

Instabilités d'un film liquide visqueux en écoulement sur une fibre verticale

C. Duprat, C. Ruyer-Quil, & F. Giorgiutti-Dauphiné

Laboratoire FAST, Orsay
duprat@fast.u-psud.fr

Résumé. Nous présentons une étude expérimentale et théorique concernant l'écoulement d'un film liquide sur une fibre verticale. Une transition entre une instabilité absolue et une instabilité convective a été mise en évidence. Dans le cas où le régime est convectif, nous étudions la réponse spatiale du système à des perturbations périodiques générées à l'entrée de la fibre. Les ondes obtenues sont caractérisées en fonction de leur fréquence. Un modèle théorique qui prend en compte les différents mécanismes physiques à savoir la tension de surface, la dissipation visqueuse et l'inertie, permet de retrouver les propriétés des ondes : forme, vitesse.

Abstract. A viscous film flowing down a vertical fibre is analysed both experimentally and theoretically. A transition between an absolute and a convective instability has been evidenced. In convective regimes, we study the system spatial response to a periodic perturbation generated at the inlet. The resulting waves are characterised depending on their frequency. A theoretical model taking surface tension, inertia and viscous dissipation in account compares well to the experimental results.

1 Introduction

L'enrobage des fibres optiques est un exemple d'application des écoulements de films liquides sur un cylindre vertical. Ce système met en jeu deux mécanismes d'instabilité, l'un capillaire dû à la courbure de la fibre (instabilité de Rayleigh-Plateau), l'autre hydrodynamique (instabilité initialement décrite par Kapitza [1]). Quéré [2] a notamment étudié l'influence de l'écoulement sur l'instabilité de Rayleigh-Plateau pour des épaisseurs faibles devant le rayon de la fibre ($h/R \ll 1$). Nous présentons une étude expérimentale complétant le travail de Quéré lorsque l'épaisseur du film est de l'ordre du rayon de la fibre ($h \sim R$) et quand les deux mécanismes d'instabilité interviennent, et ce pour une large gamme de rayons de fibre et de viscosité.

2 Montage expérimental et présentation des différents régimes

De l'huile silicone Rhodorsil s'écoule sur une fibre de nylon maintenue verticale à l'aide d'un poids (Fig.1 **A**). Trois huiles, de densité $\rho=965 \text{ kg.m}^{-3}$, de tension de surface $\gamma=21 \text{ mN.m}^{-1}$ et de viscosités différentes ($\nu=50,100$ et $500 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$) notées dans la suite V50, V100 et V500 ont été utilisées. Le débit est contrôlé à l'aide d'une vanne composée de deux cônes. Cette pièce assure l'axisymétrie et permet de réduire le bruit à l'entrée. La fibre est ainsi enduite d'un film uniforme avec des fluctuations d'épaisseur de l'ordre de $10^{-3}\%$. On observe différents régimes en fonction du rayon de la fibre ($0.175 \text{ mm} \leq R \leq 1.5 \text{ mm}$) et du débit ($0.5R < h < 3R$) représentés sur la figure 1 **B**. Pour des fibres de petits rayons (images (1) et (2)), on observe des gouttes légèrement déformées par la gravité et séparées par un film très mince. En augmentant le rayon et l'épaisseur ((3) et (4)), les structures sont allongées, possèdent un front raide et évoluent sur un film épais.

Trois nombres sans dimension caractérisent l'écoulement, le nombre de Reynolds et de Weber qui comparent inertie, viscosité et tension de surface, et le rapport de forme h_N/R

$$Re = \frac{u_N h_N}{\nu} = \frac{Q}{\nu}, \quad We = \frac{\gamma}{\rho g h_N^2}, \quad \alpha_N = \frac{h_N}{R}$$

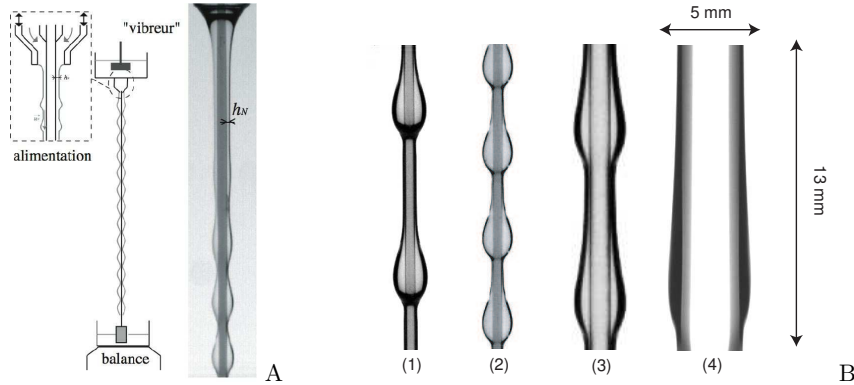


Fig.1. de gauche à droite : **A** : Montage expérimental et photo de l'écoulement à la sortie de la vanne ; **B** : photos de l'écoulement pour (1) : $R=0.2$ mm, $h_N=0.49$ mm, V100 (2) : $R=0.2$ mm, $h_N=0.45$ mm, V50 (3) : $R=0.475$ mm, $h_N=0.8$ mm, V50 (4) : $R=1.5$ mm, $h_N=1$ mm, V50.

à partir de la vitesse moyenne $u_N = Q/h_N$ et de l'épaisseur h_N de la solution d'épaisseur uniforme dite de Nusselt. Les régimes visqueux, à faibles épaisseurs, sont caractérisés par des nombres de Reynolds $Re \sim 10^{-3}$ ($\nu = 500 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $h_N \sim 0.1$ mm) et les régimes inertiels, à grandes épaisseurs, par $Re \sim 10$ ($\nu = 50 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $h_N \sim 1\text{mm}$). La tension de surface domine aux faibles épaisseurs ($We > 10$). A rayon et viscosité fixés, en augmentant h_N , ce qui revient à augmenter Re et diminuer We , on passe donc de régimes dans lesquels l'instabilité est principalement due aux effets capillaires à des régimes où les effets inertiels apparaissent (Fig.2). À faible épaisseur (régime **A**), les effets capillaires dominent et on observe alors un train d'onde régulier, avec une fréquence et une longueur d'onde bien définies, qui est stable sur toute la longueur de la fibre. De tels régimes sont qualifiés de *modes globaux*. Pour des épaisseurs plus élevées (régime **B**), le train d'onde apparaît toujours à même distance de l'alimentation (hauteur d'apparition) et reste très régulier. En revanche, il se déstabilise en aval. Aux fortes épaisseurs (régime **C**), le train d'onde est assez irrégulier et sa longueur d'apparition fluctue au cours du temps. Le système est alors très sensible au bruit extérieur. Pour des fibres de grands rayons ($R > 0.32\text{mm}$), la courbure est faible et les effets capillaires jouent peu : l'instabilité est principalement pilotée par les effets inertiels. Les régimes **A** et **B** ne sont jamais observés : le système se comporte toujours comme un amplificateur de bruit (régime **C**).

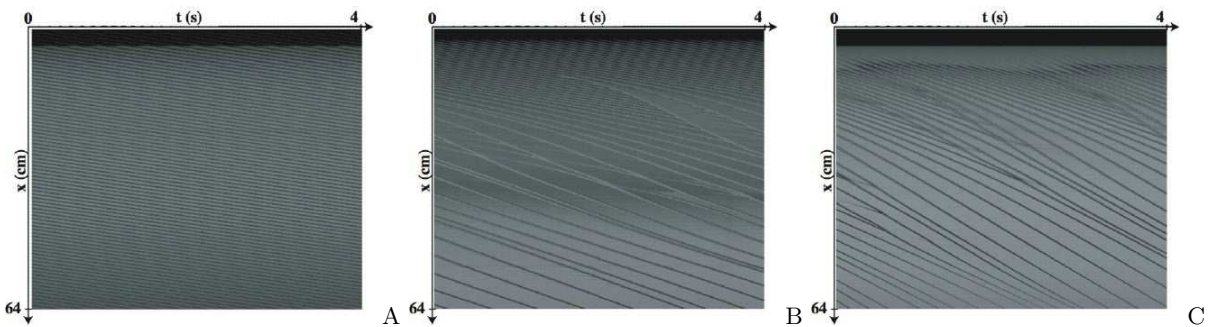


Fig.2. Diagrammes spatiotemporels obtenus avec une caméra linéaire pour $R=0.2$ mm, V100 et **A** : $h_N=0.51$ mm, **B** : $h_N=0.58$ mm, **C** : $h_N=0.74$ mm. Les lignes correspondent aux trajectoires des ondes.

3 Transition Absolu/Convectif

Nous avons retenu deux critères afin de caractériser les différents régimes : la fréquence du train d'onde primaire et la hauteur d'apparition des ondes (figure 3A). À faible débit, la hauteur d'apparition

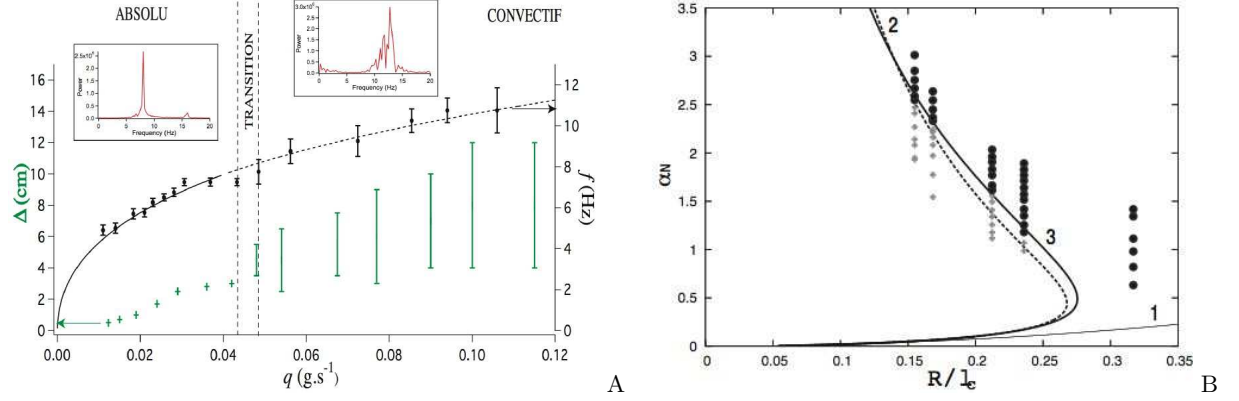


Fig.3. A : Fréquence et hauteur d'apparition des ondes primaires ($R = 0.32$ mm et $\nu = 50$ m²s⁻¹). Des exemples de spectres en fréquence sont placés en encart. Les barres représentent les fluctuations autour d'une valeur moyenne. B : Lieu de la transition entre instabilités convective et absolue en fonction du rapport de forme α_N et R/l_c ($\nu = 50$ m²s⁻¹) correspondants aux relations (3) (pointillés, 2), (3) (fin 1) et Navier-Stokes (plein 3).

est constante et la fréquence bien définie (régimes A et B). Le système se comporte comme un oscillateur auto-entretenu avec une fréquence propre bien définie, les perturbations croissent plus vite qu'elles ne sont advectées par l'écoulement et envahissent tout le domaine : on parle d'instabilité *absolue*. À partir d'un débit critique, la hauteur d'apparition fluctue avec le temps et le train d'onde est irrégulier (régime C). Le système se comporte comme un amplificateur de bruit, les perturbations sont advectées avant de croître : on parle d'instabilité *convective*. On peut comprendre la transition entre instabilités convective et absolue en comparant le temps de croissance de l'onde la plus amplifiée linéairement, τ_m , et le temps que met l'écoulement pour déplacer cette onde de sa propre longueur, τ . Lorsque $h_N \ll R$, $\tau \sim \tau_m$ conduit à la condition

$$\alpha_N = a \left(\frac{R}{l_c} \right)^2 \quad (1)$$

obtenue par Quéré [2] à partir de la relation de dispersion dérivée par Frenkel [3], où l_c est la longueur capillaire ($l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$) et a est une constante numérique déterminée expérimentalement ($a = 1.4 \pm 0.1$). Le calcul exact donne $a = 1.507$ [4]. Ainsi, si l'épaisseur est inférieure à l'épaisseur critique aR^3/l_c^2 , $\tau < \tau_m$, les ondes sont advectées plus vite qu'elles ne croissent et les gouttes disparaissent. En partant des équations d'évolution pour l'épaisseur formulées dans [5,6], il est possible d'étendre ce raisonnement au cas $h_N = O(R)$. Le nombre d'onde correspondant au maximum du taux de croissance est alors $k_m = 1/\sqrt{2}(R + h_N)$, soit une longueur d'onde $\lambda = 2\pi\sqrt{2}(R + h_N)$. Le rapport des temps τ_m/τ est alors égal à :

$$\frac{\tau_m}{\tau} = \frac{4(R + h_N)^5}{u_N h_N l_c^2 R} \frac{u_i}{\sqrt{2}(R + h_N)} \quad (2)$$

où u_i est la vitesse du fluide à l'interface. D'où la condition suivante pour $\tau \sim \tau_m$

$$\frac{\alpha_N}{(u_i/u_N)(1 + \alpha_N)^4} = b \left(\frac{R}{l_c} \right)^2 \quad (3)$$

où le rapport u_i/u_N n'est fonction que de α_N et b est une constante numérique ($b \simeq 1.23$). Notons que la relation (3) se réduit à (1) dans la limite $\alpha_N \ll 1$. On peut alors déterminer pour chaque rayon l'épaisseur

critique au delà de laquelle le temps d'advection est inférieur au temps de croissance de l'instabilité, c'est-à-dire les ondes sont advectées plus vite qu'elles ne croissent et l'instabilité est convective. En deçà, l'instabilité est absolue. Dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$, les courbes correspondant aux équations (1) et (3) se comparent favorablement à la transition entre modes globaux (croix) et régimes irréguliers (ronds) observée dans l'expérience et au résultat de l'étude de stabilité à partir des équations de Navier-Stokes axisymétriques (figure 3B) [4]. La limite $\alpha_N \rightarrow 0$ de films minces devant le rayon de la fibre correspond au cas d'un film tombant le long d'un plan vertical pour lequel l'instabilité est toujours convective. A l'autre extrême, pour des films épais, i.e α_N grand, l'effet déstabilisant de la courbure azimutale $1/R+h_N$, moteur de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, diminue. L'advection des ondes l'emporte alors sur l'instabilité et on est encore en régime convectif. Il existe donc une gamme de valeurs de α_N pour lesquelles le mécanisme d'instabilité de Rayleigh-Plateau domine sur l'advection de ondes, l'instabilité étant alors absolue. Pour des fibres de grands rayons ($R > 0.28l_c$), le mécanisme de Rayleigh-Plateau est affaibli et l'instabilité est toujours convective.

4 Ondes non linéaires : réponse à un forçage

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'étude des ondes non linéaires (figure 1 B). On se place alors dans les régimes convectifs (amplificateur de bruit) qui répondent à un forçage. On étudie la réponse du système à un bruit blanc (bruit ambiant) ou à une perturbation périodique obtenue en variant la hauteur de liquide du réservoir supérieur à l'aide d'un vibreur. Nous avons mesuré le taux de croissance spatial, la fréquence la plus amplifiée spatialement f_M (fréquence sélectionnée par le système en présence d'un bruit blanc) et f_c la fréquence de coupure à partir de laquelle le forçage n'affecte plus la dynamique (Fig.4C et D). On force alors avec une fréquence $0 < f_{for} < f_c$. Différentes réponses sont observées. Sur la figure 4, on représente la réponse du système à l'aide d'un diagramme spatiotemporel, de l'évolution temporelle de l'épaisseur à différentes distances (à 8 cm (a), 18 cm (b) et 30 cm (c) de l'alimentation) et des spectres en fréquence correspondants. Lorsque l'on force à une fréquence proche de f_M (Fig.4A), le système répond directement à la fréquence imposée. Le signal en haut de la fibre est quasiment sinusoïdal. Lorsque les ondes se propagent le long de la fibre, leur amplitude augmente, leur front se raidit et leur contenu en fréquence s'élargit. Lorsque l'on force à $f_{for} \sim f_M/2$ (Fig.4B), le système répond à $2f_{for}$ avec un signal quasi sinusoïdal. Les ondes se raidissent et on observe, à une distance fixe de l'alimentation, un appariement conduisant à un train d'onde périodique à la fréquence imposée f_{for} . Notons que la réponse est uniquement spatiale (les signaux sont périodiques en temps). Le système répond en sélectionnant toujours l'harmonique la plus amplifiée et on obtient finalement des ondes stationnaires non linéaires périodiques qui se propagent à vitesse constante sans se déformer (figure 5A).

A basses fréquences, les ondes sont solitaires, sont de grande amplitude et ont un front très raide. Les oscillations capillaires entre les ondes sont amorties par la viscosité. A hautes fréquences, les ondes sont assez proches pour interagir : leurs fronts et leurs queues sont plus étirées, leur amplitude et donc leur vitesse plus faible. La variation de la vitesse avec la fréquence est représentée sur la figure 5B. Un modèle a été formulé dans le cadre de la théorie de la lubrification (évolution lente en temps et en espace des modulations du film)[7]. La cohérence de l'écoulement suivant l'épaisseur est supposé suffisante pour que la distribution de vitesse soit en tout point proche de la solution de Nusselt. On obtient alors, après intégration des équations du mouvement suivant l'épaisseur du film un système d'équations d'évolution couplées pour h et le débit local q . Ce modèle prend en compte l'inertie, le frottement visqueux avec la fibre, la tension de surface et aussi la diffusion de la quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement (dissipation visqueuse). Les solutions du modèle sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux (profils et vitesse des gouttes). En traçant les lignes de courant dans le référentiel de l'onde (Fig.5C), on observe deux types de structures différentes.

Dans un cas, il n'y a pas de transport de matière ((1) et (2)a), dans l'autre cas, généralement pour de petits rayons et des faibles épaisseurs, on observe des structures symétriques comportant une zone de recirculation entre deux points de stagnation : on peut faire l'analogie avec un anneau liquide glissant en mouillage total sur un film mince quasi-statique ((3) et (2)b). On appelle ces structures "gouttes", en opposition aux ondes.

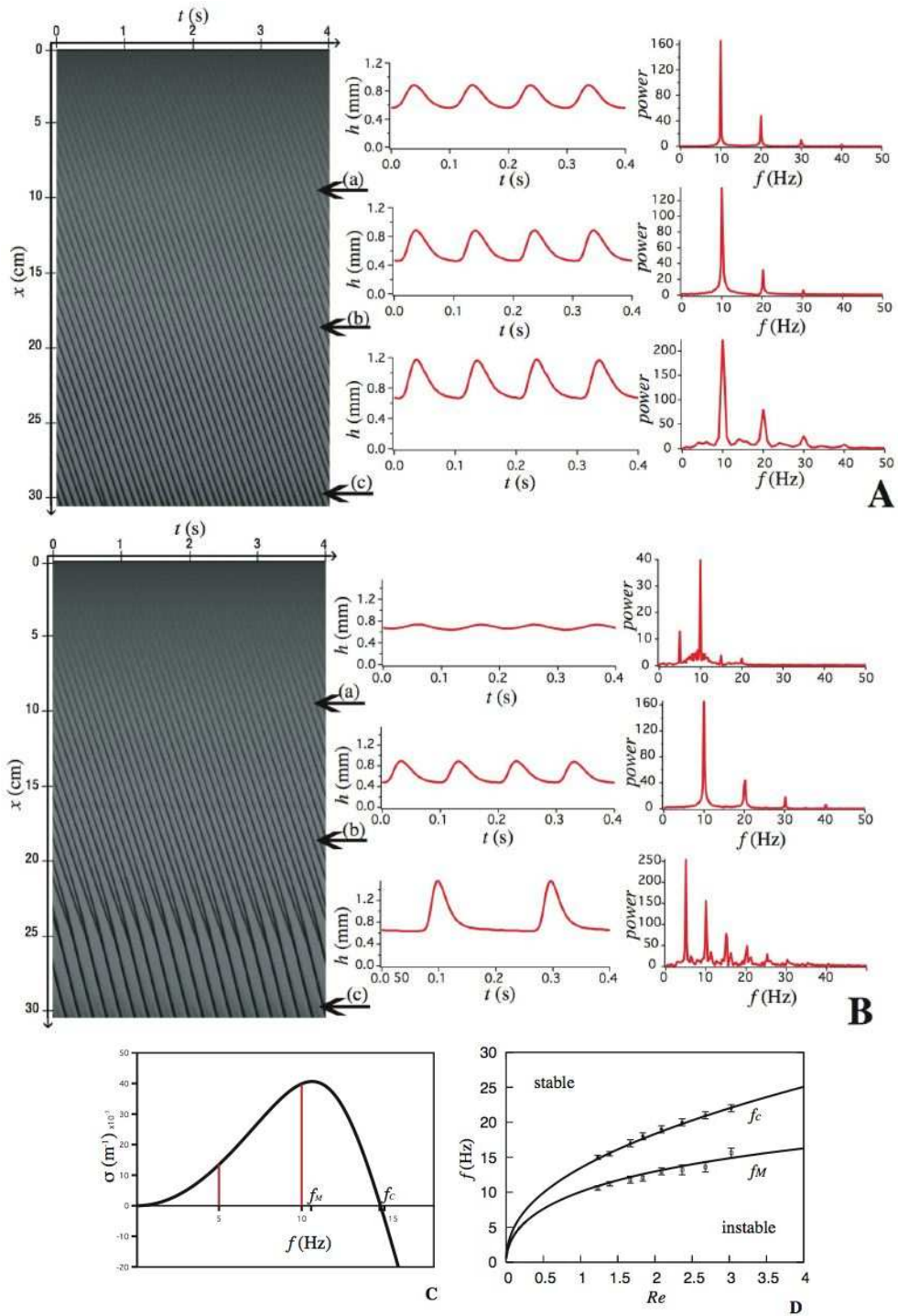


Fig.4. Réponse à un forçage $R=1.5\text{ mm}$, $h_N=0.87\text{ mm}$, $f=10\text{Hz}$ (A) et $f=5\text{Hz}$ (B) et taux de croissance (C). Fréquence maximale et fréquence de coupure en fonction du nombre de Reynolds pour $R=0.475\text{ mm}$, V50 (D).

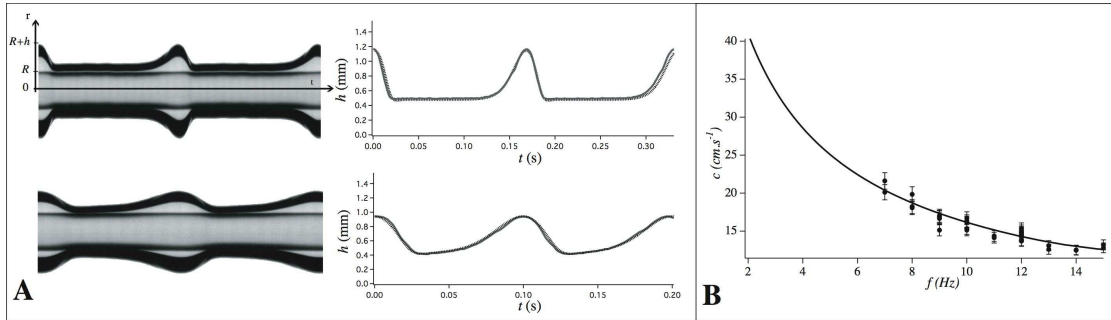


Fig.5. Résultats obtenus pour $R = 0.475\text{mm}$, $h_N = 0.56\text{mm}$ **A** : Ondes stationnaires obtenues pour, de haut en bas : $f_{for} = 6\text{Hz}$ et $f_{for} = 10\text{Hz}$. Photos de l'écoulement et comparaison des profils expérimentaux (ligne pleine) et solutions du modèle (ligne pointillée). **B** : Vitesse en fonction de la fréquence

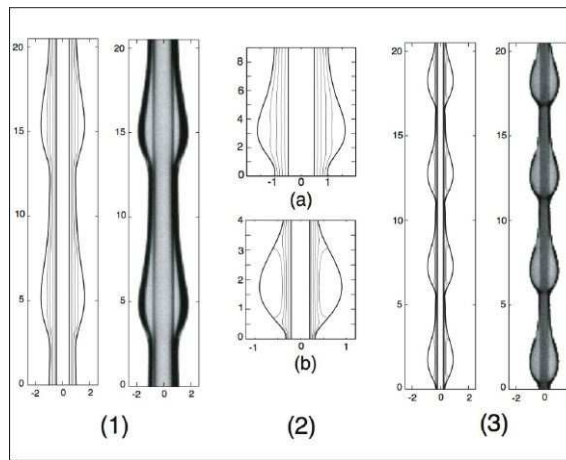


Fig.6. Profils et lignes de courants pour (1) $R = 0.475\text{mm}$, $h_N = 0.55\text{mm}$ (détail (2a)) et (3) $R = 0.2\text{mm}$, $h_N = 0.45\text{mm}$ (détail (2b)).

5 Conclusion

Nous avons caractérisé expérimentalement les différents régimes d'écoulement en faisant varier le débit, le rayon de la fibre et la viscosité. En particulier, l'étude de l'instabilité primaire a mis en évidence une transition entre une instabilité convective et une instabilité absolue. L'étude des instabilités secondaires qui désorganisent l'écoulement (transition entre les modes globaux stables et instables) est la suite logique de ce travail. Dans un deuxième temps, on cherchera à comprendre la sélection entre structures en forme de goutte et ondes sans transport de masse.

Références

1. P.L. KAPITZA, in *Collected papers of P. L. Kapitza*, Pergamon (1948)
2. D. QUÉRÉ, *Europhysics Letters*, **13**, 721 (1990).
3. A.L. FRENKEL, *Europhysics Letters*, **18**, 583 (1992).
4. C. DUPRAT, C. RUYER-QUIL, S. KALLIADASIS & F. GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, *Phys. Review Letters*, **98**, 244502 (2007).
5. I.L. KLIAKHANDLER, S.H. DAVIS & S.G. BANKOFF, *Journal of Fluid Mechanics*, **429**, 381 (2001).
6. R.V. CRASTER & O.K. MATAR, *Journal of Fluid Mechanics*, **553**, 85 (2006).
7. C. RUYER-QUIL, P. TREVELEYAN, F. GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, C. DUPRAT & S. KALLIADASIS, *Journal of Fluid Mechanics*, soumis.