

# Propriétés non-linéaires des spirales de Taylor

N. Abcha<sup>1</sup>, A. Ezersky<sup>2</sup>, L. Nana<sup>3</sup>, & M. Innocent<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LOMC, Université du Havre, 25, rue Philippe Lebon, 76058 Le Havre cedex

<sup>2</sup> UMR CNRS 6143 "M2C", Université de Caen, 14000 Caen Cedex

<sup>3</sup> Department of Physics, Faculty of Science, University of Douala P.O. Box 24 157 Douala, Cameroon  
nizar.abcha@univ-lehavre.fr

**Résumé.** A partir des mesures de vitesses obtenues par PIV, nous caractérisons, les propriétés non linéaires des spirales de Taylor (la dissymétrie entre l'écoulement entrant et sortant, l'anharmonicité et la brisure de symétrie miroir). Nous décrivons le comportement observé dans les zones des défauts de spirales avec une analyse fine autour de chaque défaut (profil d'amplitude, saut de phase, champs de vitesse ...).

**Abstract.** From the velocity measurements obtained by PIV, We study the flow structure and nonlinear properties of spiral vortices (flow dissymmetry, anharmonicity, breaking of the mirror symmetry). In addition, we describe the dynamics in the neighbourhood of the spiral defects.

## 1 Introduction

Le système de Couette-Taylor est composé de deux cylindres coaxiaux en rotation différentielle et est le siège de plusieurs modes d'instabilités [1]. Dans le cas où les cylindres tournent en contrarotation, l'écoulement de Couette circulaire subit une bifurcation de Hopf supercritique et transite vers un écoulement avec des structures tourbillonnaires, appelées spirales, qui s'enroulent en hélice autour du cylindre intérieur. Pour une vitesse de rotation  $\Omega_o$  du cylindre extérieur fixe, ce régime d'écoulement spirale évolue vers des régimes plus complexes lorsque la vitesse de rotation  $\Omega_i$  du cylindre intérieur augmente. La caractérisation expérimentale du régime de spirale a été observée pour la première fois par Coles [2] et ensuite étudiée avec des techniques LDV et PIV par Schulz et Pfister [3]. Ces mesures ont montré que la fréquence de spirales diminue avec Ri pour Ro fixe, en accord avec les simulations numériques des équations de Navier-Stokes [4-6].

De récents travaux théoriques et expérimentaux ont montré que les spirales générées dans le système de Couette-Taylor en contrarotation possèdent une dispersion anormale [7], laquelle permet d'expliquer, dans le cadre de la théorie de Ginzburg-Landau, l'existence d'une source stable entre les deux spirales contrapropagatives [7].

Dans une première partie, nous caractériserons à l'aide des mesures de champs de vitesses instantanés dans le plans  $(r,z)$ , les propriétés non linéaires des spirales de Taylor telles que : la dissymétrie entre l'écoulement entrant et sortant  $|\Delta_{in}|/|\Delta_{out}|$ , l'anharmonicité des spirales et la brisure de symétrie miroir du SPI au niveau de l'écoulement sortant [4] en comparaison avec les vortex de Taylor.

Dans une seconde partie, nous étudions la dynamique des défauts spatio-temporels observées dans le motif d'ondes spiralés. Une étude numérique de l'équation complexe de Ginzburg-Landau avec les conditions aux limites homogènes a permis de retrouver les solutions avec défauts périodiques observés dans les expériences. Le comportement spatio-temporel de l'amplitude et de la phase autour de ces défauts est analysé.

## 2 Résultats

Le dispositif expérimental comporte un cylindre intérieur de rayon  $a = 4$  cm, un cylindre extérieur de rayon  $b = 5$  cm, et de hauteur  $L = 45.9$  cm. Le rapport des rayons est  $\eta = a/b = 0,8$  et le rapport d'aspect  $\Gamma = L/d = 45,9$ , où  $d = b - a$  est la taille de l'entrefer. Le cylindre extérieur est isolé thermiquement

de l'extérieur par un bain rectangulaire en plexiglass rempli d'eau. La géométrie rectangulaire du bain favorise les observations optiques. Les vitesses de rotation  $\Omega_o$  et  $\Omega_i$  du cylindre extérieur et intérieur permettent de définir les nombres de Reynolds associés, respectivement  $R_o = \Omega_o ad/\nu$  et  $R_i = \Omega_i ad/\nu$ , où est la viscosité de l'eau. Le fluide entre les deux cylindres est constitué d'eau (déméralisée)ensemencée, pour la PIV, par des particules sphériques creuses de verre de diamètre moyen de 8 à 11  $\mu\text{m}$  avec une concentration en masse inférieure à  $10^{-4}$ . Le système PIV est constitué d'un laser Quantel Nd :YAG. Les paires d'images sont collectées par une caméra CCD de 1034x779 pixels. Les intercorrélations entre images d'une même paire sont calculées avec le logiciel Corélia-V2IP avec une fenêtre d'interrogation de 32x32 pixels, afin d'obtenir les champs de vitesse dans le plan (r,z). A partir des champs de vitesse nous pouvons extraire les profils  $v_r(z)$  de vitesse radiale dans la direction axiale à différentes position radiale. De même les profils  $v_r(r)$ ,  $v_z(z)$ ,  $v_z(r)$  sont extraits à différentes positions. L'extraction de ces profils pour chaque champs de vitesse au cours du temps permet de former les profils spatio-temporels  $v_r(z, t)$ ,  $v_r(r, t)$ ,  $v_z(z, t)$ ,  $v_z(r, t)$  [8]. Nous avons utilisée aussi la visualisation par addition d'une suspension de 2à l'eau déminéralisée. La lumière réfléchiée par les paillettes est collectée le long d'un axe parallèle à l'axe du système par une caméra CCD linéaire. Chaque ligne I(z) collectée à un temps donné est assemblée aux autres lignes acquises au cours du temps afin de former un diagramme spatio-temporel I(z,t).

### 3 Dispositif xpérimental

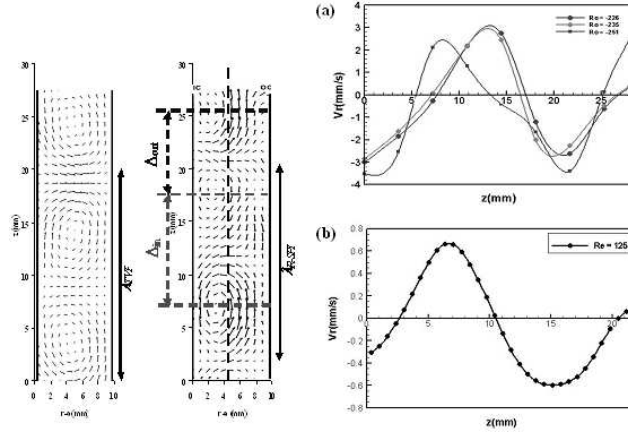
#### 3.1 Structure des vortex

Les champs de vitesse de l'écoulement dans un plan (r,z), pour le régime de spirale à  $R_i = 214$  et  $R_o = -251$ , ainsi pour le régime de TVF à  $R_i = 125$  et  $R_o = 0$ , sont illustrés sur la figure 1. A partir de ces champs nous avons pu sortir les constatations remarquables suivantes, [4,5] : (i) contrairement au régime de TVF, la structure tourbillonnaire de SPI, n'occupe qu'un tiers de l'espace annulaire : la zone instable au voisinage du cylindre intérieur. (ii) une dissymétrie de taille de deux tourbillons d'une même paire : le tourbillon négatif est 1,375 fois plus grand que le tourbillon positif. (iii) cette différence de taille implique une diminution de longueur d'onde  $\lambda = 1,7d$  pour le SPI par rapport à  $\lambda = 2d$  pour le TVF.

#### 3.2 Anharmonicité

Sur la Fig. 2a, nous montrons les profils axiaux de la vitesse radial  $v_r(z)$  au milieu de l'espace annulaire pour  $R_i = 214$  et  $R_o = \{-251, -235, -226\}$  et sur la Fig. 2b pour le régime de TVF à  $R_i = 125$ . Typiquement comme les TVF, les SPI sont caractérisées par une anharmonicité des profils des vitesses (Fig. 2a) : où  $\Delta_{in}$  : la zone d'écoulement entrant et  $\Delta_{out}$  : zone d'écoulement sortant. Le degré d'anharmonicité augmente quand  $R_o$  devient plus négatif. Cette croissance d'anharmonicité se développe principalement en aplatisant (augmentation) les profils d'ondes en avant (derrière) des crêtes ( $R_o = -251$ ). Pour le TVF, l'anharmonicité vient d'un élargissement (rétrécissement) de la gamme axiale  $\Delta_{in}(\Delta_{out})$  de l'écoulement radial entrant où  $v_r < 0(v_r > 0)$  et la diminution (augmentation) correspondante de la vitesse entrante (sortante). Nous montrons dans le tableau récapitulatif ci-dessous que  $\Delta_{in}/\Delta_{out}$  augmente pour le SPI même s'il reste inférieur à celui des TVF [4].

La variation de l'anharmonicité des profils des vortex peut être vue avec les résultats d'une analyse de Fourier. À cet effet, nous calculons le rapport  $\hat{v}_2/\hat{v}_1$  entre le deuxième et le premier mode de profil de vitesse axiale de Fourier, en fonction de Ro pour  $R_i$  fixe. Nous montrons dans le tableau récapitulatif ci-dessous (Tab. 1), que le rapport d'amplitude moyennée de deuxième mode par rapport au premier mode,  $\langle |A_2/A_1| \rangle$  pour  $R_i = 214$  et  $R_o = \{-251, -235, -226\}$ , augmente quand Ree devient de plus en plus négatif. D'après l'étude numérique de Ch. Hoffmann et al. (2004) [4], pour le régime de SPI ce rapport reste au dessous de 1. Cette propriété reflète le fait qu'à des  $R_o$  suffisamment négatifs les vortex de Taylor sont efficacement plus petits de taille que la largeur d'espace annulaire.



**Fig.1.** a : Champ de vitesse  $(r,z)$ , pour le SPI à  $R_i = 214$  et  $R_o = -251$ , pour le TVF à  $R_i = 125$  et  $R_o = 0$   
**Fig.2**  $V_r(z)$  à  $r = a + 0.5d$  pour  $R_i = 214$  et  $R_o = \{-251, -235, -226\}$  pour le SPI et à  $R_i = 125$  pour le TVF.

### 3.3 Rupture de symétrie miroir du SPI

Le TVF sur la Fig. 3a, montre une symétrie-miroir axiale à  $z = \lambda_{TVF}/2$ , autour de la position de l'écoulement sortant (le maximum de la vitesse radiale). Afin de mesurer le degré brisure de cette symétrie dans le régime de SPI, nous avons utilisé le paramètre d'asymétrie introduit par Ch. Hoffmann et al. [4] :

$$P = \frac{|\int_0^{\lambda/2} v_r(z') dz' - \int_{-\lambda/2}^0 v_r(-z') dz'|}{|\int_0^{\lambda/2} v_r(z') dz' + \int_{-\lambda/2}^0 v_r(-z') dz'|} \quad (1)$$

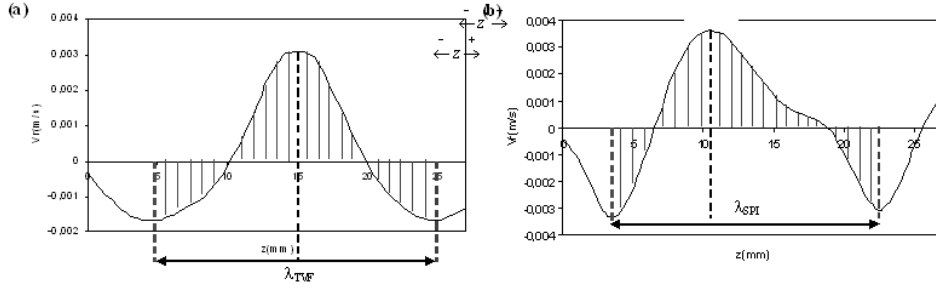
évalué au milieu de l'espace annulaire, en localisant à  $z'$  le maximum de la vitesse radiale sortante (Fig. 3b). De cette façon nous avons calculé, dans le tableau récapitulatif les valeurs de P pour  $R_i = 214$  et  $R_o = \{-251, -235, -226\}$ . Nous trouvons donc que, quand  $R_o$  décroît le paramètre d'asymétrie augmente. Ainsi, pour des grand  $R_o$  négatif, les spirales montrent une plus grande rupture de symétrie-miroir.

Flow	$R_o$	$\Delta_m$	$\Delta_{out}$	$\Delta_m / \Delta_{out}$	P	$\langle A_2 \rangle / \langle A_1 \rangle$
	-226	10	9.2	1.09	0.43	0.10
	-235	10.4	9.3	1.12	0.49	0.37
	-251	10.6	8.7	1.22	0.52	0.40
TVF	$R_i = 125$	10	7.7	1.29	0.08	
	$R_i = 105$	10.6	7.7	1.09	0.04	

**Tab.1** : Paramètres de dissymétrie de l'écoulement

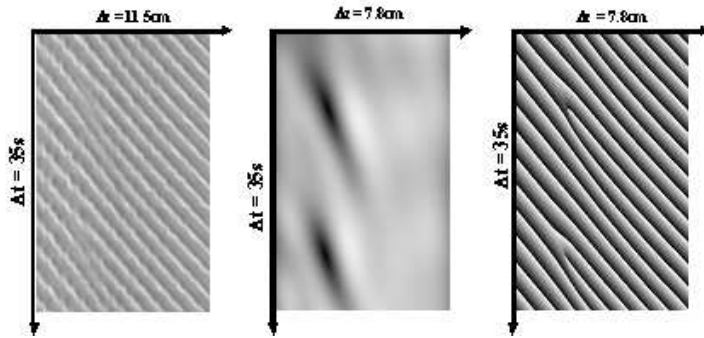
### 3.4 Comportements spatio-temporels au voisinage d'un défaut spatio-temporel

Pour  $R_i > 343$  et  $R_o = -622$ , la source entre les deux spirales devient très faible et disparaît de l'écoulement, ce qui permet aux spirales d'interférer dans ce petit espace Fig.4a. Ce motif possède des zones d'interpénétrations où on a coexistence de deux ondes gauche et droite et zones sans interpénétration avec une seule onde, qui génèrent l'appariation des défauts ponctuels de phase dans le motif sous forme de dislocation ou collision entre deux spirales Fig.4. Pour étudier la dynamique de défaut dans le motif

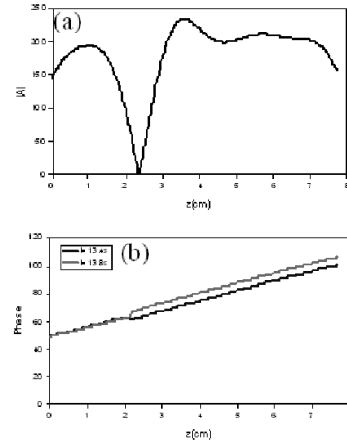


**Fig.2.**  $v_r(z)$ , à  $R_i = 125$  et  $R_o = 0$  pour le TVF et à  $R_i = 214$  et  $R_o = -226$  pour le SPI qui montre une symétrie-miroir par rapport à  $z$  pour le TVF et une dissymétrie pour le SPI.

des spirales, nous suivons l'évolution des propriétés spatio-temporelles comme la phase, l'amplitude, la fréquence et le nombre d'onde autour d'un défaut. Dans la Fig.4 nous présentons les deux premières grandeurs autour de deux défauts dans la région où la propagation de la spirale droite est plus dominante que la spirale gauche. Le champ d'amplitude de  $A(x, t)$  et de la phase  $\varphi(x, t)$  pour le défaut illustrés sur la Fig.4a. À proximité des défauts, la phase présente un saut de  $\pi$ , comme l'amplitude subit une dépression représentée par le spot noir dans le diagramme spatio-temporel. Pour extraire plus d'information sur la dynamique de défaut à partir des diagrammes spatio-temporels d'amplitude et de la phase, nous présentons dans la Fig.5a le profil spatial de l'amplitude à travers le défaut où elle atteint zéro au coeur de défaut [9,10]. Sur la Fig.5b un exemple de deux profils de la phase dans l'espace avant et après le coeur du défaut dans un intervalle du temps de 0.4s. Ce profil de la phase montre clairement le saut du  $\pi$  dans la Fig.4c

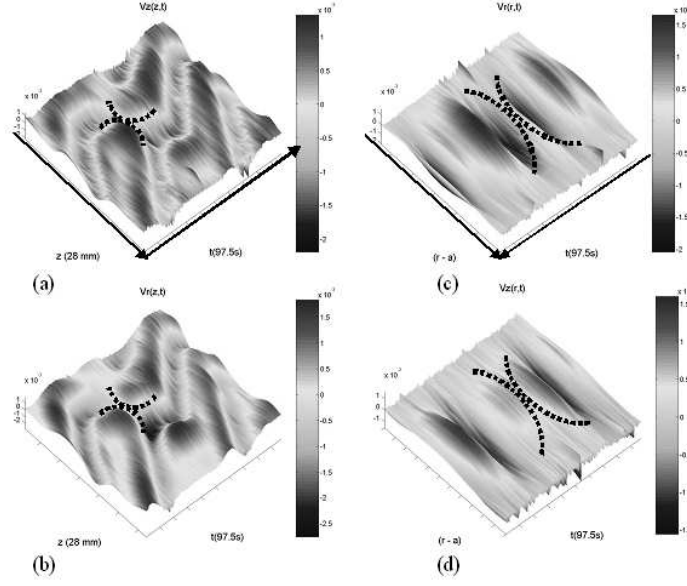


**Fig.3.** (a) spirale interpénétrant droite aux voisinages des défauts (b) amplitude, (c) phase



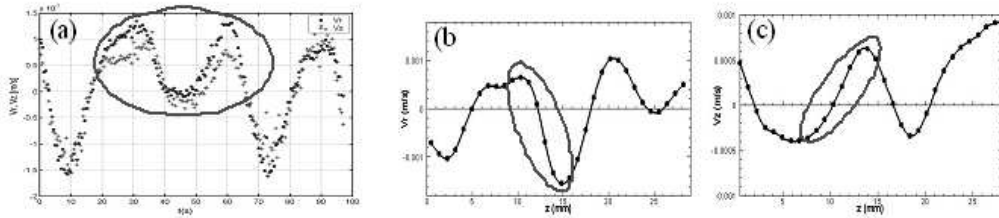
**Fig.4.** Profils spatiaux de l'amplitude à travers et de la phase avant et après le coeur du défaut

Nous avons mesuré le champs de vitesse au voisinage d'un défaut pour  $R_i = 227$  à différents intervalles de temps. Les diagrammes spatio-temporels des composantes radiale et axiale dans le plan  $(z,t)$ , rapportés Fig.6a, présentent un défaut vers  $t=42$ s. On note que la composante radiale s'annule pour  $t=42$  s à  $z=12$  mm. Ceci se confirme sur l'ensemble de l'entrefer sur le diagramme  $v_r(r, t)$  et  $v_z(r, t)$  pris à  $z=12$  mm, rapporté Fig.6b. On remarque en effet des valeurs particulièrement faibles autour de  $t=42$  s, entre deux structures tourbillonnaires présentant un écoulement radial rentrant. Ceci est mis en évidence par l'évolution de deux composantes de vitesses au cours de temps, où ils s'annulent à travers le défaut.



**Fig.5.** Diagrammes spatio-temporels au voisinage d'un défaut  $R_i = 227$

Nous avons ensuite, concentré notre attention sur les comportements spatio-temporels de deux composantes de vitesses à travers le défaut. Pour cela nous avons tracé sur la Fig.7a l'évolution temporelle de la vitesse radiale et axiale, elles évoluent selon une loi parabolique avec une tangente horizontale au coeur de défaut :  $v_r(t - t_d) \approx \alpha(t - t_d)^3 + \theta(t - t_d)^3$  et  $v_z(t - t_d) \approx \beta(t - t_d)^3 + \theta(t - t_d)^3$  où  $\{\alpha = 0.01; \beta = -0.07\}$ . Les deux composantes des vitesses varient selon une fonction linéaire avec la distance à partir du défaut (Fig.7betFig.7c) :  $v_r(z - z_d) \approx a(z - z_d) + \theta(z - z_d)^2$  et  $v_z(z - z_d) \approx b(z - z_d) + \theta(z - z_d)^2$  où  $\{a = -0.62; b = 0.21\}$ .



**Fig.6.** Evolution temporelle et spatiale de deux composantes de vitesses  $v_r(t)$  et  $v_z(t)$ ,  $R_i = 201$

## 4 Discussion

La dynamique des ondes spiralées peut être régie par l'équation de Ginzburg-Landau complexe (CGL) :

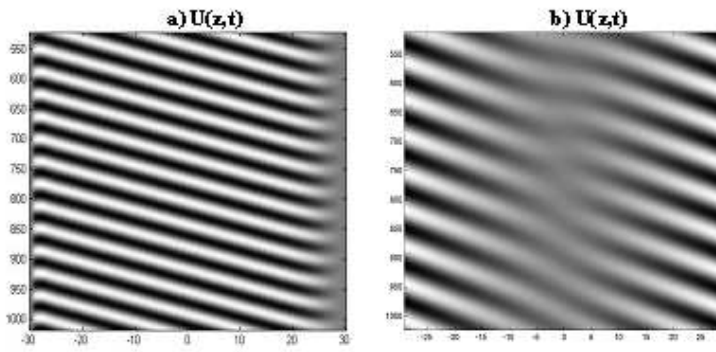
$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial z} = \varepsilon A + (1 + ic_1) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - (1 + ic_1) |A|^2 A; \quad (2)$$

Nous avons intégré numériquement cette équation (2) en utilisant le schéma des différences finies sur l'espace et l'algorithme de Runge-Kutta du quatrième ordre dans le temps, avec les conditions aux limites homogène ( $A(0) = A(L) = 0$ ). Nous présentons sur la Fig.8a le diagramme spatio-temporel de la

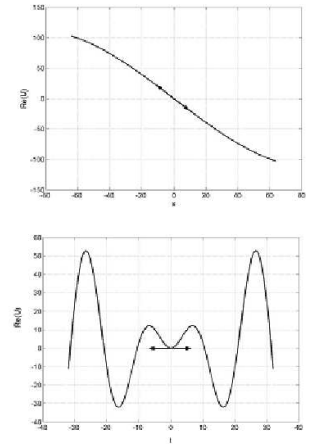
partie réelle du signal  $U(z,t)$ . Au voisinage d'un défaut nous avons cherché une solution approchée de l'équation Ginzburg-Landau (2) sous la forme :  $A(z, t) \cong (z + it)$  où  $z=0, t=0$  correspondent à la position du défaut. Ensuite par démodulation complexe, nous avons construit le champ suivant :

$$U = A \exp i(\omega t - kz) + A^* \exp -i(\omega t - kz) = -2t \sin(\omega t - kz) + 2z \cos(\omega t - kz) \quad (3)$$

Nous présentons sur la Fig.8b le diagramme spatio-temporel de la partie réelle où du paramètre d'ordre  $A$  avec un défaut topologique. Tous d'abord pour étudier les comportements spatiotemporels observés à travers ce défaut, nous avons tracé sur la Fig.9 le profil spatial et temporel à  $z=0, t=0$  correspondant à la position du défaut : à  $z = 0$   $U(z = 0, t) = -2t \sin \omega t \approx -2\omega t^2 + \theta(t^3)$  et à  $t=0$   $U(z, t = 0) = -2z \cos kz \approx -2z + \theta(z^3)$



**Fig.7.** (a) Diagramme spatio-temporel  $U(z, t)$ ;  $c_1=0.5$ ;  $c_3=-2$ ;  $\varepsilon = 0.5$  et  $V=-1$ ; (b) Diagramme spatio-temporel de la partie réelle  $U(z, t)$ ,  $w = 0.1$  et  $k = 0.01$



**Fig.8.** Profils spatial et temporel du champ réel  $U(z,t)$  à travers le défaut à  $z = 0, t = 0$

Le profil spatial du champ réel  $U(z, t)$  montre que la partie réelle varie de façon linéaire à travers le défaut pour  $t=0$  où elle s'annule à  $z = 0$ , contrairement au profil temporel qui varie selon une loi parabolique avec une tangente horizontale à  $z=0$ .

## Références

1. C. D. ANDERECK AND **al.**, *J. Fluid Mech.*, **164**, 155-183 (1986).
2. D. COLES, *J. Fluid Mech.*, **197**, 385 (1988).
3. A. SCHULZ & G. PFISTER, *Lecture Notes in Physics*, (2000).
4. C. HOFFMANN AND **al.**, *Phys. Rev. E*, **64**, 056309 (2004).
5. C. HOFFMANN AND **al.**, *Phys. Rev. E*, **72**, 056311 (2005).
6. W. F. LANGFORD AND **al.**, *Phys. Fluids.*, **131**, 776 (1988).
7. A. EZERSKY AND **al.**, *Theor. Comput. Fluid. Dyna.*, **18**, 85-95 (2004).
8. N. ABCHA AND **al.**, *Exp. in Fluids*, DOI 10.1007/s00348-008-0465-9, (2008).
9. N. LATRACHE, *thèse de doctorat.*, Université du Havre (2005).
10. P. BOT & I. MUTABAZI, *Eur Phys.J. B*, **13**, 144-155 (2000).