recherches.

Des expériences telles que celles menées par McEwan (1970) ont clairement montré qu'un fluide en précession engendre un écoulement de rotation solide auquel se superposent des ondes, appelées ondes inertielles ou encore modes de Kelvin. Ces ondes sont forcées à la fréquence de précession. Une analyse linéaire non-visqueuse suffit pour prédire précisément leurs structures et leurs amplitudes. Cependant, lorsque la fréquence de précession est égale à la fréquence libre d'une onde, son amplitude diverge par un phénomène de résonance. La prise en compte des non-linéarités et des effets visqueux est alors nécessaire pour connaître la saturation en amplitude. Dans le cas de la précession on constate que cet écoulement de base devient instable lorsque le nombre de Reynolds, ou l'angle de précession, augmente. Cela conduit à un état très désordonné et possédant de petites structures par rapport à la taille du cylindre. L'apparition brutale de ce désordre, appelé phénomène de "resonant collapse" par McEwan (1970) ou encore "explosion" par Kobine (1996) et Manasseh (1996) reste encore incompris à l'heure actuelle. Nous proposons un mécanisme de résonance triadique pour expliquer cette instabilité qui constitue la première bifurcation d'une transition vers la turbulence.

2 Présentation du problème

Nous considérons un cylindre de rayon R et de hauteur H empli entièrement d'un fluide de viscosité cinématique ν . Ce cylindre est en rotation autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire Ω_1 . Il est positionné sur une plateforme tournant à la vitesse angulaire Ω_2 . L'angle entre les deux axes de rotation est noté θ comme indiqué sur la figure 1(a). Cet angle de précession reste petit : $0.25^\circ < \theta < 10^\circ$. La dynamique de ce système en précession dépend de quatre nombres sans dimension : le rapport d'aspect $h = H/R$, le rapport de fréquence $\omega = \Omega_1/(\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))$, le nombre de Rossby $Ro = \Omega_2 \sin(\theta)/(\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))$ et le nombre de Reynolds $Re = (\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))R^2/\nu$. Un montage expérimental a été construit au sein du laboratoire et permet de réaliser des mesures PIV (Particle Image Velocimetry) de champs de vitesse dans une section transverse du cylindre. Cela est décrit en détail dans Meunier et al. (2008). Dans la suite de l'étude nous utilisons les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) . Les longueurs sont adimensionnées par R et le temps par $(\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))^{-1}$.

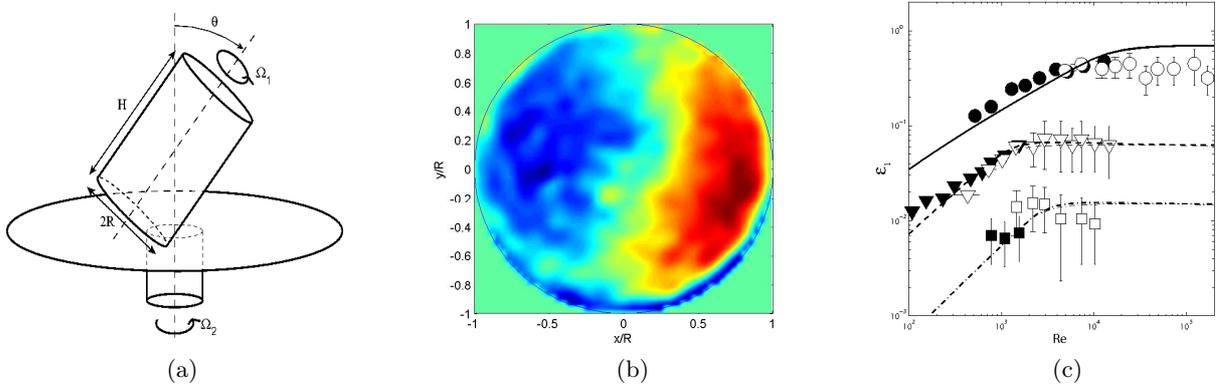


Fig.1. (a) Schéma d'un cylindre en précession. (b) Champ de vorticité du premier mode de Kelvin obtenu par PIV à sa première résonance, en l'absence d'instabilité ($h = 1.62$, $\omega = 1.18$, $Re \approx 3500$, $Ro = 0.0031$). (c) Amplitude du premier mode de Kelvin à sa première (ligne continue), deuxième (ligne discontinue) et troisième (ligne discontinue avec points) résonance. Les symboles représentent des mesures expérimentales ($h = 1.8$, $\theta = 2^\circ$).

3 Écoulement de base

La figure 1(b) représente la vorticité axiale de l'écoulement, dans le référentiel du cylindre, pour des petits nombres de Reynolds et de Rossby. Deux tourbillons contra-rotatifs sont observés. Cette structure correspond à un mode de Kelvin (premier mode de Kelvin) excité par la précession. Une théorie linéaire et non visqueuse permet de prédire son amplitude ε_1 . Quand ce mode est résonant (i.e $h = n\lambda/2$, avec n un nombre impair et λ la longueur d'onde du mode) son amplitude diverge. Une théorie visqueuse (Gans (1970)) et faiblement non-linéaire (Meunier et al. (2008)) est alors nécessaire pour prédire la saturation en amplitude. La figure 1(c) représente l'amplitude de saturation ε_1 du premier mode de Kelvin en fonction de Re à ses trois premières résonances. Nous avons montré (Meunier et al. (2008)) que pour des faibles nombres de Reynolds ε_1 varie en $Ro\sqrt{Re}$. Pour des grands nombres de Reynolds ε_1 varie en $Ro^{1/3}$. Ces deux scalings sont vérifiés par des mesures PIV représentées par des symboles sur la figure 1(c).

4 Etude de l'instabilité

4.1 Visualisation expérimentale

Il est bien connu que lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds ou le nombre de Rossby (Manasseh (1996), Kobine (1996)), l'écoulement devient instable puis rapidement turbulent. Nous montrons que cette instabilité résulte d'un mécanisme de résonance triadique entre le mode de Kelvin forcé et deux modes

libres. Ces modes libres ont été observés par des mesures PIV en regardant la vorticité de l'écoulement dans deux sections différentes du cylindre (Figures 2(a) et 2(b)). Ils vérifient la condition de résonance $m_2 - m_1 = m$ où m_1 , m_2 et m sont les nombres d'onde azimutaux respectifs des deux modes libres et du mode de Kelvin forcé. Pour confirmer ce mécanisme une analyse de stabilité linéaire a été développée.

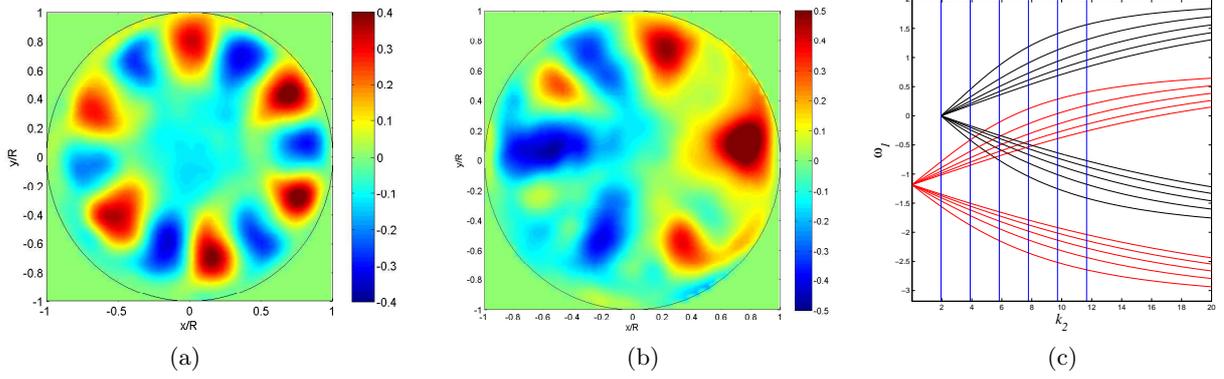


Fig.2. (a) Champ de vorticité expérimental mesuré à mi-hauteur du cylindre. (b) Champ de vorticité expérimental mesuré au trois quart de la hauteur du cylindre. $h = 1.62$, $Re = 5900$, $Ro = 0.0031$, $\omega = 1.18$. (c) Relations de dispersion des modes de Kelvin libres de nombre azimutal $m = 5$ (noir) déplacée de k_l et de nombre azimutal $m = 6$ (rouge) déplacée de ω .

4.2 Analyse de stabilité linéaire

Dans la suite de ce papier, les variables en caractères gras représentent des quadrivecteurs vitesse–pression.

Le point de départ de l'analyse de stabilité linéaire est de considérer que l'écoulement à l'intérieur du cylindre est la somme de l'écoulement de base (constitué d'un mode de Kelvin résonnant \mathbf{u}_l , d'amplitude ε_l), auquel vient s'ajouter une perturbation notée \mathbf{u}

$$\mathbf{v} = \varepsilon_l \mathbf{u}_l + \mathbf{u}. \quad (1)$$

Nous supposons que \mathbf{v} vérifie l'équation de Navier–Stokes ainsi que l'équation de continuité. Cela se résume sous forme matricielle par l'égalité suivante pour la perturbation

$$L\mathbf{u} = \varepsilon_l N(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}), \quad (2)$$

où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur permettant l'interaction du mode de base résonnant \mathbf{u}_l avec la perturbation \mathbf{u} . La solution de l'équation (2) est recherch e en effectuant un développement asymptotique de \mathbf{u} en puissance du petit paramètre ε_l

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \varepsilon_l \mathbf{u}^{(1)} + O(\varepsilon_l^2). \quad (3)$$

En injectant la décomposition (3) dans l'équation (2) nous obtenons les problèmes d'ordre 0 et 1 en ε_l . Le problème d'ordre 0 en ε_l s'écrit

$$L\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

La solution de ce problème correspond à une somme de modes de Kelvin libres

$$\mathbf{u}^{(0)}(r, \varphi, z, t) = \sum_{\omega, m, k} \mathbf{u}_{\omega, m, k}(\mathbf{r}) e^{i(\omega t + m\varphi + kz)}. \quad (5)$$

Ils sont définis par leur fréquence ω , nombre d'onde azimutal m et nombre d'onde axial k et vérifient la relation de dispersion tracée figure 2(b) pour les modes $m = 5$ et $m = 6$

$$D(m, \omega, k) = 0. \quad (6)$$

Pour résoudre le problème d'ordre 1 en ε_l nous retenons de la perturbation à l'ordre 0 une combinaison linéaire de deux modes de Kelvin libres d'amplitudes A_1 et A_2 lentement variables en fonction de t

$$\mathbf{u}^{(0)} = A_1(t)\mathbf{u}_1(r)e^{i(\omega_1 t + m_1 \varphi + k_1 z)} + A_2(t)\mathbf{u}_2(r)e^{i(\omega_2 t + m_2 \varphi + k_2 z)}. \quad (7)$$

L'écoulement est donc composé à cet ordre d'un mode de Kelvin forcé résonnant et de deux modes de Kelvin libres. Ces trois modes peuvent interagir par un mécanisme de résonance triadique si l'interaction non-linéaire entre deux modes de Kelvin permet le développement du troisième. Ce mécanisme est possible si les trois conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} m_2 - m_1 = 1, \\ \omega_2 - \omega_1 = \omega, \\ |k_2 - k_1| = k_l. \end{cases} \quad (8)$$

Les modes de Kelvin libres sont donnés par la relation de dispersion (6). Trouver ceux vérifiant la condition de résonance triadique (8) revient à chercher les solutions de l'équation $D(m_1, \omega_1, k_1) = D(m_2 - 1, \omega_2 - \omega, k_2 \pm k_l)$. Il y a une infinité de solutions qui correspondent aux points d'intersection visibles sur la figure 2(b). La détermination des coordonnées de ces points définit les modes de Kelvin libres résonnants. En injectant l'expression (7) dans le problème d'ordre 1 en ε_l nous obtenons via une condition de solvabilité les équations d'amplitude suivantes

$$\begin{cases} \partial_t A_1 = \varepsilon_l N_1 A_2, \\ \partial_t A_2 = \varepsilon_l N_2 A_1. \end{cases} \quad (9)$$

Pour un triplé de modes de Kelvin choisis (écoulement de base et modes de Kelvin libres résonnants), N_1 et N_2 sont des constantes qui peuvent s'exprimer analytiquement.

En cherchant A_j sous la forme $A_j = C_j \exp(\sigma t)$ avec C_j une constante nous obtenons l'équation pour le taux de croissance σ

$$\sigma = \varepsilon_l \sqrt{N_1 N_2}. \quad (10)$$

Cette relation est vraie dans le cas d'un cylindre infini en hauteur. Pour prendre en compte son aspect fini et donc respecter des conditions aux limites, nous sommes obligés de rajouter des termes de detuning à nos deux modes de Kelvin libres résonnants. Leur nombre d'onde axial devient alors $k_j + \Delta k_j$, où Δk_j qui est le "detuning" sur le mode j doit être d'ordre ε_l pour que l'analyse asymptotique reste valide. Graphiquement (figure 2(b)), Δk_j correspond à la distance entre un point d'intersection et la droite verticale bleue la plus proche (Ces droites représentent la discrétisation sur k_j induite par les conditions limites aux extrémités du cylindre). Les effets visqueux (volumiques et surfaciques) peuvent également être pris en compte. Dans ce cas les équations d'amplitude deviennent

$$\begin{cases} \partial_t A_1 = \varepsilon_l N_1 A_2 - i\Delta k_1 Q_1 A_1 - Re^{-1} V_1^{vol} A_1 - Re^{-1/2} V_1^{surf} A_1, \\ \partial_t A_2 = \varepsilon_l N_2 A_1 - i\Delta k_2 Q_2 A_2 - Re^{-1} V_2^{vol} A_2 - Re^{-1/2} V_2^{surf} A_2, \end{cases} \quad (11)$$

où $Q_1, Q_2, V_1^{vol}, V_2^{vol}$ (termes d'amortissement visqueux volumiques), V_1^{surf}, V_2^{surf} (termes d'amortissement visqueux surfaciques) peuvent s'exprimer analytiquement.

Le taux de croissance vérifie alors une équation polynomiale du second degré, à coefficients complexes et dépendant du nombre de Reynolds et de l'amplitude ε_l

$$a(\varepsilon_l, Re) \sigma^2 + b(\varepsilon_l, Re) \sigma + c(\varepsilon_l, Re) = 0. \quad (12)$$

L'amplitude critique ε_{crit} pour laquelle l'écoulement devient instable est obtenue en résolvant

$$\sigma(\varepsilon_{crit}, Re) = 0. \quad (13)$$

5 Discussion

Nous avons regardé la stabilité de l'écoulement dans un cylindre en précession en fonction du rapport d'aspect h , du nombre de Rossby Ro et du nombre de Reynolds Re . Afin de prédire le nombre d'onde azimutal de la perturbation, nous avons tracé pour un nombre de Reynolds fixé, dans le cas de la première résonance du mode 1, l'amplitude critique $\varepsilon_{crit}(Re, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ en fonction du rapport d'aspect (figure 3(a)). Nous nous sommes intéressé au cas des modes de Kelvin dont le nombre d'onde azimutal m_1 est compris entre 1 et 14. (En ne considérant que les 5 premières branches des relations de dispersion cela correspond à l'étude d'environ 750 résonances¹). Les courbes de même couleur correspondent à une même valeur de m_1 . Pour distinguer les différentes branches des relations de dispersion des modes de Kelvin (ω_1, m_1, k_1) (respectivement (ω_2, m_2, k_2)), on les numérote par un indice l_1 (respectivement l_2) variant de un à l'infini. Les courbes en trait continu correspondent alors à une interaction entre des modes avec $l_1 = l_2 = 1$. Les traits discontinus correspondent à une interaction entre modes de Kelvin $l_1 = l_2 = 2$. Nous avons montré que les interactions conduisant au taux de croissance maximal ($\sigma_{max} = \varepsilon_l \sqrt{N_1 N_2}$) le plus grand sont celles telles que : $l_1 = l_2$. De plus, $(\sigma_{max})_l$ est une suite décroissante. Ces raisons expliquent pourquoi nous nous sommes intéressé aux cas $l_1 = l_2 = 1$ et $l_1 = l_2 = 2$.

Pour $h = 1.62$ la valeur de ε_{crit} la plus faible est obtenue pour la courbe rouge. Cette courbe est associée à une valeur $m_1 = 5$ donc $m_2 = 6$. Nous expliquons ainsi les visualisations expérimentales faisant apparaître six lobes de vorticité (figure 2(a)) et cinq lobes (figure 2(b)).

Ceci appelle la remarque suivante : le fait de se trouver à un minimum de la courbe rouge est dû au fait que pour $h = 1.62$ nous avons une résonance exacte entre modes (pas d'effets de detuning). Graphiquement (figure 2(b)) les branches $l_1 = 1, l_2 = 1$ des relations de dispersion et la deuxième droite verticale bleue se coupent au même point).

Il nous reste à prédire, pour un nombre de Reynolds donné, le nombre de Rossby critique pour lequel l'écoulement devient instable. Pour cela il suffit de dire que l'écoulement est instable si l'amplitude du mode de Kelvin forcé $\varepsilon_l(Ro, Re)$ donnée par la théorie non-linéaire visqueuse (Meunier et al. (2008)) est supérieure à l'amplitude critique $\varepsilon_{crit}(Re)$ déterminée précédemment. Nous avons vu (théorie non-linéaire visqueuse) qu'en fonction du nombre de Reynolds $\varepsilon_l \sim Ro\sqrt{Re}$ (régime visqueux) ou $\varepsilon_l \sim Ro^{1/3}$ (régime non linéaire). La majorité des expériences réalisées se situent dans le domaine visqueux. Ainsi $\varepsilon_l \sim Ro\sqrt{Re}$. L'analyse de stabilité linéaire montre que pour une résonance exacte $\varepsilon_{crit} \sim Re^{-1/2}$ (saturation du taux de croissance par les effets visqueux surfaciques $Re^{-1/2}V_j^{surf}$) ou $\varepsilon_{crit} \sim Re^{-1}$ (saturation du taux de croissance par les effets visqueux volumiques $Re^{-1}V_j^{vol}$). Ainsi dans nos expériences $Ro_{crit} \sim Re^{-1}$ (régime visqueux et saturation de l'instabilité par les effets surfaciques) ou $Ro_{crit} \sim Re^{-3/2}$ (régime visqueux et saturation de l'instabilité par les effets volumiques). La figure 3(b) est un diagramme de stabilité dans le plan (Re, Ro) . La théorie est représentée par la courbe verte et délimite la zone stable de la zone instable. Pour les paramètres expérimentaux choisis nous avons $Re^{-1/2}V_j^{surf} \approx Re^{-1}V_j^{vol}$ pour $Re \approx 3000$. Ainsi pour les raisons expliquées précédemment, pour $Re \gg 3000$, en diagramme logarithmique, la courbe théorique est une droite de pente -1 . Pour $Re \ll 3000$ c'est une droite de pente $-3/2$. Des mesures expérimentales tirées de la PIV sont également représentées sur la figure 3(b). Nous obtenons un très bon accord entre théorie et expérience, en particulier dans le domaine central de la figure 3(b). Pour les faibles nombres de Reynolds et grands nombres de Rossby nous sommes à la limite de validité de notre théorie asymptotique. En effet dans ce domaine de paramètres l'hypothèse $\varepsilon_1 \ll 1$ n'est plus valable (nous avons $\varepsilon_1 \approx 0.4$). Ceci explique l'écart observé entre théorie et expérience sur le diagramme de stabilité.

¹ Le cas $m_1 = 0$ a été traité isolément. Il conduit au résultat que l'interaction d'un mode $m = 0$ avec deux modes $m = 1$ (perturbation et écoulement de base) est toujours stable.

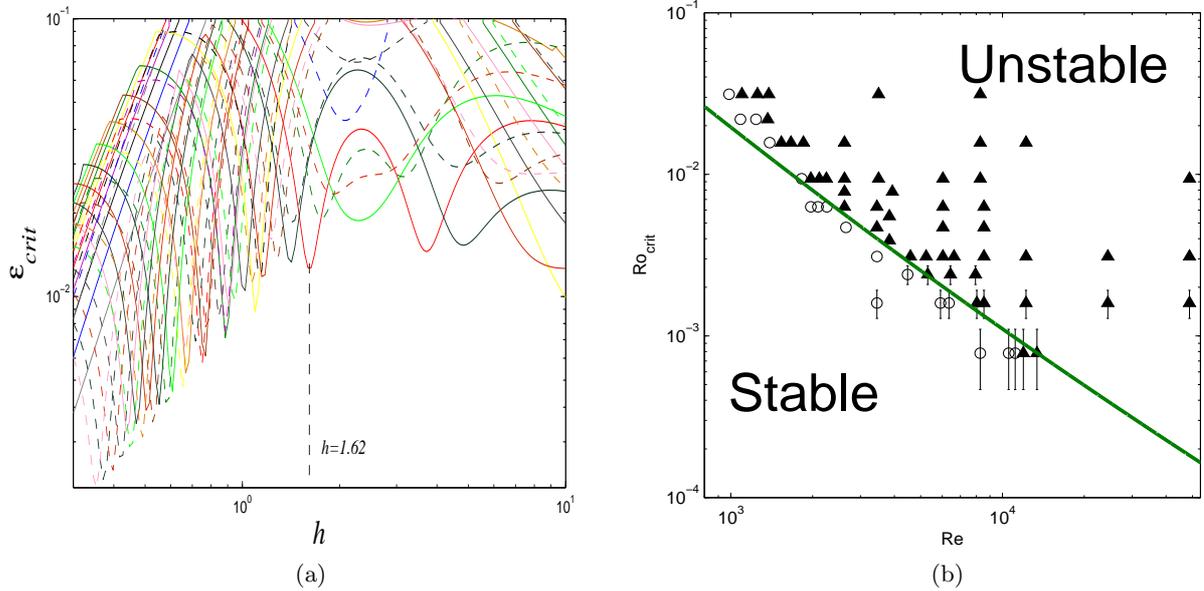


Fig.3. (a) Amplitude critique d'apparition de l'instabilité en fonction du rapport d'aspect pour la première résonance du mode 1. $Re = 10^5$. Chaque courbe correspond à une résonance particulière de 2 modes libres de nombres d'ondes azimutaux m_1 et $m_2 = m_1 + 1$. Traits pleins : premières branches des relations de dispersion $l_1 = l_2 = 1$; traits discontinus : deuxièmes branches $l_1 = l_2 = 2$. (b) Diagramme de stabilité d'un cylindre en précession. La courbe verte correspond au nombre de Rossby critique en fonction de Re obtenu théoriquement pour $h = 1.62$, $\omega = 1.18$. Les cercles représentent des mesures expérimentales stables. Les triangles représentent des mesures instables.

6 Conclusion

Dans cette étude une expression du taux de croissance de l'instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession a été établie. Nous avons montré par une analyse de stabilité linéaire qu'un mécanisme de résonance triadique entre certains modes de Kelvin conduisait à une instabilité. Cette théorie a été vérifiée et validée grâce à des mesures expérimentales obtenues par PIV. A l'heure actuelle nous sommes donc en mesure de prédire les modes de Kelvin participant à l'instabilité (prédiction du nombre d'onde azimutal de la perturbation). Cette théorie permet également de prédire correctement le nombre de Rossby critique en fonction du nombre de Reynolds (diagramme de stabilité).

Références

1. P. MEUNIER, C. ELOY, R. LAGRANGE & F. NADAL, Rotating fluid cylinder subject to weak precession, *Journal of Fluid Mechanics*, **599**, 405-440, (2007).
2. J. J. KOBINE, Azimutal flow associated with inertial wave resonance in a precessing cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, **319**, 387-406, (1996).
3. R. MANASSEH, Nonlinear behaviour of contained inertia waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **315**, 151-173, (1996).
4. A. MAHALOV, The instability of rotating fluid columns subjected to a weak external Coriolis force, *Physics of Fluids A*, **5** (4), 891-900, (1993).
5. A. D. MCEWAN, Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, **40** (3), 603-640, (1970).
6. R. F. GANS, On the precession of a resonant cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, **41** (4), 865-872, (1970).