

Effet tunnel quantique pour des solitons optiques

Yves Pomeau¹ & Martine Le Berre²

¹ Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole normale supérieure,
24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

² Laboratoire de Photophysique Moléculaire, Bat.210, 91405 Orsay, France.

Martine.le-berre@ppm.u-psud.fr

Résumé. En considérant le soliton comme une particule quantique, nous montrons qu'il est possible de prévoir un effet tunnel entre deux fibres couplées, phénomène interdit classiquement dans la limite des faibles couplages. Nous évitons la quantification explicite en nous plaçant dans la limite WKB, où la transmission par effet tunnel se calcule à partir de l'action quantique associée à la trajectoire sous la barrière de potentiel. Pour calculer cette trajectoire, nous ne quantifions pas les deux NLS couplées modélisant la propagation dans les fibres couplées, mais un système d'ODEs dérivées grâce à des fonctions d'essai, qui forment un système Hamiltonien à deux degrés de liberté, où les variables amplitudes et durée du pulse sont conjuguées de la phase, et de sa dérive, respectivement. Nous montrons que la transmission par effet tunnel quantique est possible, éventuellement freinée par la perte de cohérence de la fonction d'onde du soliton.

Abstract. Considering the soliton as a "true" particle, we show that it is possible to predict quantum tunneling between two coupled fibers at low coupling, that is totally forbidden within the classical theory. We get rid of almost any explicit quantization by working in the WKB limit, that allows to express the transmission coefficient in terms of the classical Hamilton-Jacobi action after changes of variables. The trajectory is calculated with a reduced model deduced from the original NLS coupled equations, by using a set of trial functions, leading to an Hamiltonian system of ODE's with two-degrees of freedom. Quantum tunneling is shown to be possible, eventually slowed down if the coherence time of the soliton is shorter than the tunneling time.

1 Introduction

Généralement les solitons dans les fibres optiques se comportent comme des objets classiques (=non quantiques), car ils contiennent un très grand nombre de photons. En linéarisant la solution autour de la solution classique, Certains phénomènes quantiques, liés aux fluctuations du bruit des photons, ont cependant été mis en évidence [3]. Ici nous faisons un pas de plus en considérant le soliton comme une 'vraie' particule, c'est à dire un objet classique que l'on quantifie. L'idée n'est pas nouvelle, en effet la quantification des équations de propagation de champs classiques a été déjà étudiée (voir par exemple la revue [4]), mais le phénomène macroscopique étudié est nouveau, et la méthode est différente de celle employée dans les deux cas précédents. Nous étudions l'effet tunnel sous une barrière de potentiel, lors de la propagation d'un soliton dans un "coupleur directionnel", composé de deux fibres optiques identiques adjacentes. Le problème classique, a été amplement étudié dans le cadre de deux equations NLS couplées linéairement [5]-[6] : il est connu que seul un soliton asymétrique peut se propager et être stable à faible couplage. L'énergie d'un tel soliton est essentiellement dans l'une des fibres, et s'y propage indéfiniment. Donc, pour une énergie donnée, il y a deux états possibles exactement symétriques par permutation des fibres. Dans la version quantique du même problème, les deux solitons fusionnent en un seul état quantique, dont l'amplitude est étalée sur les deux fibres, à cause de la possibilité d'un passage par effet tunnel *quantique* d'une fibre à l'autre.

La méthode employée ici évite la lourdeur mathématique des manipulations d'opérateurs ou d'intégrales de chemin. Nous travaillons dans le cadre de l'approximation WKB, qui a l'avantage de décrire certains phénomènes quantiques comme l'effet tunnel, grâce à un choix particulier de variables issues des équations classiques modifiées. Ces équations sont celles proposées par Malomed et al. [6], qui reproduisent correctement le diagramme de bifurcation des solutions NLS. Leur structure Hamiltonienne

à deux degrés de liberté est relativement simple à quantifier, on en déduit le coefficient de transmission T par effet tunnel, entre les deux états quantiques représentant classiquement la propagation des deux solitons asymétriques d'une fibre dans l'autre. Pour calculer $T = \exp(-2S/\hbar)$, on doit calculer l'action S de la trajectoire hétérocline joignant les deux points d'équilibre, passant sous la barrière de potentiel. C'est un problème standard de mécanique Hamiltonienne [7], appelé version Euclidienne du problème initial, où le potentiel Euclidien est inversé par rapport au potentiel Hamiltonien original. On trouve que le coefficient de transmission dépend algébriquement du couplage entre les deux fibres, et non exponentiellement comme on aurait pu l'attendre. Finalement, on doit passer des équations sans dimensions utilisées dans cette étude, aux variables physiques afin de connaître l'ordre de grandeur des effets, et discuter les applications possibles. Si l'action est très grande devant \hbar , on doit pouvoir observer des phénomènes quantiques tels que l'effet tunnel et éventuellement des interférences entre états quantiques cohérents. Notons que l'action qui est responsable de l'effet tunnel n'est pas l'action totale du champ électromagnétique, dont le terme dominant est proportionnel au nombre moyen de photons N dans le pulse, mais résulte de petites perturbations ajoutées à ce terme dominant, notamment dues à l'effet Kerr, donc proportionnelles au carré de l'intensité, terme en N^2 , et à la dispersion. Nous négligeons les pertes par absorption et les changements de fréquence des photons par effet Raman.

2 Propagation classique

2.1 Equations NLS

Le modèle classique pour la propagation sans dissipation de solitons dans deux fibres couplées est l'ensemble des deux équations *classical* (= non quantiques) de Schrödinger nonlinéaire écrite sous la forme adimensionnelle [5,6] :

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = -\kappa v, \quad (1)$$

et

$$i \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v = -\kappa u, \quad (2)$$

où κ est la force du couplage, $u(z, t)$ et $v(z, t)$ sont les amplitudes complexes des champs électriques supposées lentement variables dans l'approximation paraxiale, z est la variable position sur l'axe optique, et t est le temps dans le référentiel associé à l'enveloppe de l'onde. Bien qu'on les appelle NLS, ces équations ne forment pas un système quantique, mais décrivent un champ purement classique, dont l'action est

$$\mathcal{S}_{\text{NLS}} = \int_{z_1}^{z_2} dz \int dt \left[\frac{i}{2} \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \frac{i}{2} \left(\bar{v} \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} |v|^4 - \frac{\kappa}{2} (u\bar{v} + v\bar{u}) \right]. \quad (3)$$

Les solutions stationnaires de la forme $u(z, t) = U(t)e^{iqz}$ and $v(z, t) = V(t)e^{iqz}$ correspondent à des solitons d'enveloppe indépendante de z , elles ont été étudiées [5] numériquement et analytiquement. Un calcul exact montre la solution "symétrique", $u = v$ est instable pour $q/\kappa \geq 5/3$, la bifurcation vers la solution stable "a-symétrique" étant légèrement sous-critique. Dans les études numériques il faut noter qu'on observe des pertes radiatives, comme dans le cas d'une seule NLS, d'autant plus importantes que la condition initiale est "loin" de l'état stable vers lequel la solution évolue. Nous négligerons ces pertes radiatives dans la suite, notre formalisme ne nous permettant pas de les inclure. Même si elles sont présentes, il a été montré [4] qu'elles ne détruisent pas le soliton de NLS dans sa version quantique.

2.2 Equations réduites

En suivant la méthode générale des extréma de fonctionelles à l'aide de fonctions d'essai, plusieurs auteurs ont simplifié l'étude dynamique des équations (1, 2). La réduction de l'espace des fonctions à celui des fonctions d'essai est évidemment contestable, il est donc nécessaire de vérifier la qualité des

approximations en comparant leurs prédictions aux résultats "exacts", ce qui est fait en détail dans les papiers de Malomed *et al.* [6]. En suivant leur choix justifié, nous posons

$$u(z, t) = a(z)\sqrt{\eta(z)}\operatorname{sech}[\eta(z)t] \cos(\Theta(z))\exp[i(\Phi(z) + \Psi(z) + q(z)t^2)] \quad (4)$$

et l'expression analogue pour $v(z,t)$ où $\cos(\Theta(z)) \rightarrow \sin(\Theta(z))$, et $\Psi(z) \rightarrow -\Psi(z)$. Remplaçant u, v par ces fonctions d'essai dans l'équation (3), et intégrant sur t , on trouve une action "réduite" $\mathcal{S}_r = \int dz \mathcal{L}$. Les équations du mouvement pour les 5 fonctions a, Θ, Ψ, η , and q , sont données dans Uzunov *et al.* [6]. Leurs solutions stationnaires, Fig. 1, sont en bon accord avec celles des équations ((1, 2), en particulier elles reproduisent bien le diagramme de bifurcation sous-critique des solutions symétriques \rightarrow a-symétriques.

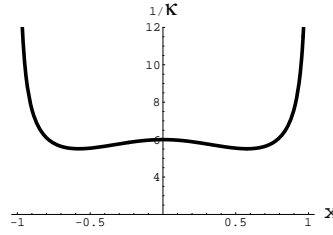


Fig.1. κ^{-1} en fonction des valeurs stationnaires de $x = \cos(2\Theta)$, la solution $x = 0$ est stable pour $1/\kappa < 6$

De plus le système dynamique réduit est un système hamiltonien à deux degrés de liberté, on a la relation $\mathcal{S}_r = \int (\sum_{i=1,2} p_i dq_i - \mathcal{H} dz)$, avec

$$\mathcal{H}_{\text{trial}}^{\text{cl}} = -2\kappa \cos(2\Psi) \sin(2\Theta) + \frac{1}{3}\eta \sin^2(2\Theta) - \frac{2\eta}{3} + \frac{\eta^2}{3} + \frac{\pi^2 q^2}{3\eta^2}. \quad (5)$$

où on a posé $a^2 = 1$. Les deux paires de variables conjuguées sont $\{\Psi, 2x = 2\cos(2\Theta)\}$ et $\{q, y = \frac{\pi^2}{6\eta^2}\}$, c'est-à-dire les différences de phase et d'amplitude, et d'autre part la dérive et la largeur temporelle. Pour obtenir le potentiel, il suffit d'annuler l'impulsion, Ψ, q dans (5), soit $\mathcal{H}_{\text{pot}} = -2\kappa \sin(2\Theta) + \frac{1}{3}\eta \sin^2(2\Theta) - \frac{2\eta}{3} + \frac{\eta^2}{3}$. Les courbes de niveau du potentiel sont représentées Figs.(2) pour 3 valeurs de κ pour montrer la bifurcation de l'état d'équilibre symétrique à fort couplage, ($x = 0, \eta = 1/2$) courbe (a), vers les deux états équivalents a-symétriques à faible couplage, courbe (c). La barrière est évidente sur la Fig. 2c, séparant les deux minima $x \sim \pm 1, \eta \sim 1$ correspondant chacun à un état a-symétrique, l'état instable correspondant au point selle $x = 0, \eta = 1/2$.

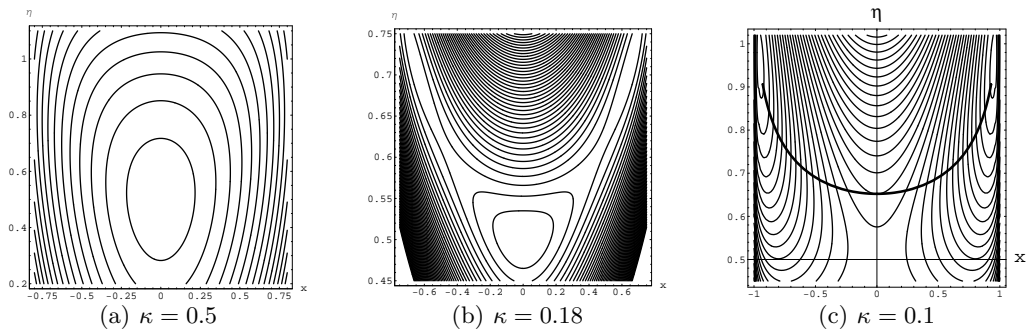


Fig.2. Courbes de niveaux du potentiel \mathcal{H}_{pot} , dans le plan x, η . Le gros trait de (c) représente la trajectoire semi-classique, voir section 3

3 Quantification semi-classique

Nous évitons la quantification des équations NLS, ainsi que des équations réduites, en nous plaçant dans le cadre de l'approximation WKB, où la fonction d'onde s'écrit $\Phi(\vec{x}) \propto \exp(i\frac{S}{\hbar})$, $S = \int \mathbf{p}d\mathbf{q} - Hz$ étant l'action classique de Hamilton-Jacobi où $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ sont les variables conjuguées. Dans un problème tel que le franchissement d'une barrière de potentiel, la phase de Φ devient complexe sous le "tunnel" (comme la composante longitudinale du vecteur d'onde de l'onde de Fresnel dans la description de l'onde évanescente de Fresnel).

3.1 Coefficient de transmission

Le coefficient de transmission par effet tunnel (rapport des intensités sortantes et entrantes) est $T = \exp(-2\mathcal{S}_E/\hbar)$, où l'action abrégée (Euclidienne) $\mathcal{S}_E = \int_{q[0]}^{q[z_f]} p dq$ s'obtient en changeant les impulsions $\mathbf{p} = (\Psi, q)$ en $i\mathbf{p}$ dans l'hamiltonien classique 5. Il devient

$$\mathcal{H}^{\text{qu}} = -2\kappa \cosh(2\Psi) \sin(2\Theta) + \frac{1}{3}\eta \sin 2(2\Theta) - \frac{2\eta}{3} + \frac{\eta^2}{3} - \frac{\pi^2 q^2}{3\eta^2}. \quad (6)$$

On déduit le système dynamique (Euclidien)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = -2\kappa \sinh(2\Psi) \sqrt{1-x^2} \\ \frac{d(2\Psi)}{dz} = \frac{2}{3}\eta x - 2\kappa \cosh(2\Psi) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d\eta}{dz} = 2q\eta \\ \frac{dq}{dz} = 2q^2 + \frac{2}{\pi^2}(\eta^4 - \eta^3 \frac{1+x^2}{2}) \end{cases}$$

permettant de calculer l'action \mathcal{S}_E le long d'une trajectoire quelconque. Le résultat de l'intégration numérique est représenté Figs. 2-c et 3. La trajectoire représentée Fig. 2-c est celle qui relie les deux minima du potentiel classique dans le plan des coordonnées (x, η) , pour $\kappa = 0.1$. On a reporté Fig. 3 l'action le long de ce type de trajectoire, en fonction de κ , ainsi que les valeurs de $\Psi(0)$, et $\eta(0)$. On trouve que l'action obéit à la loi

$$\mathcal{S}_E = 2 \ln(\kappa_c/\kappa) \quad (7)$$

avec une excellente précision sur plusieurs décades.

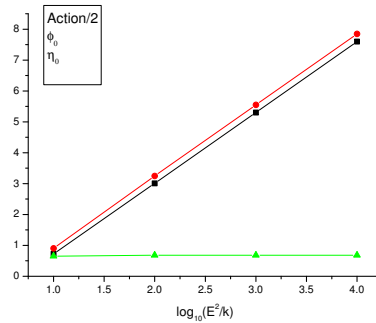


Fig.3. Action (carrés), maximum de l'impulsion $\Phi(0)$ (cercles), et $\eta(0)$ (triangles) en fonction de κ^{-1}

L'action calculée n'est pas l'action physique S qui doit avoir la dimension de \hbar . On a $S = S^1 S_E$, où le coefficient S^1 dépend des propriétés de la fibre et de la lumière [8]. Une estimation [8] basée sur le développement de l'indice de réfraction $n = n_0 + n_2 I$ conduit à la relation $2S^1/\hbar = \gamma/(\omega_0 \tau_0)^3$ où

$$\gamma \sim 10\sigma(\varepsilon_0 c^2 k_0'')^2 / (n_2 \hbar) \quad (8)$$

dépend de l'aire et de l'indice nonlinéaire de la fibre. En prenant $\sigma = 10\mu m^2$, et en considérant deux fibres de silice d'indice (a) $n_2 = 3.10^{-20}$ et (b) 10^{-22} MKS, on trouve que l'action devient de l'ordre de \hbar , ou la transmission d'ordre unité

$$T = exp - \left[\frac{2\gamma}{(\omega_0\tau_0)^3} \ln(\kappa_c/\kappa) \right] = \left(\frac{\kappa}{\kappa_c} \right)^{\frac{2\gamma}{(\omega_0\tau_0)^3}} \quad (9)$$

dès que la durée du pulse est supérieure à la valeur critique dessinée Fig. 4. Dans le cas de la fibre (a), ce régime est atteint dès que la durée du pulse est supérieure à quelques dizaines de fs , ce qui est le cas usuel.

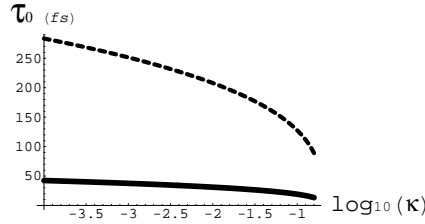


Fig.4. Frontière $S \sim \hbar$ entre les regimes semi-classiques et purement quantiques : trait plein pour le cas (a), pointillé pour (b). τ_0 est la durée du pulse, κ le coefficient de couplage normé.

3.2 Basculement quantique

On utilise les résultats standard de la mécanique quantique : Dans le cas d'un potentiel à double puits, les niveaux de chaque puit sont dédoublés, les états propres étant Φ_S (pair) et Φ_A (impair) par permutation des deux fibres, avec des énergies légèrement différentes, $2A = E_A - E_S$. Les combinaisons $\Phi_G = (\Phi_S - \Phi_A)/\sqrt{2}$, et $\Phi_D = (\Phi_S + \Phi_A)/\sqrt{2}$, sont particulièrement intéressantes car elles correspondent à des états "asymétriques", dont les amplitudes sont majoritairement à gauche et à droite, respectivement. Leur dynamique est $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_S t/\hbar} (\Phi_S + \Phi_A e^{i\omega t})$, ils oscillent donc de droite à gauche avec la période

$$T_{osc} \sim h/2A \quad (10)$$

qu'on peut évaluer en utilisant les résultats connus [7] pour une particule dans un potentiel en 1D [8]. La période spatiale (pour les fibres, le "temps" est la variable z , point sur l'axe optique) des oscillations est représentée Fig. 5, en fonction du couplage κ , pour deux valeurs de τ_0 , correspondant à un régime entièrement quantique (courbe en pointillé), et un régime mixte (courbe pleine). La période spatiale Z est d'autant plus courte que la transmission est élevée. En un point z de la fibre, la probabilité de présence du soliton oscille périodiquement avec une période temporelle $\tau = nZ/c$, qui vaut typiquement $15ns$ à la frontière entre le régime quantique et semi-classique.

4 Conclusion

Alors que la théorie classique interdit le passage du soliton d'une fibre dans l'autre (dans le cas de faible couplage, $\kappa < 0.2$), nous montrons que cela est possible dans des situations expérimentales courantes. Dans le cadre semi-classique, nous pouvons estimer ce temps de passage, qui est typiquement de l'ordre de quelques dizaines de ns . Pour cette étude nous avons supposé que le soliton est un objet cohérent. Nos résultats restent vrais si les temps calculés (temps de passage par effet tunnel, et période τ de basculement entre les deux fibres), sont plus courts que le temps de cohérence du soliton, t_c^{sol} .

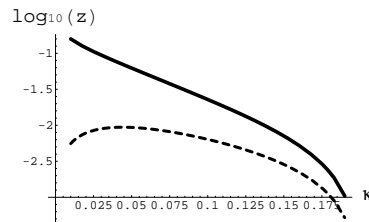


Fig.5. Période spatiale Z en MKS en fonction du couplage κ , pour $\tau_0 = 20fs$ (trait plein) et $50fs$ (pointillé).

On sait que dans le cas contraire, le passage par effet tunnel existe toujours, mais il est ralenti [9], τ devient τ^2/t_c^{sol} . Or il est possible que t_c^{sol} soit très petit, en particulier si on fait l'hypothèse de photons interagissant très faiblement. S'ils perdent leur cohérence par des processus inélastiques (pertes ou effet Raman) sans mémoire (processus de Poisson), le temps de cohérence du soliton est $t_c^{sol} = t_c/N$, où t_c est le temps de cohérence d'un seul photon du pulse, et N le nombre de photons, qui est typiquement égal à $200/\tau_0$, avec τ_0 en *ns*. Sur des échelles de temps beaucoup plus longues que t_c^{sol} , tout effet lié à la cohérence entre états est brouillé, l'état final étant un soliton se trouvant dans l'une ou l'autre fibre avec une probabilité 1/2. Ainsi, même dans une telle situation, les conclusions de notre étude sont radicalement différentes de celles de l'étude classique qui prévoit un soliton localisé dans la fibre initiale avec une probabilité égale à 1.

On peut aussi imaginer de créer des états corrélés entre deux fibres à partir d'un état classique (sans terme hors diagonal de la matrice densité, c'est-à-dire sans corrélation quantique de phase entre les états de chaque fibre), par pompage résonant : en pompant les fibres couplées propageant un tel état, à la fréquence de transition par effet tunnel, soit par des vibrations mécaniques soit par un champ EM extérieur.

Références

1. H. HAKEN, Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Physics Letters A*, **53** (1), 77-78 (1975).
2. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* Gauthier-Vilars, Paris (1899).
3. see for example R. K. LEE, Y. LAI & Y.S. KIVSHAR, Quantum correlations in soliton collisions, *Phys. Rev. A*, **71**, 035801 (2005) and references herein.
4. L. D. FADEEV & V.E. KOREPIN, Quantization of solitons, *Phys. Reports C*, **42**, 270 (1978).
5. N. AKHMEDIEV & A. ANKIEWICZ, Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (16), 2395-2398 (1993) — J.M. SOTO-CRESPO & N. AKHMEDIEV, Stability of the soliton states in a nonlinear fiber coupler, *Phys. Rev. E*, **48** (6), 4710-4715 (1993) — N. AKHMEDIEV & J.M. SOTO-CRESPO, Propagation dynamics of ultrashort pulses in nonlinear fiber couplers, *Phys. Rev. E*, **49** (5), 4519-4529 (1994).
6. B. A. MALOMED, I. M. SKINNER, P. L. CHU & G. D. PENG, Symmetric and asymmetric solitons in twin-core nonlinear optical fibers, *Phys. Rev. E*, **53** (4), 4084-4091 (1996) — I. M. UZUNOV, R. MUSHALL, M. GOLLES, YU. S. KIVSHAR, B. A. MALOMED & F. LEDERER, Pulse switching in nonlinear directional couplers, *Phys. Rev. E*, **51** (3), 2527-2537 (1995).
7. L. LANDAU & E. M. LIFCHITZ, *Mécanique Quantique, Théorie non relativiste*, Ed. Mir, Moscou (1966).
8. Y. POMEAU & M. LE BERRE, Optical solitons as quantum objects, en cours.
9. Y. POMEAU, A. PUMIR, *Journ. de Phys. (Paris)*, **46**, 1797 (1985).