

# Bifurcation de cycles hétéroclines robustes pour des systèmes invariants par symétrie sphérique avec interaction de modes de degrés $l = 3$ et $4$

Pascal Chossat<sup>1</sup> & Philippe Beltrame<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, CNRS et UNSA, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02

<sup>2</sup> Max Planck Institut, Dresde, Allemagne

pascal.chossat@unice.fr

**Résumé.** L'apparition d'un régime convectif dans une coque sphérique est un problème qui a récemment connu un nouvel intérêt du fait du lancement d'une expérience de convection avec symétrie (presque) sphérique dans la station spatiale internationale (projet GeoFlow). Dans cette expérience le champ de gravité est remplacé par un champ de force central de type électrophorétique. Les contraintes techniques imposent un rapport d'aspect (rapport des rayons des sphères bornant le domaine) voisin de 0.5. Dans le cas le plus petit degré des premiers modes sphériques instables que l'on peut espérer est  $l = 3$ . D'où l'intérêt d'étudier l'interaction des modes  $l, l + 1$  avec  $l = 3$ , qui peut générer des comportements dynamiques et spatiaux non triviaux tels que des cycles hétéroclines robustes, c'est à dire d'ensembles d'orbites hétéroclines connectant des états stationnaires (ou autres) de façon cyclique et robuste par petites perturbations respectant les symétries du problème. La bifurcation de cycles hétéroclines robustes entre états axisymétriques a été très étudiée notamment dans le cas de l'interaction  $l = 1, 2$  [1,2,3]. Cependant ce cas ne peut pas se produire dans l'interaction  $l = 3, 4$ . Des simulations sur les équations approchant la variété centrale dans ce cas ont montré la présence probable de cycles hétéroclines robustes attractifs connectant des états stationnaires présentant des symétries tétraédrales et cubiques. Une étude détaillée de ce système a montré qu'en effet de tels objets existent pour des ensembles ouverts de valeurs des paramètres. Je présenterai les résultats disponibles et discuterai leur pertinence pour l'expérience GeoFlow et pour la convection classique de Rayleigh-Bénard dans un domaine sphérique.

**Abstract.** The onset of convection in a spherical shell has recently given rise to some new interest due to the launch of a convection experiment in spherical geometry in the International Space Station (GeoFlow project). In this experiment the gravity field is replaced by a central electrophoretic force field. Technical constraints impose an aspect ratio (inner to outer boundaries radius ratio) close to 0.5. The lowest possible degree of the first unstable spherical modes in this case is  $l = 3$ . It is therefore interesting to study the  $l, l + 1$  mode interaction with  $l = 3$ , in order to look for non trivial dynamics near onset, in particular robust heteroclinic cycles (sets of heteroclinic orbits connecting several types of equilibria in a cyclic way and which are robust under small perturbations respecting the symmetries of the problem).

## 1 Introduction

Il est bien connu que les problèmes d'évolution invariants par une action linéaire du groupe  $O(3)$  peuvent posséder des *cycles hétéroclines robustes* (qu'on désignera par *CHR*), c'est-à-dire des ensembles invariants composés de points d'équilibre  $P_1, \dots, P_k$  tels que la variété instable de  $P_j$  est incluse dans la variété stable de  $P_{j+1} \pmod k$  d'une façon structurellement stable [5]. En fait cette définition est trop restrictive : pour réaliser un ensemble invariant à la fois structurellement et dynamiquement stable il est souvent nécessaire de considérer des objets formés d'une réunion de cycles, mais par abus de langage on les nommera toujours CHR (généralisés). On démontre l'existence de ces objets par les méthodes locales de bifurcation, sous certaines conditions : 1) la bifurcation de codimension 2 (à deux paramètres) associe des représentations irréductibles de  $O(3)$  de degrés  $l$  et  $l + 1$ ; 2) les coefficients des termes quadratiques dans les équations réduites à la variété centrale satisfont certaines relations qu'on précisera plus tard. Ces relations sont par exemple (et génériquement) satisfaites dans le cas de la convection de Bénard dans une coque sphérique en auto-gravitation [6]. Dans le cas où  $l = 1$ , il a été montré [3] que de tels CHR

apparaissent effectivement par bifurcation et connectent des états stationnaires axisymétriques. De plus ces objets peuvent être dynamiquement stables, ce qui permet de les mettre en évidence sur des simulations numériques. D'un point de vue physique, ils sont alors associés à des dynamiques intermittentes entre états metastables.

Un nouvel intérêt s'est récemment manifesté pour le cas où  $l = 3$  (interaction de modes de degrés 3 et 4), en relation avec une expérience de l'Agence Spatiale Européenne destinée à être montée dans la Station Spatiale Internationale. Cette expérience, nommée GeoFlow, consiste à réaliser des écoulements convectifs dans une coque sphérique soumise à un gradient de température et à une force diélectrophorétique centraux [8]. Pour des raisons techniques le rapport d'aspect (rapport du rayon intérieur par le rayon extérieur des sphères bornant le domaine fluide) ne peut être inférieur à une valeur proche de 0.5, ce qui entraîne que les premiers modes sphériques instables sont ceux de la représentation irréductible de degré  $l = 3$  ou 4. Des simulations numériques dans l'approximation de la variété centrale près du seuil de convection lorsque les modes  $l = 3$  et 4 sont proches simultanément de l'instabilité, ont montré un comportement qui suggère la présence d'un CHR attractant impliquant des états stationnaires à symétrie cubique (avec des modes "purs"  $l = 4$ ) et tétraédrale (mixant des modes avec  $l = 3$  et 4). Cependant, des simulations directes indiquent qu'en fait cette dynamique se stabilise après quelques temps sur un état à symétrie cubique. On interprète cette contradiction de la façon suivante. Les équations pour les modes "purs" avec  $l = 4$  sur la variété centrale possèdent un terme quadratique, donc une bifurcation de type transcritique d'états stationnaires avec symétrie cubique (fait bien connu, [4]). Le coefficient du terme quadratique est suffisamment petit pour permettre à la branche bifurquée sous-critique de présenter un point de retournement. Les solutions "cubiques" deviennent stables au-delà du point de retournement par rapport aux perturbations de modes  $l = 4$ . Les équations pour les modes  $l = 3$  génèrent alors des connexions hétéroclines qui réalisent le CHR observé. Toutefois il est probable que ce retournement de la branche bifurquée se produit au-delà du domaine de validité de l'approximation de la variété centrale, ce qui expliquerait que le comportement intermittent n'est observé, dans les simulations directes, que dans un régime transitoire. Il est connu que ce coefficient quadratique est effectivement proche de 0 dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard, c'est-à-dire lorsque la force centrale de rappel est la gravité [6,11]. Par contre dans le cas de l'expérience GeoFlow, cette force, de nature diélectrophorétique, varie suivant une loi en  $r^{-5}$  (au lieu de  $r^{-3}$  pour la gravité), et ceci entraîne que le coefficient quadratique n'est généralement pas très proche de 0 (sauf peut être pour des valeurs particulières du nombre de Prandtl).

On présente dans cette communication des résultats sur cette question qui feront l'objet d'un article détaillé (prépublication [7]). On a montré que des CHR (dans un sens généralisé) connectant des états stationnaires à symétrie axisymétrique et cubique entre eux peuvent effectivement bifurquer dans le cas de l'interaction de modes de degrés  $l = 3$  et 4. Ces CHR sont observables numériquement (simulations sur la variété centrale), mais en général seuls les états à symétrie cubique sont effectivement approchés par la dynamique. La stabilité asymptotique de ces ensembles invariants fait l'objet d'une étude en cours.

## 2 Bifurcations avec symétrie sphérique et interaction de modes $l = 3, 4$

### 2.1 Géométrie de l'interaction $l = 3, 4$ et équations sur la variété centrale

La première étape dans la résolution d'un problème de bifurcation invariant par une action linéaire d'un groupe  $G$  compact consiste, une fois identifiée l'action du groupe de symétrie sur l'espace  $V$  des modes propres critiques, à déterminer les types d'isotropie de cette représentation et les sous-espaces de points fixes correspondants. Rappelons que le *sous-groupe d'isotropie* d'un point  $v \in V$  est  $G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ . Les points d'une même  $G$ -orbite ont des sous-groupes d'isotropie conjugués, ce qui permet de définir le *type d'isotropie* associé à cette orbite. Pour une représentation de dimension finie d'un groupe compact, il y a un nombre fini de types d'isotropie qui de plus sont partiellement ordonnés par inclusion des sous-groupes d'isotropie. On peut donc construire un *treillis* des types d'isotropie. De plus à chaque sous-groupe d'isotropie (plus généralement à chaque sous-groupe fermé)  $H$  de  $G$  on associe le *sous-espace de points fixés par  $H$*  :  $Fix(H) = \{v \in V \mid H \cdot v = v\}$ . L'intérêt de cette notion est que ces sous-espaces sont *invariants* par les dynamiques  $G$ -équivalentes. Il s'ensuit que l'on peut restreindre la dynamique

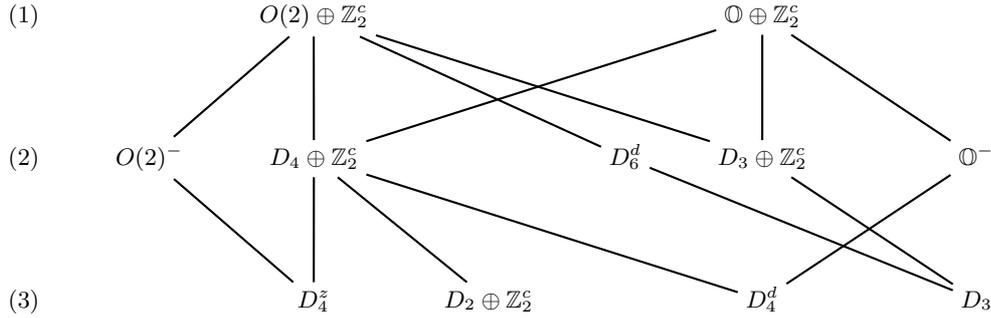
à des sous-espaces de points présentant une isotropie donnée (voir [5] pour plus d'informations sur ces concepts et leurs applications aux problèmes de bifurcation).

Dans le cas où  $G = O(3)$  et  $V = V_3 \oplus V_4$ , somme (directe) des représentations irréductibles naturelles de  $O(3)$  de degrés resp. 3 et 4, chaque  $V_l$  est représenté par la base des fonctions harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta)e^{mi\phi}$ ,  $-l \leq m \leq +l$  ( $P_l^m$  sont les polynômes de Legendre associés), de sorte que tout élément  $v \in V$  s'écrit

$$v = \sum_{-3}^3 x_j Y_3^j + \sum_{-4}^4 y_k Y_4^k$$

où  $x_{-j} = (-1)^j \bar{x}_j$  et  $y_{-k} = (-1)^k \bar{y}_k$ . L'action de la réflexion antipodale  $S$  sur les  $Y_l^m$  est triviale lorsque  $l$  est paire et agit comme  $-Id$  lorsque  $l$  est impair. Dans la suite on notera  $\mathbb{Z}_2^c$  le groupe engendré par  $S$ .

Le diagramme de la figure 1 montre les principaux types d'isotropie pour l'action considérée ci-dessus. Il a été obtenu à partir des informations contenues dans [4]. Seuls les types d'isotropie ayant des sous-espaces de points fixes de dimension inférieure ou égale à 3 sont indiqués (voir le diagramme complet dans [7]). Chaque nombre entre parenthèses indique la dimension pour les sous-groupes d'isotropie de la ligne correspondante. Les notations utilisées sont celles de [4] (voir dans [5] en appendice une table de correspondance avec la notation de Schinfiés). Par exemple  $\mathbb{O}$  désigne le groupe octaédral et  $\mathbb{O}^-$  est un sous-groupe de  $O(3)$  non inclus dans  $SO(3)$  mais isomorphe à  $\mathbb{O}$ . Les points d'isotropie  $\mathbb{O}^-$  ont une symétrie tétraédrale :  $\mathbb{O}^- = \mathbb{T} \cup \kappa\mathbb{T}$  où  $\kappa$  est une réflexion/plan. Dans la base ci-dessus, les espaces



**Fig.1.** Principaux types d'isotropie.

de points fixes associés à des représentants de ces sous-groupes d'isotropie sont indiqués ci-dessous (les coordonnées non indiquées sont égales à 0 et on pose d'une façon générale  $z = z_r + iz_i \in \mathbb{C}$ ) : Ecrivons

Isotropy $H$	$Fix(H)$	Isotropy $H$	$Fix(H)$
$O(2) \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$y_0$	$D_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$(y_0, y_{2r}, y_{4r})$
$\mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$y_{4r} = \pm \eta y_0$	$D_4^d$	$(x_{2i}, y_0, y_{4r})$
$O(2)^-$	$(x_0, y_0)$	$D_3$	$(x_{3i}, y_0, y_{3r})$
$D_4 \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$(y_0, y_{4r})$	$D_4^z$	$(x_0, y_0, y_{4r})$
$D_6^d$	$(x_{3r}, y_0)$		
$D_3 \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$(y_0, y_{3r})$		
$\mathbb{O}^-$	$(x_{2i}, y_{4r} = \sqrt{\frac{5}{14}} y_0)$		

**Tab.1.** Sous-espaces de points fixes pour des représentants des types d'isotropie tels que  $\dim Fix(H) \leq 3$ .

à présent les équations sur la variété centrale jusqu'aux termes cubiques. Un changement de variables permet d'introduire deux paramètres libres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui, dans le contexte de Rayleigh-Bénard, sont des

combinaisons linéaires de la déviation du nombre de Rayleigh à sa valeur critique et du rapport d'aspect à sa valeur critique. Les modes  $l = 3$  deviennent instables quand  $\mu_1 > 0$  et les modes  $l = 4$  deviennent instables quand  $\mu_2 > 0$  :

$$\dot{x}_j = \mu_1 x_j + \beta Q_j^{(1)}(x_{-3}, \dots, x_3, y_{-4}, \dots, y_4) + \gamma_1 \|X\|^2 x_j + \gamma_2 C_j^{(1)}(x_{-3}, \dots, x_3) \quad (1)$$

$$\dot{y}_k = \mu_2 y_k + b Q_k^{(2)}(x_{-3}, \dots, x_3) + c Q_k^{(3)}(y_{-4}, \dots, y_4) + d_1 \|Y\|^2 y_k + d_2 C_k^{(2)}(y_{-4}, \dots, y_4) \quad (2)$$

où les  $Q$  désignent des termes quadratiques et les  $C$  des termes cubiques. Ces termes sont explicités par ailleurs [7]. Dans le contexte de la convection de Rayleigh-Bénard dans l'approximation de Boussinesq, les coefficients satisfont des relations qui, compte-tenu de la normalisation adoptée dans l'expression de ces termes, sont indiquées dans les hypothèses suivantes [2] :

**Hypothèses (H) :**

- (i)  $b \sim -2\beta$ . On peut toujours supposer que  $\beta = -1$  après un changement d'échelle adapté.
- (ii)  $\gamma_1 + 20\gamma_2 < 0$ ,
- (iii)  $d_1 + d_2 < 0$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,
- (iv)  $c \sim 0$  sera considéré comme un paramètre ( $c = 0$  lorsque les conditions aux bords sont identiques sur la sphère interne et sur la sphère externe). Dans la suite on se restreindra au cas  $c \geq 0$ .

## 2.2 Branches d'équilibres primaires

Comme on peut le voir sur le diagramme des types d'isotropie, il existe deux types dont les sous-espaces de points fixes sont de dimension 1, par conséquent pour lesquels le "lemme de bifurcation équivariante" [10] s'applique :  $O(2) \oplus \mathbb{Z}_2^2$  et  $\mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^2$ . Par conséquent deux branches de solutions axisymétriques et à symétrie cubique bifurquent génériquement à partir de la solution triviale. On les note respectivement  $\alpha$  (axisymétrique) et  $\beta$  (cubique). Les solutions correspondantes sont des modes  $l = 4$  purs comme le montre la table ci-dessus (la présence du groupe  $\mathbb{Z}_2^2$  indique que les modes  $l = 3$  est interdite). Ces branches sont déterminées par les relations suivantes :

$$0 = \mu_2 + 9cy_0 + (d_1 + d_2)y_0^2 \quad (\text{solutions } \alpha) \quad (3)$$

$$0 = \mu_2 + 14cy_0 + \left(\frac{12}{7}d_1 - \frac{16}{49}d_2\right)y_0^2 \quad \text{et} \quad y_{4r} = \sqrt{\frac{5}{14}}y_0 \quad (\text{solutions } \beta) \quad (4)$$

Elles sont *transcritiques* lorsque le coefficient quadratique  $c \neq 0$ , mais un point de retournement d'autant plus proche du point de bifurcation que  $c$  est proche de 0 existe. Lorsque  $\mu_2 > \mu'_2 > 0$  (où  $\mu'_2$  est une valeur qui s'annule quand  $c = 0$ ) il y a donc deux paires de solutions  $\alpha_{\pm}$  et  $\beta_{\pm}$ , mais ces paires ne s'échangent pas par symétrie.

La stabilité de ces solutions dépend bien sûr des valeurs propres de la matrice jacobienne du système (1)-(2) calculé en ces points. La partie principale de ces valeurs propres est indiquée dans [7].

## 3 La bifurcation de cycles hétéroclines robustes

On ne considère ici que des cycles connectant des solutions de types  $\alpha$  et/ou  $\beta$ . Des cycles faisant intervenir des solutions bifurquées d'isotropie plus faible peuvent aussi exister comme on le montre dans [7]. La situation décrite dans cette communication est cependant "basique" dans le sens où les autres cas sont obtenus à partir de celui-ci par bifurcation secondaire d'autres types d'états bifurqués (équilibres ou cycles limites). La stratégie consiste à rechercher des orbites hétéroclines entre points d'équilibre réalisant des connexions structurellement stables (par perturbations  $O(3)$  équivariantes), par exemple de type "col-puit", dans des sous-espaces de points fixes  $Fix(H)$ . L'existence d'un ensemble cyclique de connexions de ce type réalise un CHR. Dans la suite on notera  $\mathcal{O}\alpha$ ,  $\mathcal{O}\beta$ , les  $O(3)$  orbites de  $\alpha$  et  $\beta$ .

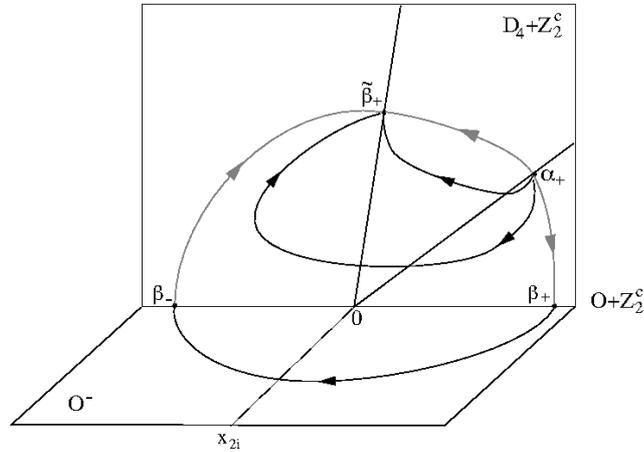
### 3.1 Connexions hétéroclines robustes dans le sous-espace invariant des modes $l = 4$

Le sous-espace  $Fix(\mathbb{Z}_2^c) = \{x_j = 0, j = -3, \dots, 3\}$  contient les modes avec  $l = 4$  "purs". Lorsque le coefficient quadratique  $c$  est non nul, les seules solutions qui bifurquent dans cet espace sont celles de type  $\alpha$  et  $\beta$ . Lorsque  $c$  est un paramètre voisin de 0, l'étude du déploiement de la singularité de codimension 2 (paramètres  $\mu_2$  et  $c$ ) permet de décrire le branchement secondaire ou tertiaire de solutions d'équilibre d'isotropie  $D_m \oplus \mathbb{Z}_2^c$  avec  $m = 2, 3, 4$  [9]. Cependant lorsque le coefficient  $d_2$  est suffisamment petit (en valeur absolue), ces solutions secondaires n'existent pas et les solutions  $\beta_+$  (c'est-à-dire pour lesquelles  $y_0 > 0$  dans (3)) sont stables dans ce sous-espace (stabilité au sens orbital puisque les solutions  $\beta$  forment des  $O(3)$ -orbites de dimension 3). On peut alors montrer, sous les hypothèses (H), que dans  $Fix(\mathbb{Z}_2^c)$ , toutes les trajectoires instables des équilibres de type  $\beta_-$ ,  $\alpha_-$  et  $\alpha_+$  sont des orbites hétéroclines robustes dont un sous-ensemble ouvert et dense se connecte sur les équilibres de type  $\beta_+$  dans  $Fix(\mathbb{Z}_2^c)$ , et le reste se connecte sur de séquilibres de types  $\alpha_{\pm}$ . Plus précisément on peut symboliser ces connexions et leurs types d'isotropie comme suit :

$\mathcal{O}\beta_- \rightarrow \mathcal{O}\alpha_- : D_4 \oplus \mathbb{Z}_2^c$ ,  $\mathcal{O}\beta_- \rightarrow \mathcal{O}\alpha_+ : D_3 \oplus \mathbb{Z}_2^c$ ,  $\mathcal{O}\beta_- \rightarrow \mathcal{O}\beta_+ : \mathbb{Z}_2^c$ ,  $\mathcal{O}\alpha_- \rightarrow \mathcal{O}\beta_+ : D_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$  et  $\mathcal{O}\alpha_+ \rightarrow \mathcal{O}\beta_+ : D_4 \oplus \mathbb{Z}_2^c$ .

### 3.2 Connexions hétéroclines robustes faisant intervenir des modes $l = 3$

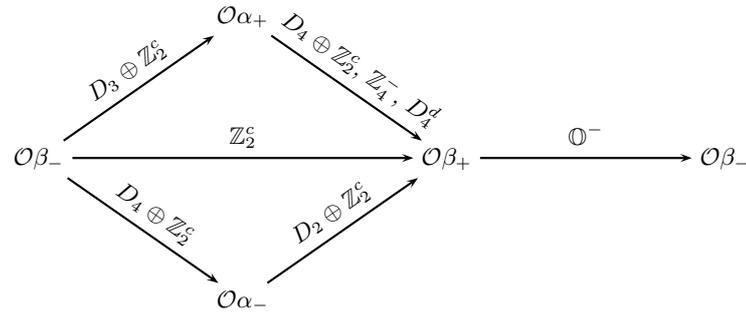
On peut montrer l'existence de connexions de type "col-puit" :  $\beta_+ \rightarrow \beta_-$ , dans le plan  $Fix(\mathbb{O}^-)$ , sous les hypothèses (H) et lorsque  $\mu_1$  est suffisamment proche de 0. On peut montrer en outre qu'il existe un intervalle ouvert dans le demi-axe  $\mu_1 < 0$ , tel que lorsque  $\mu_1$  appartient à cet intervalle, ces connexions existent, mais aussi une variété de dimension 4 de connexions robustes :  $\alpha_+ \rightarrow \mathcal{O}\beta_+$  dans l'espace de dimension 5  $Fix(\mathbb{Z}_4^-)$ . Toutes les autres directions propres des équilibres de type  $\alpha_{\pm}$  et  $\beta_{\pm}$  le long des modes  $l = 3$  sont stables. La figure ci-dessous (où  $\tilde{\beta}_+$  est une copie par une rotation d'angle  $\pi/4$  de  $\beta_+$ ), montre ces connexions dans le sous-espace de dimension 3  $Fix(D_4^d) \subset Fix(\mathbb{Z}_4^-)$ .



**Fig.2.** Connexions hétéroclines dans  $Fix(D_4^d) = Fix(\mathbb{O}^-) + Fix(\mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^c)$

### 3.3 Le cycle hétérocline robuste

En rassemblant les résultats des deux paragraphes précédents, on obtient, pour un ensemble ouvert de valeurs de paramètres du problème, un CHR qu'on peut schématiser comme ci-dessous (où sont indiqués les types d'isotropie des connexions).



D'autres configurations sont possibles, voir [7] pour les détails. Les simulations numériques sur le système (1)-(2) confirment l'existence de ce CHR dont les conditions de stabilité (asymptotique) restent à étudier.

## Références

1. D. ARMBRUSTER & P. CHOSSAT, Heteroclinic orbits in a spherically invariant system, *Physica D*, **50** 155-176, (1991).
2. P. CHOSSAT & F. GUYARD, Heteroclinic cycles in bifurcation problems with  $O(3)$  symmetry, *Journal of Nonlinear Science*, **6** 201-238, (1996).
3. P. CHOSSAT, F. GUYARD & R. LAUTERBACH, Generalized heteroclinic cycles in spherically invariant systems and their perturbations, *Journal of Nonlinear Science*, **9**, 479-524 (1999).
4. P. CHOSSAT, R. LAUTERBACH & I. MELBOURNE, Steady-State bifurcation with  $O(3)$ -symmetry, *Archive for Rational Mechanics Anal.*, **113**, 313-376, (1990).
5. P. CHOSSAT & R. LAUTERBACH, Equivariant bifurcation theory and its applications, *Advanced Series in Nonlinear Dynamics* **15**, World Scientific, Singapur (2000).
6. P. CHOSSAT, The bifurcation of heteroclinic cycles in systems of hydrodynamical type, *Journal on Continuous, Discrete and Impulsive System A*, **8** (4) 575-590, (2001).
7. P. CHOSSAT & P. BELTRAME, Bifurcation of robust heteroclinic cycles in spherically invariant systems with  $l = 3, 4$  mode interaction, *Preprint*.
8. C. EGBERS, W. BEYER, A. BONHAGE, R. HOLLERBACH & P. BELTRAME, The geoflow-experiment on ISS (part I) : Experimental preparation and design of laboratory testing hardware, *Advances in Space Research*, **32** (2), 171-180, (2003).
9. C. GEIGER, G. DANGELMAYR, J.D. RODRIGUEZ & W. GUTTINGER, Symmetry breaking bifurcations in spherical Benard convection. I : Results from singularity theory, *Fields Institute Communications* (American Mathematical Society), **5**, 225-237, (1993).
10. M. GOLUBITSKY, I. STEWART & D. SCHAEFFER, Singularities and groups in bifurcation theory II, *Applied Mathematics in Science*, **69**, Springer Verlag (1988).
11. J.D. RODRIGUEZ, C. GEIGER, G. DANGELMAYR & W. GUTTINGER, Symmetry breaking bifurcations in spherical Benard convection. II : Numerical results, *Fields Institute Communications* (American Mathematical Society), **5**, 239-253, (1996).