

# Fiabilité des différentes déterminations des paramètres de plongement

R. Gilmore<sup>1,3</sup>, I. M. Moroz<sup>2</sup>, & C. Letellier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

<sup>2</sup> Mathematical Institute, 24-29 St Giles', Oxford OX1 3LB, UK

<sup>3</sup> Physics Department, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA

Christophe.Letellier@coria.fr

**Résumé.** Il est possible de comparer les résultats des tests classiques — de nature géométrique — pour le plongement de données chaotiques avec des résultats d'un test — de nature topologique — récemment proposé. Les tests « classiques », qui dépendent de nombres réels (dimensions fractales, exposants de Lyapunov), moyennés sur un attracteur, sont comparés avec un test topologique qui dépend de nombres entiers. La comparaison peut seulement être réalisée pour des applications en trois dimensions (limite actuelle des outils topologiques). Nous trouvons que les tests classiques échouent à déterminer lorsqu'une reconstruction est un plongement ou non. Les raisons de cet échec, qui ne sont limitées à la dimension trois, sont discutées.

**Abstract.** It is possible to compare results for the classical tests for embeddings of chaotic data with the results of a newly proposed test. The classical tests, which depend on real numbers (fractal dimensions, Lyapunov exponents) averaged over an attractor, are compared with a topological test that depends on integers. The comparison can only be done for mappings into three dimensions. We find that the classical tests fail to predict when a mapping is an embedding and when it is not. We point out the reasons for this failure, which are not restricted to three dimensions.

## 1 Introduction

Un nouveau test pour la détermination des paramètres de plongement dans  $\mathbb{R}^n$  a récemment été proposé [1]. Ce test dépend des valeurs de certains indices topologiques, qui sont des entiers plutôt que des nombres réels. Aujourd'hui, ce test n'est valide que pour  $n = 3$  puisqu'il repose sur la notion de nombre d'enlacement. Ce nouveau test topologique pour la vérification de la validité d'un plongement a été comparé avec des techniques plus traditionnelles, essentiellement basées sur des mesures géométriques (dimensions fractales, faux plus proches voisins) et des mesures dynamiques (exposants de Lyapunov, déterminisme) [1,2]. Il est montré que les tests classiques pour la qualité d'un plongement échouent à déterminer si une application est un plongement ou non. Il est expliqué pourquoi les tests classiques échouent. Les raisons de cet échec ne sont pas limitées aux trois dimensions. Aussi, à la lumière de nos résultats, et comme l'annonçait Ruelle [3] il y a une quinzaine d'années dans un article intitulé *la science et la fiction*, toute annonce, basée sur des calculs de dimension ou d'exposant de Lyapunov, qu'une reconstruction dans un espace de dimension donnée soit un plongement doit être regardée avec le plus grand scepticisme tant que des analyses plus approfondies ne sont pas entreprises. La mise en garde par Ruelle n'a pas été suffisamment entendue et nous apportons avec ce nouveau test topologique la confirmation claire de l'incapacité des estimations « classiques » à nous apprendre quoi que ce soit de fiable sur la dynamique.

## 2 Revue des tests de plongement

La première étape dans l'analyse de données chaotiques consiste en la recherche d'un plongement [4,5]. Un plongement se définit comme une application des données ( $\mathbb{R}$ ) dans un espace reconstruit  $\mathbb{R}^D$  sans auto-intersection, ainsi chaque point de l'attracteur original a un unique futur de manière à préserver le

déterminisme [10]. Un plongement assure l'existence d'un difféomorphisme entre l'attracteur original et l'attracteur reconstruit. Si les données sont chaotiques, nous avons nécessairement  $D \geq 3$  [11].

La reconstruction d'un espace  $\mathbb{R}^D$  à partir d'une série temporelle prend la forme

$$s(t) \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_D(t)),$$

où  $x_i(t)$  sont fonctions des observables  $s(t)$ . Plusieurs techniques ont été proposées. Celle qui est la plus simple à mettre en œuvre consiste à utiliser des coordonnées décalées telles que  $x_i(t) = m(t - (i - 1)\tau)$ , où  $\tau$  est le décalage temporel [4,5]. Une autre reconstruction également très utile a recours aux coordonnées dérivées telles que  $x_i(t) = d^{(i-1)}m(t)/dt^{(i-1)}$ . Enfin, il est toujours possible de combiner ces différentes coordonnées comme par exemple,  $s(t) \rightarrow (s(t), ds(t)/dt, s(t - \tau))$ , la décomposition en composantes principales, les transformées de Hilbert, etc. [6,7,8,9]. Lorsque la dimension de l'espace reconstruit  $\mathbb{R}^K$  est telle que  $K > D$ , l'application entre l'espace original  $\mathbb{R}^D$  et l'espace reconstruit est souvent une *projection*.

Une fois que la trajectoire a été reconstruite dans un espace de dimension  $D$ , il est nécessaire de déterminer si l'application est un *plongement*, c'est-à-dire si l'application évite les auto-intersections de la trajectoire : le théorème d'unicité — ou en le principe du déterminisme — est alors préservé. Plusieurs tests ont été développés pour vérifier cette condition. Ils partagent une propriété : ils sont implémentés comme une fonction d'un ou plusieurs paramètres qui sont variés comme la dimension, le décalage temporel, et une estimation statistique d'une quantité sur l'ensemble des données est réalisée. Une application est déclarée être un plongement lorsque la quantité dépasse un certain seuil. Les tests antérieurement proposés sont de deux types : géométriques ou dynamiques, chaque type ayant ses variantes.

Une fois qu'un plongement approprié a été déterminé, la structure de la trajectoire plongée dans l'espace reconstruit est analysée. Les procédures d'analyse sont de trois types : géométrique [12], dynamique [13], et topologique [15]. Les analyses géométriques dynamiques se focalisent respectivement sur le calcul de spectres de dimensions fractales et d'exposants de Lyapunov. Ces calculs sont effectués pour toutes valeurs de la dimension  $D$ . Ces résultats sont des nombres réels sans aucune théorie statistique fournissant une estimation fiable des erreurs [14], et aucune information sur les mécanismes producteurs de comportements chaotiques n'est donnée. Les analyses topologiques sont actuellement uniquement réalisées lorsque  $D = 3$ . Les résultats sont sur-déterminés et contiennent par conséquent leur propre critère de rejet [15,8], une propriété que ne possèdent pas les deux autres types d'analyse.

### 3 Un nouveau test topologique

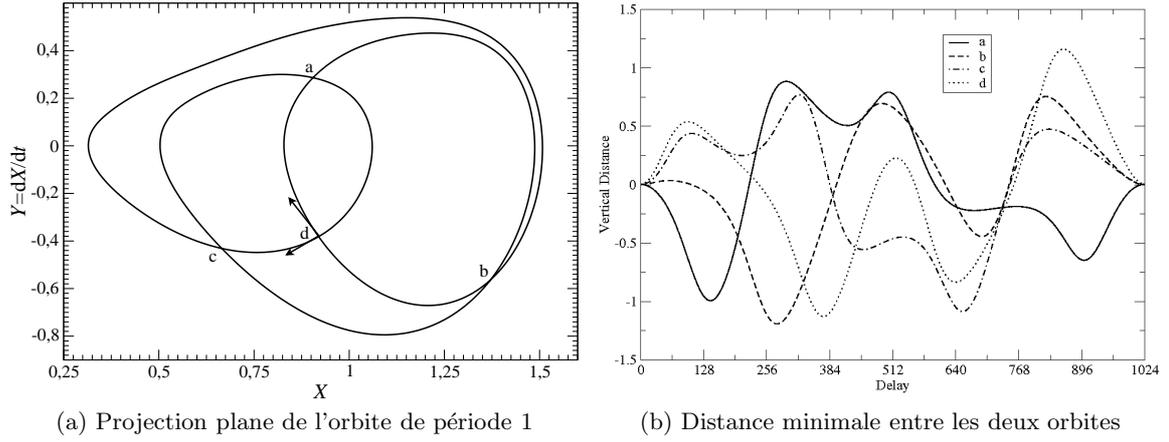
L'idée de base et l'algorithme pour ce nouveau test est simple. Commençons par estimer la dimension de Lyapunov,  $d_L$ , à partir de l'observable  $s(t)$  [16]. Si  $d_L > 3$ , nous nous arrêtons ! Sinon, nous suivons les trois étapes suivantes :

1. Recherche des orbites périodiques instables à partir des données  $\{s(t)\}$ , ce qui peut être réalisé à partir des diagrammes de proches retours avant que tout *plongement* soit tenté [8,9,17] ;
2. Choix d'une famille d'applications dépendant de certains paramètres et projettons ces orbites dans  $\mathbb{R}^3$  ;
3. Calcul de la distance minimum entre chaque paire d'orbites sur l'intervalle des paramètres.

L'application ne peut être un plongement lorsque la distance minimale s'annule. Si une distance nulle est trouvée (Fig. 1), il est alors nécessaire de calculer le nombre d'enlacement [8,9] entre les deux orbites de part et d'autre du croisement apparent. Un croisement réel se traduit par une modification du nombre d'enlacement de  $\pm 1$ . Pour les valeurs des paramètres où le nombre d'enlacement change fréquemment, c'est-à-dire où plusieurs minima nuls apparaissent, nous pouvons rejeter l'hypothèse que l'application est un plongement. Lorsqu'il n'y a pas de minima nuls, les nombres d'enlacements restent inchangés et les applications peuvent être un plongement.

Nous pouvons présenter cet algorithme avec deux exemples. Le premier implique des données expérimentales issues d'un modèle dans  $\mathbb{R}^3$  pour une expérience en mécanique des fluides. Le second implique la projection de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  d'un attracteur de basse dimension ( $d_L \simeq 2.2$ ).

Les données issue du modèle « fluide » correspondent à une configuration de type Bénard-Marangoni [18] ont été analysées [19] et modélisées par une oscillateur de Takens-Bogdanov [20]. L'analyse d'une série temporelle produite par ce modèle implique une application mixte (différentielle-décalée) de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui est explicitement  $x(t) \in \mathbb{R}^1 \rightarrow \left[ x(t), \frac{dx(t)}{dt}, x(t - \tau) \right] \in \mathbb{R}^3$  [20]. Le paramètre de l'application est le décalage  $\tau$ . Pour certaines valeurs du décalage, l'application est un plongement tandis que pour d'autres, ce n'est pas le cas [21]. Ceci est simplement remarqué en localisant l'orbite de période 1 et la représentant dans le plan  $x-\dot{x}$ . Cette projection est indépendante de  $\tau$  (Fig. 1).



**Fig.1.** La projection de l'orbite de période 1 dans le plan  $x-\dot{x}$  est indépendante du décalage  $\tau$  dans l'espace mixte. Lorsque la distance entre les deux orbites est nulle, il y a une auto-intersection et l'application échoue à être un plongement dans une région autour du point d'intersection.

L'orbite de période 1 ressemble à une orbite de période 3 car elle coupe le plan  $Y = \dot{X} = 0$  trois fois dans chaque direction avant de boucler sur elle-même. En fait, l'attracteur croise ce plan avec une accélération positive  $\dot{Y} > 0$  dans trois régions disjointes et de manière cyclique :  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . Ainsi, une section de Poincaré appropriée consiste seulement un simple disque [21]. La période de l'orbite est le nombre d'intersections de cette orbite avec le disque unique.

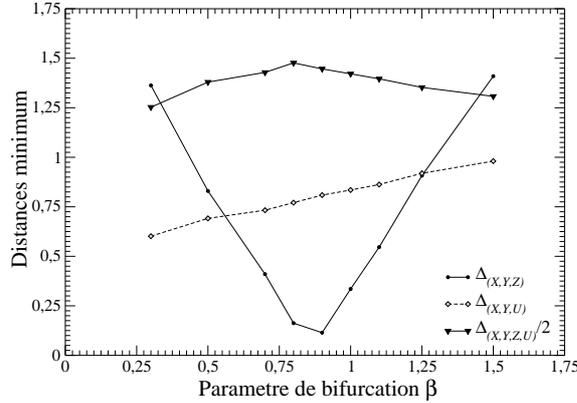
L'orbite de période 1 est « à l'intérieur » de l'attracteur, c'est-à-dire qu'elle est entourée par un tube qui contient l'attracteur. Si l'orbite de période présente une auto-intersection pour  $\tau = \tau_1$ , le tube et l'attracteur qu'il contient, présente une auto-intersection pour un intervalle des valeurs de  $\tau$  contenant  $\tau_1$ . L'application n'est alors pas un plongement sur cet intervalle. La distance entre les segments des deux orbites à chacun des quatre points d'intersection  $a-d$  de la projection  $x-\dot{x}$  est calculée en fonction de  $\tau = T_1 \times (j/1024)$ , où  $T_1$  est la période de l'orbite. Lorsque la distance est nulle, l'orbite de période 1 présente une auto-intersection et l'application ne peut être un plongement. Des invariants topologiques ont été calculés pour les orbites périodiques de l'attracteur et leurs modifications d'un plongement à un autre. Dans chaque cas, la modification du nombre de torsion global [8,9] est  $\Delta GT = \pm 2$ . Ceci est consistant avec une modification du plongement causé par l'auto-intersection de l'attracteur (cf. [21], Fig. 9).

Un second exemple d'utilisation du test topologique pour l'obtention d'un plongement est réalisé sur les projections de l'attracteur chaotique solution du système dynamique de dimension 4 [22] :

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \sigma(-X + Y) - 7.1111\beta U \\
 \dot{Y} &= (R/\nu)X - Y - XZ \\
 \dot{Z} &= -\nu Z + XY \\
 \dot{U} &= -\lambda U + X
 \end{aligned} \tag{1}$$

La dynamique est étudiée pour  $(R, \sigma, \nu, A) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$ . Sur l'intervalle  $0 \leq \beta < 7,9$ , le système (1) a pour solution un attracteur chaotique avec une dimension de Lyapunov  $d_L \simeq 2.2$  [22]. Une crise de frontière détruit l'attracteur pour  $\beta \simeq 7,9$ .

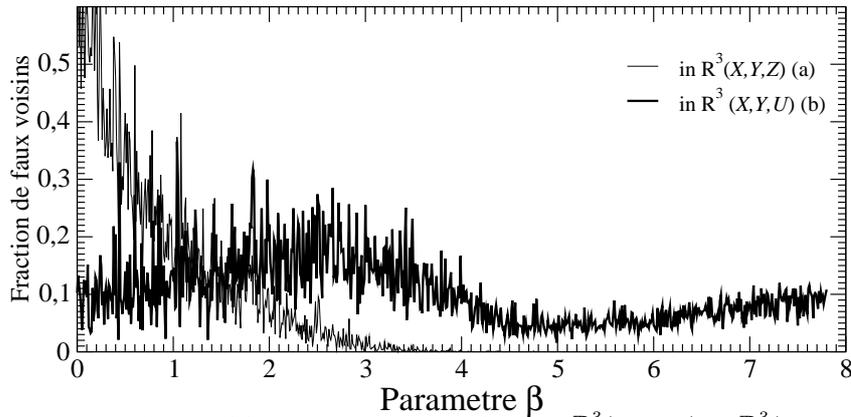
Les orbites périodiques sont extraites de la série temporelle par la méthode des proches retours. Un ensemble de ces orbites est suivie adiabatiquement alors que le paramètre  $\beta$  est varié sur l'intervalle  $0 \leq \beta < 7,9$ . La distance minimum et les nombres d'enlacement entre toutes paires d'orbites ont été déterminés en fonction de  $\beta$  pour deux projections de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  données par respectivement  $(X, Y, Z, U) \rightarrow (X, Y, Z)$  et  $(X, Y, Z, U) \rightarrow (X, Y, U)$ . L'évolution de la distance minimum entre une paire donnée d'orbites sur l'intervalle  $0.25 \leq \beta \leq 1.5$  est calculée. Dans l'espace des phases original  $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U)$ , cette distance ne s'annule jamais. Il en est de même lorsque les orbites sont projetées dans l'espace  $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$ . Par contre, dans l'espace  $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ , la distance s'annule à plusieurs reprises sur l'intervalle  $0.6 \leq \beta \leq 5.4$  (Fig. 2). Ceci conduit à rejeter l'hypothèse que la projection  $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, Z)$  est un plongement sur cet intervalle. Nous ne pouvons rejeter cette hypothèse que la projection  $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, U)$  est en plongement l'ensemble de l'intervalle  $0 \leq \beta < 7,9$ . Cette hypothèse ne peut pas non plus être rejetée pour la projection  $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, Z)$  hors de l'intervalle  $0.6 \leq \beta \leq 5.4$ .



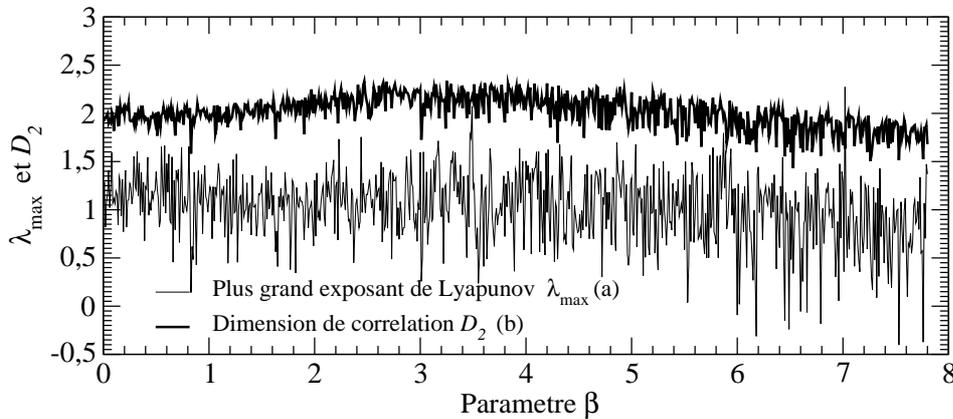
**Fig.2.** Distance minimum entre deux orbites de l'attracteur chaotique dans  $\mathbb{R}^4$  en fonction de  $\beta$  et sous deux projections dans des espaces tri-dimensionnels. Sous l'application  $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ , ces orbites présente une intersection : cette application ne peut être un plongement pour toutes valeurs de  $\beta$ . Valeurs des paramètres :  $(R, \sigma, \nu, A) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$ .

Par ailleurs, les tests classiques ne présentent aucune sensibilité à cette absence de plongement dans  $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$  sur l'intervalle  $0.6 \leq \beta \leq 5.4$ . Par exemple, une estimation de la dimension de plongement par technique des plus proches faux-voisins est réalisée respectivement dans les espaces  $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$  et  $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$  (Fig. 3). Dans les deux cas, aucune transition remarquable n'est remarquée aux valeurs « pathologique » de  $\beta = 0.6$  et  $\beta = 5.4$ . Pourtant, cette technique des plus proches faux-voisins est souvent utilisée pour estimer la dimension de plongement. Cette étude comparative simple révèle donc qu'il faut, au mieux, considérer la dimension de plongement ainsi estimée comme une indication mais, en aucun cas, comme une identification de la dimension recherchée.

Des résultats semblables ont été obtenus à partir d'une estimation des exposants de Lyapunov et de la dimension de corrélation. Le plus grand exposant de Lyapunov a été estimé par la méthode de Sato *et al* [23] implémentée selon la procédure de Rosenstein *et al.* [24]. Le plus grand exposant de Lyapunov pour la projection  $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$  est montré Fig. 4. Selon un commentaire donné en conclusion par Rosenstein *et al.* [24], l'algorithme pour calculer les plus grands exposants de Lyapunov a été adapté pour une estimation simultanée de la dimension de corrélation  $D_2$  qui est également représentée Fig. 4. Les calculs réalisés pour la projection  $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$  sont ceux de la Fig. 4.



**Fig.3.** Test des plus proches faux voisins pour les deux projections  $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$  et  $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$ . Le paramètre  $\epsilon$  définissant les plus proches voisins est fixé à 0,01 fois le diamètre de l'attracteur. Valeurs des paramètres :  $(R, \sigma, \nu, \Lambda) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$ .



**Fig.4.** Estimation du plus grand exposant de Lyapunov (a) et de la dimension de corrélation (b) pour la projection  $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$  en fonction de  $\beta$ . Valeurs des paramètres :  $(R, \sigma, \nu, \Lambda) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$ .

Les variances de ces courbes est intrinsèque et non causée par un changement de la valeur de  $\beta$ . Ces estimations diffèrent d'un ensemble de données à un autre pour des valeurs identiques de  $\beta$ . Si nous pouvons rejeter l'hypothèse que ces données sont distribuées normalement pour le plus grand exposant de Lyapunov, ceci n'est pas le cas pour l'estimation de la dimension de corrélation ( $\chi^2/\text{d.o.f.} \simeq 0.75$ ). L'utilisation de la dimension de corrélation comme test de plongement nécessite d'introduire un seuil sur la variance qui devrait chuter au-dessous de 2.0. Sur la base d'une telle hypothèse *ad hoc*, des conclusions incorrectes devaient encore être tirées pour les deux projections.

## 4 Conclusion

Nous avons proposé un test topologique pour tester si une application réalise un plongement ou non. Ce test ne fonctionne malheureusement que pour des projections tri-dimensionnelles, comme la plupart des méthodes topologiques. Deux exemples montre que ce nouveau test se révèle très discriminant alors que les méthodes géométriques classiques — estimation du plus grand exposant de Lyapunov et de la dimension de corrélation — échoue dramatiquement à répondre à de telles questions.

## Remerciements

Robert Gilmore remercie le CNRS — Département ST2I — pour sa position de chercheur invité au CORIA pour l'année 2006-2007.

## Références

1. C. LETELLIER, I. M. MOROZ, & R. GILMORE, A new topological test for embeddings, (soumis).
2. C. LETELLIER, I. M. MOROZ, & R. GILMORE, A comparison of tests for embeddings, (soumis).
3. D. RUELLE, Deterministic chaos : the science and the fiction, *Proceedings of the Royal Society of London*, **427**, 241-248 (1990).
4. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381, 1981.
5. N. H. PACKARD, J. P. CRUTCHFIELD, J. D. FARMER & R. S. SHAW, Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, **45** (9), 712-716, 1980.
6. H. D. I. ABARBANEL, R. BROWN, J. J. SIDOROWICH & L. TSIMRING, *Reviews in Modern Physics*, **65**, 1331 (1993).
7. H. KANTZ & T. SCHREIBER, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge : Cambridge University Press, (1997).
8. R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Reviews in Modern Physics*, **70**, 1455 (1998).
9. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The Topology of Chaos*, NY : John Wiley & Sons, (2002).
10. J. P. ECKMANN & D. RUELLE, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Reviews of Modern Physics*, **57**, 617-656, 1985.
11. E. OTT, *Reviews of Modern Physics*, **53**, 655-, 1981.
12. P. GRASSBERGER & I. PROCACCIA, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physics Letters D*, **148**, 63 (1983).
13. A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY & J. A. VASTANO, *Physica D*, **16**, 285 (1985).
14. P. GRASSBERGER & I. PROCACCIA, Characterization of strange attractors, *Physical Review Letters*, **50**, 346 (1983).
15. G. B. MINDLIN, H. G. SOLARI, M. A. NATIELLO, R. GILMORE & X. J. HOU. Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski reaction, *Journal of Nonlinear Sciences*, **1**, 147-173, 1991.
16. J. L. KAPLAN & J. A. YORKE, in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, (J. H. O. Peitgen & H. O. Walther, eds), *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, (1979).
17. D. AUERBACH, P. CVITANOVIC, J.-P. ECKMANN, G. GUNARATNE & I. PROCACCIA, *Physical Review Letters*, **58**, 2387 (1987).
18. T. ONDARCUHU, G. B. MINDLIN, H. L. MANCINI & C. GARCIA-PEREZ, *Physical Review Letters*, **70**, 3892 (1993).
19. G. B. MINDLIN & H. G. SOLARI, *Physical Review E*, **52**, 1497 (1995).
20. M. HUERTA, D. KRMPOTIC, G. B. MINDLIN, H. L. MANCINI, D. MAZZA & C. GARCIA-PEREZ, *Physica D*, **96**, 200 (1996).
21. T. D. TSANKOV, A. NISHTALA & R. GILMORE, Embeddings of a strange attractor into  $\mathbb{R}^3$ , *Physical Review E*, **69** 056215 (2004).
22. I. M. MOROZ, C. LETELLIER & R. GILMORE, When are projections also embeddings?, *Physical Review E*, **75**, 046201 (2007).
23. S. SATO, M. SANO & Y. SAWADA, Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems, *Progress in Theoretical Physics*, **77**, 117-134, (1987).
24. M. T. ROSENSTEIN, J. J. COLLINS & C. J. DE LUCA, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D*, **65**, 117-134, (1993).