

# Solitons dissipatifs de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe à (3+1)D : balles de lumière et pulsations

Al. Kamagaté, Ph. Grellu & P.T. Dinda

Institut Carnot de Bourgogne, UMR CNRS 5209, Université de Bourgogne, BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France

Adresse électronique non communiquée

**Résumé.** Nous examinons les solutions localisées stationnaires ou oscillantes de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D. La méthode utilisée est celle des coordonnées collectives. Cette méthode consiste à réduire le problème de l'évolution du champ impulsionnel, à un simple problème de dynamique d'un système mécanique gouverné par un nombre restreint de degrés de liberté, qui sont associés aux paramètres fondamentaux de l'impulsion. Nous montrons qu'un choix approprié de la fonction d'essai (ansatz), permet de mettre en évidence plusieurs variétés de solutions stables et localisées, correspondant à des solitons spatio-temporels dissipatifs. Parmi ces solutions, figurent des solitons à évolution parfaitement stationnaire, et des solitons qui se propagent en exécutant des déformations internes de forte amplitude (soliton à respiration).

## 1 Introduction

L'étude des solitons dissipatifs a connu récemment un regain d'intérêt conduisant à un nombre impressionnant de travaux dans plusieurs domaines des sciences non-linéaires [1]. Les études sur ce type de solitons sont utiles, tant du point de vue fondamental que pour le développement de composants dédiés au traitement par voie purement optique du guidage des impulsions optiques de télécommunications à ultra-haut débit. Les systèmes optiques dissipatifs admettent des solitons à une, deux et trois dimensions [2]. Lorsque les paramètres du système sont bien définis, on peut obtenir des solitons parfaitement stables sur des distances de propagation relativement importantes. En plus des solutions stationnaires, on peut trouver dans d'autres régions de paramètres, des solutions oscillantes, qui correspondent aux impulsions qui se propagent en exécutant des déformations internes de grande amplitude.

Les propriétés et conditions d'existence des solitons à une et deux dimensions, ont été examinées intensivement au cours de la précédente décennie. En comparaison, l'étude des solitons à trois dimensions n'en n'est qu'à ses balbutiements. Dans la présente étude nous nous focalisons sur ce type de solitons, afin d'obtenir ses conditions d'existence et ses propriétés. Nous montrons qu'une approche de coordonnées collectives construite sur des fonctions d'essai convenablement choisies, permet de cerner rapidement les domaines d'existence des solitons stationnaires, et ceux des solitons à respiration.

Pour notre étude, nous considérons le modèle de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D. Cette équation rend compte de la dynamique spatio-temporelle des structures localisées en régime dissipatif non-linéaire, et peut se mettre sous la forme suivante :

$$\psi_z - \frac{i}{2}D\psi_{tt} - \frac{i}{2}\psi_{xx} - \frac{i}{2}\psi_{yy} - i\gamma|\psi|^2\psi - i\nu|\psi|^4\psi = \delta\psi + \beta\psi_{tt} + \epsilon|\psi|^2\psi + \mu|\psi|^4\psi \quad (1)$$

où  $\psi = \psi(x, y, t, z)$  représente l'enveloppe normalisée du champ électrique ;  $t, x, y$ , sont les coordonnées de temps et d'espace,  $z$  est la distance de propagation. Le membre de gauche de cette équation représente les termes conservatifs :  $D$  représente le coefficient de dispersion de la vitesse de groupe,  $\gamma$  le coefficient de non-linéarité Kerr, et enfin  $\nu$  représente le terme de saturation de la non-linéarité. Le membre de droite inclut les termes dissipatifs :  $\delta, \epsilon, \beta$ , et  $\mu$  sont respectivement les coefficients de perte linéaire (si négatif), de gain non-linéaire (si positif), de filtre spectral et de saturation de gain non-linéaire (si négatif). Les systèmes dissipatifs complexes sont souvent non intégrables [3]. Bien que les solutions exactes de CGLE (1+1) existent, elles ne peuvent être explicitement présentées que seulement pour certaines relations entre

les paramètres du système et toutes ces solutions analytiques sont instables [4] ; les seules solutions stables sont obtenues numériquement. En outre, à notre connaissance, il n'existe pas de solution stationnaire de CGLE (3+1) sous forme analytique. Notre étude consiste à mettre au point une cartographie des solutions stables et instables dans l'espace des paramètres de l'équation (1). En effet, les études menées jusqu'à présent emploient principalement les simulations numériques qui prennent un temps de calcul considérable [5]. Ce travail intensif peut être nettement allégé avec la méthode des coordonnées collectives, qui permet une réduction complète du problème de l'évolution du champ, (qui a un nombre infini de degré de liberté) à l'évolution d'un jeu fini de caractéristiques d'une fonction d'essai. Dans ce qui suit, nous emploierons des fonctions d'essai à symétrie cylindrique ; compte tenu de la symétrie entre  $x$  et  $y$  dans (1), on peut poser que  $\psi(x, y, t, z) = \psi(r, t, z)$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Un des paramètres fondamentaux qui décrit l'évolution de la solution est l'énergie totale  $Q$  :

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2\pi r |\psi(r, t, z)|^2 dt dr. \quad (2)$$

Si la solution reste localisée, l'énergie évolue mais reste finie. En outre, quand la solution stationnaire est atteinte, l'énergie  $Q$  converge vers une valeur constante. Une autre possibilité est, pour les solutions à respiration, une oscillation de l'énergie en fonction de  $z$ . Et enfin, pour les solutions instables qui divergent, l'énergie tend vers l'infini. Nous avons observé tous ces scénarios lors des simulations numériques.

## 2 La méthode des Cordonnées Collectives

L'idée de la méthode des coordonnées collectives est d'associer une variable (appelée variable collective) à chaque degré de liberté d'un système mécanique équivalent (au système initial décrit par le champ  $\psi(r, t, z)$ ). Chaque variable collective est introduite de manière à ce qu'elle décrive une grandeur physique fondamentale du soliton (amplitude, position temporelle, largeur, chirp, etc.) [6]. A cette fin, on fait l'approximation qui consiste à exprimer le champ impulsional exact  $\psi(r, t, z)$ , dont l'expression analytique est inconnue, comme suit :

$$\psi(r, t, z) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + q(z, t), \quad (3)$$

où la fonction ansatz  $f$  est choisie pour représenter au mieux la configuration de l'impulsion et  $q$  est un champ résiduel dont la présence assure que la somme de  $f$  et  $q$  vérifie l'équation (1). Le choix de l'ansatz est constitué une étape capitale dans la mise en place d'une méthode de coordonnées collectives. Généralement, les fonctions ansatz utilisées pour les solitons optiques sont de type sécante hyperboliques, gaussiennes ou supergaussiennes. Un des résultats remarquables de notre étude est la mise en évidence que l'ansatz qui conduit aux meilleurs résultats dans un vaste domaine de paramètres est la supergaussienne, qui s'exprime de la manière suivante :

$$-\frac{r^4}{x_3^4} + ix_4 t^2 + ix_5 r^2 + ix_6 \quad (4)$$

Nous avons employé une fonction supergaussienne avec un chirp spatial et temporel car le système est dissipatif. Les  $x_i$  représentent les coordonnées collectives ( $i = 1 \dots 6$ ) :  $x_1$  est l'amplitude de l'impulsion,  $x_2$  et  $x_3$  sont associés aux largeurs temporelle et spatiale transverse de l'impulsion,  $x_4/(2\pi)$  est le paramètre de chirp suivant  $t$  de l'impulsion,  $x_5/(2\pi)$  est le paramètre de chirp suivant  $r$  de l'impulsion,  $x_6$  est la constante de phase.

A l'aide de l'approche des coordonnées collectives et en utilisant notre ansatz (4) nous avons obtenu à partir de l'équation (1), un jeu de six équations différentielles ordinaires qui gouvernent l'évolution des

paramètres d'une impulsion se propageant dans l'espace et le temps.

$$\dot{x}_1 = x_1\delta + 0.46x_1^3\epsilon e^{\frac{1}{2}} + 0.21\mu x_1^5 e - x_1x_4D - 4x_1x_5 - \frac{x_1\beta}{x_2^2}(3.18 + 0.17x_2^4x_4^2) \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2x_4D - 0.12x_2x_1^2\epsilon e^{\frac{1}{2}} - 0.07x_1^4x_2\mu e + (2.63 - 0.81x_2^4x_4^2)\frac{\beta}{x_2} \quad (6)$$

$$\dot{x}_3 = 4x_3x_5 - 0.12x_3x_1^2\epsilon e^{\frac{1}{2}} - 0.07x_1^4x_3\mu e \quad (7)$$

$$\dot{x}_4 = \left(\frac{4.90}{x_4^4} - 2x_4^2\right)D - \frac{18.31x_4\beta}{x_2^2} - \frac{0.63x_1^2\gamma e^{\frac{1}{2}}}{x_2^2} - \frac{0.38x_1^4\nu e}{x_2^2} \quad (8)$$

$$\dot{x}_5 = -4x_5^2 + \frac{5.81}{x_3^4} - \frac{0.63x_1^2\gamma e^{\frac{1}{2}}}{x_3^2} - \frac{0.38x_1^4\nu e}{x_3^2} \quad (9)$$

$$\dot{x}_6 = 2.65\beta x_4 + 0.25x_1^4\nu e + 0.52x_1^2\gamma e^{\frac{1}{2}} - \frac{5.28}{x_3^2} - \frac{1.64D}{x_2^2} \quad (10)$$

L'intérêt de cette approche (de coordonnées collectives) réside dans l'aisance avec laquelle elle permet d'obtenir les points fixes, ainsi qu'une cartographie des différents types de solutions, ce qui réduit de plusieurs ordres de grandeur le volume de calcul habituellement requis pour obtenir le même type de résultats.

### 3 Etude de la stabilité

Les points fixes (points fixes) du système peuvent être obtenus en résolvant l'équation  $\dot{x}_i = 0$  avec  $i = 1\dots 6$ . Le seuil d'existence des points fixes peut être estimé par la relation suivante  $\epsilon_s \approx 2\sqrt{\delta\mu}$ . Si  $\epsilon > \epsilon_s$  on a deux types de points fixes; les points fixes stables et les points fixes instables. La stabilité des points fixes est déterminée par l'analyse des valeurs propres  $\lambda_j$  avec  $j = 1\dots 6$  de la matrice de stabilité  $M_{ij} = \partial\dot{x}_i/\partial x_j$  [7,8].

Notre critère de stabilité est le suivant : si la partie réelle d'au moins une des valeurs propres est positive, alors le point fixe correspondant est instable; donc pour avoir des points fixes stables il faut que les parties réelles des valeurs propres de la matrice  $M_{ij}$  soient toutes négatives. Les points fixes stables correspondent aux solutions stables de l'équation (1) (balles de lumière stables). Les balles de lumière existent dans des régions définies dans l'espace des paramètres de (1), mais il est extrêmement difficile de faire la cartographie de ces régions en faisant varier à la fois les sept paramètres. On réalise des sections des domaines d'existence en fixant cinq paramètres et variant les deux autres paramètres, ainsi on cartographie dans un plan la région des balles de lumière stables.

Ainsi, en explorant les régions des paramètres situées au voisinage de  $D = \gamma = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\delta = -0.4$ , et  $\mu = -0.1$ , nous avons mis en évidence dans le plan  $(\nu, \epsilon)$  une riche variété de solutions de l'équation (1) incluant les solitons spatio-temporels stationnaires. La fonction suivante, arbitraire, est le champ initial à partir duquel on résout l'équation des points fixes.

$$\psi(r, t, 0) = 3.54 \exp\left(-\frac{t^2}{0.33} - \frac{t^4}{0.10} - \frac{r^2}{0.31} - \frac{r^4}{0.10}\right), \quad (11)$$

En partant de cette condition initiale (11), et en faisant varier  $\nu$  de  $-0.12$  à  $-0.03$  et  $\epsilon$  de  $0.5$  à  $0.95$ , on arrive à une cartographie des solutions de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D regroupant les solitons stationnaires (balles de lumière) et les solitons oscillantes à respirations. La Figure 1 montre la cartographie des solutions pour la gamme des valeurs choisies; on a en pointillé les solutions stables stationnaires qui représentent les balles de lumière. Ces impulsions conservent leurs amplitudes, leurs largeurs spatiales et temporelles et leurs chirps spatial et temporel constants sur de très grandes distances. Après une courte oscillation (à gauche en figure 2), l'énergie d'une telle impulsion devient constante lors de la propagation. La figure 3 donne le profil temporel d'une balle de lumière en propagation.

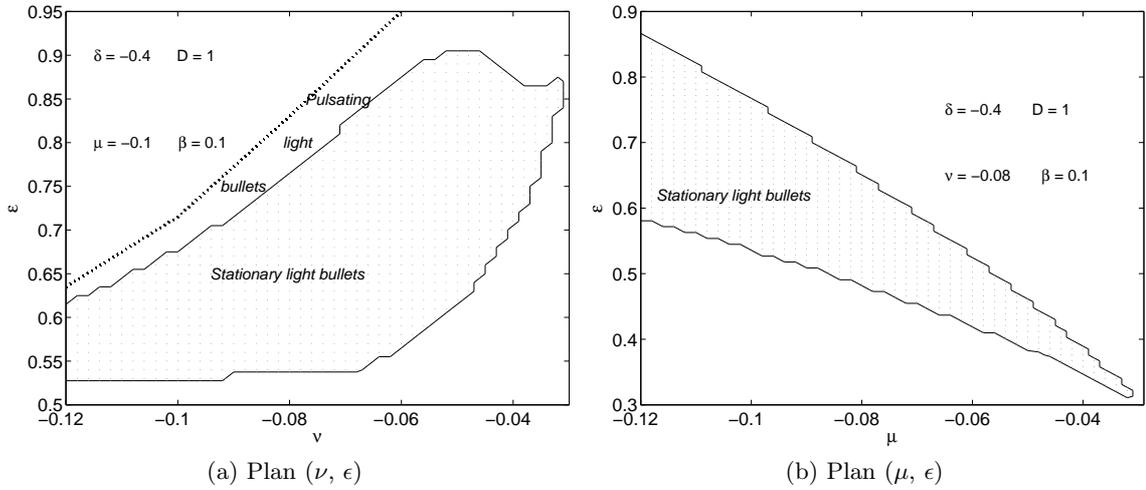


Fig.1. Cartographies des solutions : les points fixes stables sont représentés en pointillés.

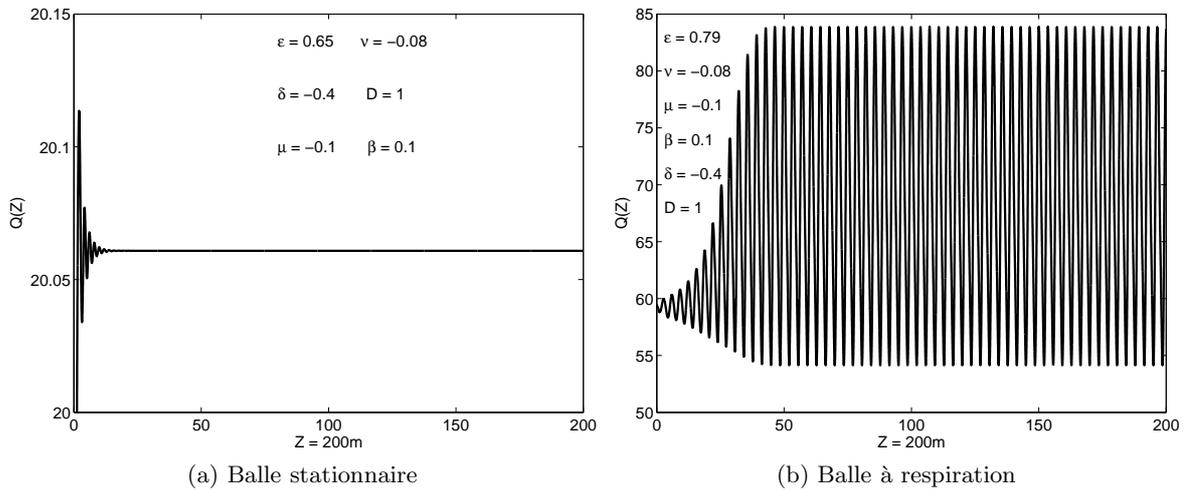
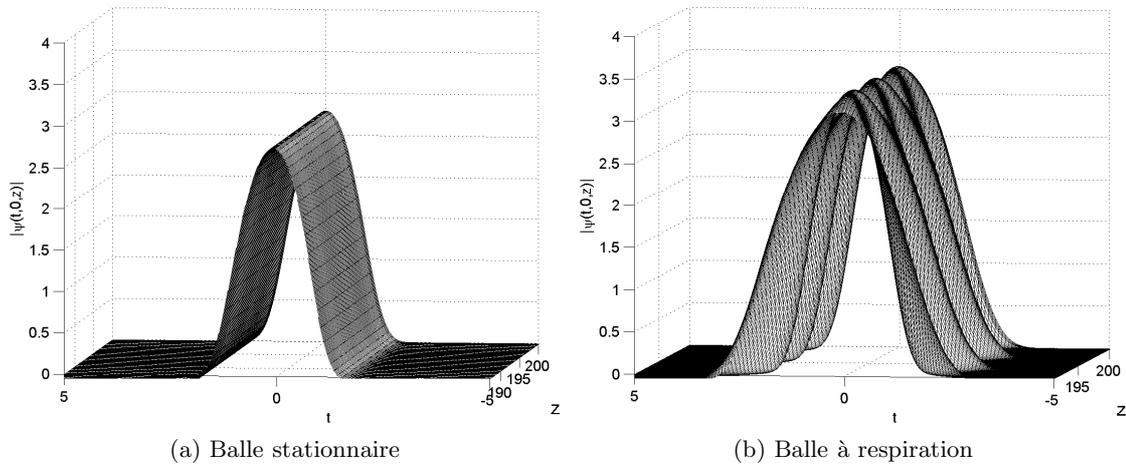


Fig.2. Evolution de l'énergie de balle de lumière.

Au dessus des points fixes stables, on a les points fixes instables. Cette zone peut être divisée en deux parties suivant le comportement des impulsions. La zone proche des solitons stationnaires, correspond à celle des solitons oscillantes que nous appelons "soliton à respiration", par analogie avec les solutions 1D. Ces impulsions ont des paramètres (amplitudes, largeurs) qui oscillent, mais cette oscillation demeure stationnaire sur de très grandes distances. Il en va de même pour l'énergie (voir figure 2), qui oscille au cours de la propagation après une période transitoire de courte distance. Sur la même figure 3, on voit le profil d'une balle de lumière à respiration qui corrobore le comportement d'une telle impulsion. La deuxième partie (la partie supérieure) des points fixes instables correspond aux impulsions instables, dont l'énergie diverge rapidement vers l'infini.

Comme nous l'avons dit plus haut, pour qu'il ait stabilité, il faut entre autre un équilibre entre les pertes et le gain. En d'autres termes il serait intéressant de voir comment le gain non-linéaire et sa saturation agissent sur la stabilité des impulsions. Pour y arriver nous avons obtenu une cartographie des balles de lumière dans le plan  $(\mu, \epsilon)$  pour des valeurs de  $\nu, \delta, \gamma, D, \beta$  valant  $(-0.08, -0.4, 1, 1, 0.1)$ . Le résultat est représenté sur la figure 1. Il en ressort que, lorsque la saturation du gain non-linéaire



**Fig.3.** Evolution du profil temporel au cours de la propagation pour une balle de lumière.

diminue et que le gain non-linéaire augmente, on obtient une zone de stabilité de point fixe qui devient de plus en plus large; Ainsi donc, pour avoir des balles de lumières stables il faut que les fortes pertes relatives à la saturation du gain non-linéaire soient compensées par une augmentation du gain non-linéaire. Cette propriété s'accorde qualitativement bien avec celle décrite dans la référence [3], dans le cas unidimensionnel (solitons temporels).

## 4 Conclusion

Au terme de notre étude, nous avons pu, par une méthode simple et très peu onéreuse en temps de calculs, mettre en évidence des balles de lumière stationnaires et oscillantes de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D dans différent plans des paramètres de l'équation. Mais la validité de cette étude repose sur un choix minutieux de la fonction ansatz car, en fonction de l'ansatz, l'étendue des différentes zones de stabilité varient. Ce travail peut être approfondi, avec un potentiel applicatif dans les domaines de la physique, la chimie et la biologie qui sont d'écrits par l'équation de Ginzburg-Landau Complexe. A titre d'exemple nous pouvons mentionner pour le domaine optique, les fonctions de traitement parallèle, la réalisation des mémoires tampons optique, et la régénération des bits optiques.

## Références

1. *Dissipative solitons*, Ed. N.Akhmediev & A. Ankiewicz, Springer (2005).
2. N. N. ROSANOV, *Spatial Hysteresis and Optical Patterns*, Springer, (2002).
3. J.-M SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV & V. V.AFANAJEV, *Journal of the Optical Society of America B*, **13**, 1439 (1996).
4. J.-M SOTO-CRESPO, P. GRELU, N.AKHMEDIEV & N. DEVINE, *Physical Review E*, **75** 016613 (2007).
5. J.-M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV & P. GRELU, *Physical Review E*, **74**, 046612 (2006).
6. P. T. DINDA, A. B. MOUBISSI & K. NAKKEERAN, *Physical Review E*, **64**, 016608 (2001).
7. E. N. TSOY, A. ANKIEWICZ & N. AKHMEDIEV, *Physical Review E*, **73**, 036621 (2006).
8. E. N. TSOY & N. AKHMEDIEV, *Physics Letters A*, **343**, 417-422 (2005).