Courbure du Flot de Systèmes Dynamiques

Ginoux Jean-Marc & Rossetto Bruno

Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon, Université du Sud, B.P. 20132, 83957, La Garde Cedex, France
ginoux@univ-tln.fr

Résumé. En considérant les courbes trajectoires, intégrales de systèmes dynamiques de dimension n, dans le cadre d'application de la Géométrie Différentielle comme des courbes d'un espace n-Euclidien, la *variété de courbure du flot* est définie comme le lieu des points où la courbure des courbes trajectoires s'annule.

Il est tout d'abord établi dans cet article que la courbure du flot, c'est-à-dire la courbure des courbes trajectoires de tout système dynamique lent-rapide de dimension n fournit directement l'équation analytique de la variété lente invariante par le flot de ce système selon la théorie de Darboux. Il est alors démontré que la variété obtenue par cette *méthode de courbure du flot* qui ne fait appel ni aux vecteurs propres ni à des développements asymptotiques mais implique seulement les dérivées successives du champ de vecteurs vitesse, coïncide avec celle de Fenichel. Ainsi, il est établi que cette méthode qui généralise l'*Approximation du Système Linéaire Tangent* et englobe la *Théorie Géométrique des Perturbations Singulières* permet une détermination simple et directe de l'équation analytique de la variété lente invariante de systèmes dynamiques lent-rapides de dimensions élevées.

Il est ensuite démontré que la courbure du flot de systèmes dynamiques autonomes de dimension n permet également de déterminer les *variétés linéaires* (droites, plans ou hyperplans) invariantes par le flot de ces systèmes. Il est alors établi que toute *variété linéaire* invariante est en facteur dans la *variété de courbure du flot*.

Abstract. Considering trajectory curves, integral of n-dimensional dynamical systems, within the framework of Differential Geometry as curves in Euclidean n-space, the *flow curvature manifold* is defined as the location of the points where the curvature of trajectory curves vanishes.

It is first established in this article that the curvature of the flow, c'est-à-dire the curvature of the trajectory curves of any n-dimensional slow-fast dynamical system directly provides its slow manifold analytical equation invariant with respect to the flow of the dynamical system according to Darboux theory. Thus, it is stated that the manifold obtained with this *flow curvature method*, which uses neither eigenvectors nor asymptotic expansions but only involves time derivatives of the velocity vector field, conicides with those of Fenichel. Thus, it is shown that this method which generalizes the *Tangent Linear System Approximation* and encompasses the so-called *Geometric Singular Perturbation Theory* enables a simple and direct determination of the slow invariant manifold analytical equation of high-dimensional slow-fast dynamical systems.

Then, it is shown that curvature of the flow of any n-dimensional dynamical system also enables to determine *linear manifolds* such as straight lines, planes or hyperplanes. It is thus established that every *linear invariant manifold* is a factor of the *flow curvature manifold*

1 Système d'équations différentielles

On considère un système d'équations différentielles défini sur un compact E de $\mathbb{R}$ par :

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \Im\left(\boldsymbol{X}\right) \tag{1}$$

Le vecteur $\Im\left(\boldsymbol{X}\right) = {}^t\left[f_1\left(\boldsymbol{X}\right), f_2\left(\boldsymbol{X}\right), ..., f_n\left(\boldsymbol{X}\right)\right]$ défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes f_i indépendantes du temps, supposées continues, de classe C^{∞} sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [4]. Ce système autonome admet une *courbe trajectoire* $\boldsymbol{X} = {}^t\left[x_1, x_2, ..., x_n\right]$ tangente à $\Im$ en tout point (sauf aux points fixes).

2 Variété de courbure du flot

La *variété de courbure nulle* est définie comme le lieu des points où la *courbure du flot*, c'est-à-dire la *courbure* de la *courbe trajectoire* $\boldsymbol{X}(t)$ intégrale du système défini par (1) s'annule :

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \dot{\boldsymbol{X}} \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{X}} \wedge \dddot{\boldsymbol{X}} \wedge \ldots \wedge \overset{(n)}{\boldsymbol{X}} \right) = det\left(\dot{\boldsymbol{X}}, \ddot{\boldsymbol{X}}, \dddot{\boldsymbol{X}}, \ldots, \overset{(n)}{\boldsymbol{X}} \right) = 0 \tag{2}$$

où $\overset{(n)}{\boldsymbol{X}}$ représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$.

Démonstration. Cf. Ginoux *et al.* [9].

3 Théorème d'invariance de Darboux

Soit ϕ une fonction de classe C^1 définie sur un compact E inclus dans $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{X}(t)$ la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1). La dérivée de Lie est définie par :

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\dot{x}_i = \frac{d\phi}{dt} \tag{3}$$

Une *variété* définie par $\phi(\boldsymbol{X}) = 0$ où ϕ est une fonction de classe C^1 dans un ouvert U et dite *invariante* s'il existe une fonction C^1 notée $k(\boldsymbol{X})$ et appelée cofacteur qui satisfasse pour tout $\boldsymbol{X} \in U$:

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi(\boldsymbol{X}) = k(\boldsymbol{X})\,\phi(\boldsymbol{X}) \tag{4}$$

Démonstration. Cf. Gaston Darboux [5].

4 Variété lente de systèmes dynamiques

Proposition 1.

Le lieu des points où la courbure du flot, c'est-à-dire la courbure des courbes trajectoires de tout système dynamique lent-rapide de dimension n s'annule fournit directement l'équation analytique de la variété lente de dimension $(n-1)$ *associèe à ce système.*

Démonstration. Considérant que le système dynamique défini par (1) est lent-rapide, c'est-à-dire qu'il possède un ou plusieurs petit paramètre ε en facteur dans son champ de vecteurs vitesse, en écrivant la *variété de courbure du flot* (2) comme :

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \varepsilon) = 0 \tag{5}$$

et en injectant dans cette équation (5) un développement en perturbations singulières du type : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{z}, \varepsilon) = \boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{z}) + \varepsilon \boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{z}) + O(\varepsilon^2)$ on résout ordre après ordre pour $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z}, \varepsilon)$. Le développement en série de Taylor pour $\phi(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z}, \varepsilon), \boldsymbol{z}, \varepsilon)$ jusqu'à l'ordre correspondant en ε conduit aux mêmes coefficients que ceux fournit par la *Théorie Géométrique des Perturbations Singulières.*

L'ordre ε^0 par exemple conduit à :

$$\phi(\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{z}, \varepsilon), \boldsymbol{z}, 0) = 0$$

lequel définit également $\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{z})$ par application du *théorème des fonctions implictes.* Ainsi, la variété définie par la *méthode de la courbure du flot* coïncide avec celle fournie par *Théorie Géométrique des Perturbations Singulières*, c'est-à-dire avec la variété lente de Fénichel [7].

Corollaire 1.

La variété lente définie par la variété de courbure nulle est localement invariante au sens de Darboux..

Démonstration. La dérivée de Lie du *produit intérieur* (2) s'écrit :

$$L_{\overrightarrow{V}}\phi\left(\boldsymbol{X}\right)=\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\left(\ddot{\boldsymbol{X}}\wedge\dddot{\boldsymbol{X}}\wedge\ldots\wedge\overset{(n+1)}{\boldsymbol{X}}\right)=\left[\dot{\boldsymbol{X}},\ddot{\boldsymbol{X}},\dddot{\boldsymbol{X}},\ldots,\overset{(n+1)}{\boldsymbol{X}}\right] \tag{6}$$

De plus, à partir de l'identité $\ddot{\boldsymbol{X}}=J\dot{\boldsymbol{X}}$ où J représente le Jacobien fonctionnel associé au système dynamique (1) de dimension n on peut établir que :

$$\overset{(n+1)}{\boldsymbol{X}}=J^{n}\dot{\boldsymbol{X}}\qquad\text{si}\qquad\frac{dJ}{dt}=0 \tag{7}$$

où J^n represente la $n^{\text{ième}}$ puissance de J.

Par exemple, $\ddot{\boldsymbol{X}}=J\dot{\boldsymbol{X}}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{\gamma}=J\boldsymbol{V}$. Alors, il s'ensuit que,

$$\overset{(n+1)}{\boldsymbol{X}}=JJ^{n-1}\dot{\boldsymbol{X}}=J\overset{(n)}{\boldsymbol{X}} \tag{8}$$

En remplaçant $\overset{(n+1)}{\boldsymbol{X}}$ dans l'expression (6) par l'Eq. (8) on a :

$$L_{\overrightarrow{V}}\phi\left(\boldsymbol{X}\right)=\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\left(\ddot{\boldsymbol{X}}\wedge\dddot{\boldsymbol{X}}\wedge\ldots\wedge J\overset{(n)}{\boldsymbol{X}}\right)=\left[\dot{\boldsymbol{X}},\ddot{\boldsymbol{X}},\dddot{\boldsymbol{X}},\ldots,J\overset{(n)}{\boldsymbol{X}}\right] \tag{9}$$

puis,

$$L_{\overrightarrow{V}}\phi\left(\boldsymbol{X}\right)=Tr\left[J\right]\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\left(\ddot{\boldsymbol{X}}\wedge\dddot{\boldsymbol{X}}\wedge\ldots\wedge\overset{(n)}{\boldsymbol{X}}\right)=Tr\left[J\right]\phi\left(\boldsymbol{X}\right)=K\left(\boldsymbol{X}\right)\phi\left(\boldsymbol{X}\right)$$

où $K\left(\boldsymbol{X}\right)=Tr\left[J\right]$ represente la trace du Jacobien fonctionnel. Ainsi, d'après le *théorème de Darboux* l'invariance de la *variété lente* associé au système dynamique (1) de dimension n est établie à condition que le Jacobien fonctionnel soit localement stationnaire (7).

5 Variétés linéaires invariantes

Proposition 2.

Toute variété linéaire invariante est en facteur dans la courbure.

Démonstration. Soit $\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ un hyperplan de dimension n. Supposons que $\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)$ soit invariant. Alors on a d'après (4) :

$$L_{\overrightarrow{V}}\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=k_1\left(\boldsymbol{X}\right)\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=a_1\dot{x}_1+a_2\dot{x}_2+\ldots+a_n\dot{x}_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\dot{x}_i \tag{10}$$

En dérivant (10) et en posant : $\left(k^2+\dot{k}\right)\left(\boldsymbol{X}\right)=k_2\left(\boldsymbol{X}\right)$, on a :

$$L_{\overrightarrow{V}}\left(L_{\overrightarrow{V}}\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)\right)=\left(k^2+\dot{k}\right)\left(\boldsymbol{X}\right)\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=k_2\left(\boldsymbol{X}\right)\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\ddot{x}_i$$

En appliquant la formule de Leibniz on obtient la dérivée $n^{\text{ième}}$:

$$L_{\overrightarrow{V}}^{n}\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=\sum_{p=0}^{n-1}C_{n}^{p}\frac{d^{(n-p-1)}}{dt^{(n-p-1)}}k\left(\boldsymbol{X}\right)\frac{d^{p}}{dt^{p}}\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=k_{n}\left(\boldsymbol{X}\right)\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i}\overset{(n)}{x_{i}} \qquad (11)$$

La démonstration est alors basée sur les propriétés des déterminants suivantes :

- Toute combinaison linéaire de lignes (resp. de colonnes) laisse le déterminant inchangé (P_1).
- Tout facteur dans une ligne (resp. une colonne) est en facteur du déterminant (P_2).

En remplaçant la dernière colonne de la variété de courbure nulle (2) par une combinaison linéaire de toutes les autres, et en tenant compte des Eq. (10) & (11) et des propriétés (P_1) et (P_2) on a :

$$\phi\left(\boldsymbol{X}\right)=det\begin{pmatrix}\dot{x}_{1} & \dot{x}_{2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}a_{i}\dot{x}_{i}\\ \ddot{x}_{1} & \ddot{x}_{2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}a_{i}\ddot{x}_{i}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \overset{(n)}{x_{1}} & \overset{(n)}{x_{2}} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}a_{i}\overset{(n)}{x_{i}}\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}\dot{x}_{1} & \dot{x}_{2} & \cdots & k_{1}\left(\boldsymbol{X}\right)\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)\\ \ddot{x}_{1} & \ddot{x}_{2} & \cdots & k_{2}\left(\boldsymbol{X}\right)\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \overset{(n)}{x_{1}} & \overset{(n)}{x_{2}} & \cdots & k_{n}\left(\boldsymbol{X}\right)\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)\end{pmatrix}=\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)det\begin{pmatrix}\dot{x}_{1} & \dot{x}_{2} & \cdots & k_{1}\left(\boldsymbol{X}\right)\\ \ddot{x}_{1} & \ddot{x}_{2} & \cdots & k_{2}\left(\boldsymbol{X}\right)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \overset{(n)}{x_{1}} & \overset{(n)}{x_{2}} & \cdots & k_{n}\left(\boldsymbol{X}\right)\end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit que la variété linéaire invariante $\varphi\left(\boldsymbol{X}\right)$ est bien en facteur dans la courbure.

Remarque.

Ce résultat peut être étendu à n variétés linéaires invariantes en facteur dans la *courbure*. Néanmoins, sa réciproque est fausse. En effet, toute variété en facteur dans la *courbure* n'est pas nécessairement invariante. Dans une publication antérieure Jaume Llibre [10] a établi un résultat similaire à l'aide d'une méthode basée sur l'utilisation des *variétés algébriques extactiques* découvertes par Mikhail Nikolaevich Lagutinskii au début du $XX^{\text{ième}}$ siècle (Dobrovol'skii *et al.*, [6]) et re-découverte par V. I. Arnold [**?**], Jaume Llibre, Colin Christopher et Jorge Vitorio Pereira [2]. Ainsi, il est possible de démontrer que les *variétés linéaires invariantes* sont des *variétés algébriques extactiques.*

6 Conclusion

Dans un premier temps il a tout d'abord été établi que la *variété de courbure du flot* fournit directement l'équation analytique de la *variété lente* de tout système dynamique lent-rapide de dimension n. De plus, il a été démontré que la *variété lente* obtenue par la *méthode de la courbure du flot* est invariante au sens de Darboux et coïncide avec celle de Fénichel [7]. Ce résultat précédemment établi en dimension deux et trois [8] est ainsi généralisé à la dimension n. Il semble d'ailleurs possible de l'étendre au cas des systèmes dynamiques non-autonomes ou périodiques. Dans un second temps la *méthode de la courbure du flot* a permis de déterminer les *variétés linéaires invariantes* de systèmes dynamiques de dimension n. Il a donc été démontré que toute *variété linéaire invariante* (droite, plan ou hyperplan) est en facteur dans la *variété de courbure du flot.* De telles variétés peuvent alors être utilisées pour construire l'intégrale première du système dynamique considéré. Dans le cas de systèmes dynamiques n-dimensionnels composés de polynômes de degré m, il a été établi [10] que le nombre de *variétés linéaires invariantes* est au plus $3m-1$. Par conséquent le nombre de *variétés linéaires invariantes* en facteur dans la *courbure* est au plus $3m-1$.

Dans le cas de systèmes dynamiques tri-dimensionnels composés de polynômes homogènes de degré deux, Gaston Darboux [5] a établi que si ce système dynamique possède :

- une *variété linéaire invariante* p une intégrale première s'écrit : $\nu = Cp^3$
- deux *variétés linéaires invariantes* p et q une intégrale première s'écrit : $u^{\alpha}p^{\beta}q^{\gamma}=C$
- trois *variétés linéaires invariantes* p, $q$etr une intégrale première s'écrit : $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}=C$ où p, q, r et s sont des polynômes du premier degré, u un polynôme du second degré et ν un polynôme du troisième degré.

Ainsi, la connaissance du nombre de *variétés linéaires invariantes* permet de déduire l'intégrale première de systèmes dynamiques tri-dimensionnels composés de polynômes homogènes de degré deux. Il semble cependant possible d'étendre certains résultats de Gaston Darboux à des systèmes dynamiques polynomiaux non-homogènes de degré m.

La *méthode de la courbure du flot* peut également être utilisée pour étudier les bifurcations locales de co-dimension 1, les bifurcations de Hopf, la synchronisation de systèmes dynamiques, ou pour déterminer l'équation de la variété centrale.

7 Applications

Le circuit électronique de L. O. Chua [3] comprend une inductance L_1, un résistor actif R, deux condensateurs C_1 et C_2, et une résistance non-linéaire. Ce circuit peut être modélisé au moyen d'un système de trois équations différentielles couplées du premier ordre. Les variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ représentent les tensions des condensateurs C_1 et C_2, et l'intensité du électrique dans l'inductance L_1, respectivement. Ces équations dédimensionnées s'écrivent :

$$\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\Im}\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_3,x_3) \\ f_2(x_1,x_3,x_3) \\ f_3(x_1,x_3,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2 - F(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

La fonction $F(x_1) = x_1 + k(x_1)$ décrit la réponse éléctrique de la résistance non-linéaire, c'est-à-dire sa caracteristique qui est définie soit par une fonction linéaire par morceaux :

$$k(x_1) = \begin{cases} bx_1 + a - b & x_1 \geqslant 1 \\ ax_1 & |x_1| \leqslant 1 \\ bx_1 - a + b & x_1 \leqslant -1 \end{cases} \tag{13}$$

pour laquelle les paramètres réels α and β déterminé pour les valeurs particulières des composants du circuit sont pour le modèle standard $\alpha = 1/9$, $\beta = 100/7$, $a = -8/7$ et $b = -5/7$, soit par une fonction impaire symétrique similaire à la précédente :

$$k(x_1) = a_1 x_1 + a_3 x_1^3 \tag{14}$$

pour laquelle les cœfficients $a_1 = -0.25$ et $a_3 = 0.11$ ont été déterminés par une méthode de moindre carrés. Les fonctions f_i sont indéfiniment differentiable par rapport aux variables x_i et t, c'est-à-dire sont des fonctions C^∞ dans un compact E inclus dans $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas du modèle (pwl) la Proposition 2 de la *méthode de la courbure du flot* permet de retrouver directement les hyperplans invariants, c'est-à-dire les *variétés linéaires invariantes* de ce modèle qui sont en facteur dans la *variété de courbure du flot*. Les équations de ces *hyperplans* $(\Pi_{1,2})$ passant par chaque point fixe $I_{1,2}(\mp 3/2, 0, \pm 3/2)$ s'écrivent :

$$\Pi_{1,2}(\boldsymbol{X}) = 2.8759x_1 - 3.9421x_2 + x_3 \pm 2.8139 = 0$$

Dans le cas du modèle (cubic) la Proposition 1 de la *méthode de la courbure du flot* fournit directement l'équation analytique de la *variété lente* de ce modèle à partir de la *variété de courbure du flot*.

Remerciements

Les auteurs souhaitent exprimer leurs plus sincères remerciements pour leur aide et leur soutien à MM. Marc Lefranc et Christophe Letellier.

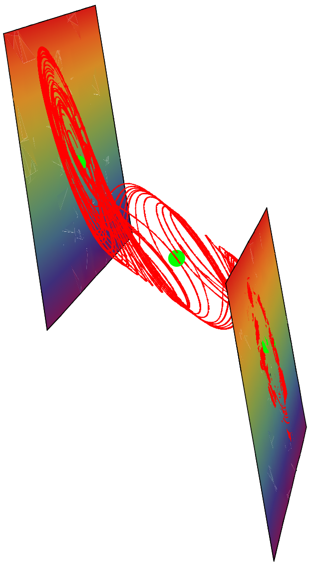

Fig.1. *Hyperplans invariants* du modèle (pwl) avec pour paramètres $\alpha = 1/9$, $\beta = 100/7$, $a = -8/7$ et $b = -5/7$.

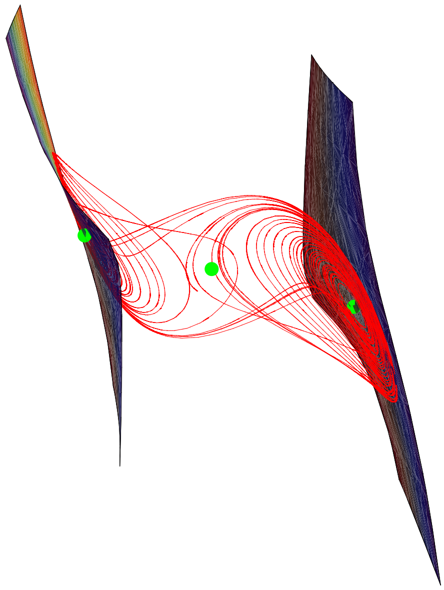

Fig.2. *Variété lente* du modèle (cubic) avec pour paramètres $\alpha = 1/9$, $\beta = 100/7$, $a_1 = -0.25$, et $a_3 = 0.11$..

Références

1. V. I. Arnold, *The Gelfand Mathematical Seminars*, (1993-95).
2. *C. Christopher, J. Llibre & J. V. Pereira*, *Pacific Journal of Mathematics*, **229** (1), 63-117 (2007).
3. L. O. Chua, M. Komuro & T. Matsumoto, *IEEE Transactions on Circuits & Systems*, CAS-33 (10), 1072-1118 (1986)
4. E. A. Coddington & N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mac Graw Hill, New York (1955).
5. G. Darboux, *Bulletin Sci. Math.* Série 2, **2**, 60-96, 123-143, 151-200 (1878).
6. V. A. Dobrovol'skii, N. V. Lokot' & J. M. Strelcyn, *Historia Mathematica*, **25** (20), 245-264 (1998).
7. N. Fenichel, *Ind. Univ. Math. Journal*, **21**, 193-225 (1971).
8. J.-M. Ginoux & B. Rossetto, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, **4** (16), 887-910 (2006).
9. J.-M. Ginoux, B. Rossetto & L. O. Chua, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, à paraître.
10. J. Llibre & J. C. Medrado, On the invariant hyperplanes for d-dimensional polynomial vector fields, *Preprint*.