

## Écoulement de Couette plan transitionnel : phénomène critique ou désenchevêtrement homocline ?

Paul Manneville

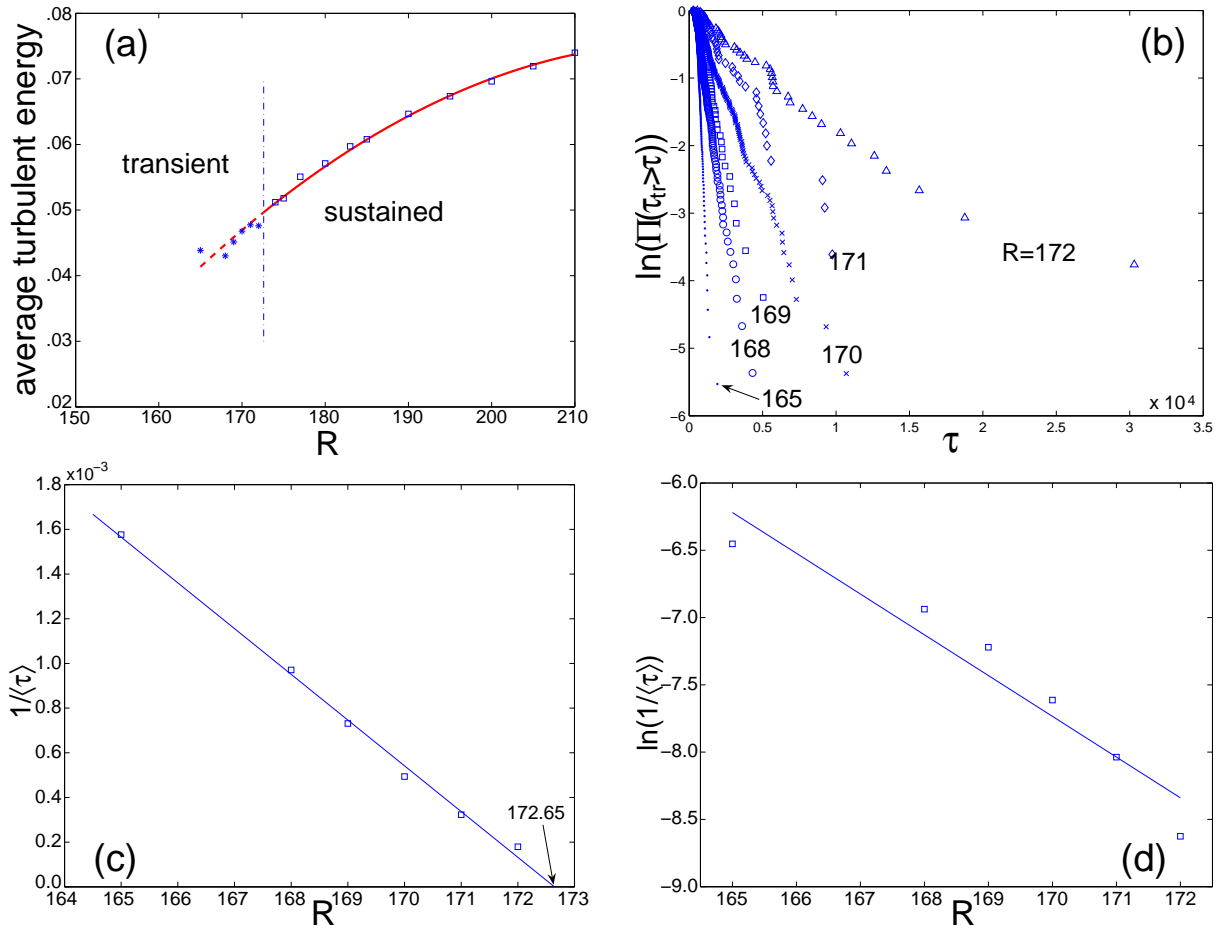
LadHyX (CNRS UMR 7646) École Polytechnique, F-91128 Palaiseau  
paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr

En toute généralité, les bifurcations entre régimes d'écoulement sous-critiques sont marquées par la coexistence d'états et l'hystérésis, la transition d'un régime à l'autre étant contrôlée par des processus de nucléation. L'écoulement de Couette plan (éCp dans la suite), linéairement stable pour tout nombre de Reynolds  $R = U_p h / \nu$ , ( $U_p$  : vitesse des plaques entraînant l'écoulement,  $h$  : demi-distance entre les plaques,  $\nu$  : viscosité cinématique) transite de l'état laminaire *directement* vers la turbulence par nucléation de poches turbulentes qui n'ont qu'une durée de vie finie pour  $R < R_g \simeq 325$  et une probabilité finie ( $< 1$ ) de durer indéfiniment pour  $R > R_g$ . À l'inverse, un écoulement turbulent préparé pour  $R = R_i \gg R_g$  et porté rapidement à une valeur  $R = R_f$  («trempe») plus basse relaxe tout en restant turbulent tant que  $R_f > R_g$  mais relaxe vers l'état laminaire avec probabilité 1 pour  $R_f < R_g$  après un transitoire plus ou moins long. Pour une revue du problème mise dans une perspective plus générale, on pourra consulter [1]. Les expériences de S. Bottin [2] ont montré que, pour des séries de trempes préparées de la même façon, les temps de relaxation suivaient une distribution exponentiellement décroissante,  $\Pi(\tau_{tr} > \tau) \propto \exp(-\tau/\langle\tau_{tr}\rangle)$ , dont le temps caractéristique  $\langle\tau_{tr}\rangle$  est une fonction de  $R$  divergeant en  $R_g$  comme  $1/(R_g - R)$ . La modélisation du phénomène au moyen de réseaux d'itérations couplées par H. Chaté [2] avait montré le même comportement qualitatif mais avec un temps caractéristique divergeant comme  $1/(R_g - R)^2$ <sup>1</sup>.

Suspectant que la modélisation par réseaux d'itérations, dans l'esprit de l'intermittence spatio-temporelle à la Pomeau [3], soit trop idéalisée, j'ai depuis longtemps cherché à développer des modélisations du problème de Couette plus directement reliées aux équations de Navier–Stokes. Partant de l'idée que, dans le régime transitionnel, la structure transverse à l'écoulement était valablement approchée par la combinaison de quelques modes de base dont les amplitudes seraient fonctions du temps et des coordonnées dans le plan de l'écoulement, par une méthode de Galerkin standard j'ai obtenu des systèmes simplifiés mais gardant une structure typiquement hydrodynamique. Dans un premier temps des conditions aux limites non-réalistes de glissement aux parois ('sf' pour 'stress-free') avaient été considérées en raison de la simplicité des calculs auxquels elles conduisaient [4]. Plus récemment l'approche a été étendue au cas des conditions aux limites réalistes de non-glissement ('ns' pour 'no-slip') [5].

La simulation du système d'EDPs ainsi obtenu montre un comportement semi-quantitativement identique à l'expérience. La figure 1(a) présente la moyenne de l'énergie totale contenue dans la perturbation en fonction de  $R$ , en trait plein lorsque la turbulence est considérée comme permanente et en trait tireté lorsqu'elle est transitoire. Elle suggère  $R_g^{ns} \approx 173$  très amélioré par rapport au  $R_g^{sf}$  correspondant, puisque d'un facteur 2 seulement inférieur à la réalité. La déficience résiduelle du modèle ns est imputable à la sous-estimation notable de la dissipation visqueuse autant qu'à celle du transfert d'énergie vers les petites échelles transverses à l'écoulement puisque le développement de Galerkin ne garde que les modes nécessaires à la description du problème à l'ordre le plus bas. Cependant sa simplicité doit permettre une étude plus approfondie du caractère spatio-temporel des transitoires (et accessoirement à d'autres mécanismes où la dépendance fonctionnelle dans le plan de l'écoulement joue un rôle primordial, e.g. le développement des poches turbulentes au voisinage de  $R_g$ ). La figure 1(b) montre la distribution des durées de ces transitoires pour  $R < R_g$ , le choix d'une échelle semi-logarithmique illustrant le caractère exponentiel de la distribution de probabilité. Il y apparaît clairement que la pente diminue à mesure que l'on se rapproche de  $R_g$ . Porter celle-ci fonction de  $R$ , cf. Figure 1(c), suggère fortement qu'elle s'annule pour  $R \approx 172.7$  de sorte qu'au delà la turbulence se maintiendrait indéfiniment (du moins dans des expé-

<sup>1</sup>  $R$  n'est alors pas le nombre de Reynolds mais simplement le paramètre de contrôle du modèle.



**Fig.1.** (a) Diagramme de bifurcation du modèle d'éCp. (b) Distribution des durées de transitoires turbulents pour différentes valeurs de  $R$ . (c,d) Variations de  $1/\langle\tau\rangle$  avec  $R$  supposant un comportement de  $\langle\tau\rangle$  en  $1/(R_g - R)$  ou en  $\exp(\gamma R)$ . Résultats obtenus sur un système de taille  $32 \times 32$ ; conditions aux limites périodiques et schéma pseudo-spectral d'ordre  $\delta t^2$  avec  $dt = 0.01$  et  $dx = dz = 0.25$  [5].

riences de type *trempe* telles que celles considérées dans l'expérience. En fait une ré-analyse récente des expériences de S. Bottin par B. Hof et coll. [10] vise à prouver que le comportement indiqué plus haut était dû à un biais dans le post-traitement masquant le véritable comportement, à savoir une croissance exponentielle indéfinie du temps de relaxation moyen et non une divergence pour une valeur finie  $R_g$ . J'ai porté sur la Figure 1(d) le logarithme de l'inverse de ce temps caractéristique fonction de  $R$ . La régularité de la courbe qui semble plonger vers  $-\infty$  au delà de  $R = 172$  semble exclure la croissance exponentielle postulée et, indirectement, conforter l'analyse initiale de S. Bottin.

La prédiction d'un comportement exponentiel étant faite sur la base d'une analogie avec le problème voisin de la transition de l'écoulement de Poiseuille dans un tube de section circulaire (éPt dans la suite), je concentrerai le reste de cette présentation sur une discussion des résultats obtenus dans ce cas, une comparaison avec le cas de l'éCp, et la conjecture qui oriente mon travail actuel.

Les analogies entre éPt et éCp sont en effet très fortes puisque l'éPt est lui aussi stable vis à vis de perturbations infinitésimales pour tout nombre de Reynolds [6] et ne transite vers la turbulence que sous l'effet de perturbations localisées d'amplitude finie. À première vue, il paraît même plus facile à réaliser que les écoulements de Couette ou de Poiseuille plans idéaux (c'est-à-dire sans effets de bord parasites). Dès la fin du XIXème siècle, Reynolds lui-même [7] avait observé la transition entre un régime

d'écoulement régulier et un régime qu'il avait qualifié de *sinueux*, ainsi que l'hystérésis à transition. Tout le monde est à peu près d'accord sur le fait que, dans la partie haute de plage de valeurs de  $R$ ,<sup>2</sup>  $R \in [1750, 2500]$ , où se produit la transition on observe de *bouchons turbulents* ("turbulent slugs") alors que dans la partie basse, ce sont plutôt des *bouffées turbulentes* ("turbulent puffs"). La principale différence entre les deux tient à ce que les premiers ressemblent plus à un objet matériel qui, s'allongeant tout en étant transporté par l'écoulement moyen, entraînent du fluide aussi bien à leur tête qu'à leur queue alors que les seconds, à plus bas  $R$ , se comportent plutôt comme des ondes traversant le fluide, incorporant du fluide à leur tête et le reperdant à leur queue (voir par exemple [8] et références citées).

Je m'intéresserai ici à la partie basse de la plage transitionnelle qui correspond à la première introduction de phénomènes chaotiques dans l'écoulement et qui a récemment fait l'objet de débats polémiques en particulier en raison de l'affirmation un peu provocante de Hof et coll. [10] qui terminent leur article en indiquant que voir relaxer une bouffée turbulente à  $R = 2400$  dans un tuyau d'arrosage nécessiterait 5 ans d'observation et une longueur de tuyau de 40000 km. Cette conclusion résulte de l'extrapolation (exponentielle) de leur statistique des temps de relaxation de bouffées turbulentes, statistique réalisée sur un système de taille inégale auparavant réalisant un écoulement gravitaire qui maintient une différence de pression constante entre les deux extrémités du tube (horizontal), donc à gradient de pression imposé. D'autres expériences réalisées par Peixhino & Mullin concluent à un l'existence d'un seuil  $R_g$  au delà de laquelle une bouffée turbulente qui a réussi à ce développer suffisamment (ce qui n'est pas le cas de toutes) persiste indéfiniment. Ces expériences diffèrent des précédentes car, un piston étant tiré à vitesse constante dans le tube, elle correspondent clairement à une expérience à débit constant. Sur le plan numérique, plusieurs expériences de simulation directe des équations de Navier–Stokes conduisent également à des résultats contradictoires. Ainsi, Hof et coll. [10] récidivent en décrivant comportement exponentiel des temps de relaxation par des simulations sur un système de longueur  $\ell = 5d$  mais, dans des conditions qui sont sans doute plus représentatives de véritables bouffées ( $\ell = 50d$  à comparer à la longueur d'une bouffée typique  $\sim 20d$ ), Willis & Kerswell [11] obtiennent un comportement critique en  $1/(R_g - R)$  avec  $R_g \approx 1870$  en bon accord avec les résultats de Peixhino & Mullin [9].

Le moment est ainsi venu de reprendre les termes du titre de cette contribution. En effet, pour Hof *et al.* (2006) [10], le comportement exponentiel qui devrait être observé, aussi bien pour l'éCp que l'éPt, est lié à la présence de solutions périodiques instables et à l'enchevêtrement homocline qui résulte des intersections entre variétés stables et instables de ces solutions particulières selon la théorie classique des transitoires turbulents en théorie des systèmes dynamiques [12]. Pour l'éPt, ces solutions particulières ont été effectivement vues de façon fugace au cours de l'évolution et peuvent être mises en évidence numériquement [13]. Leur existence est également connue pour l'éCp [14] mais inobservées et probablement inobservables au laboratoire. Aux nombres de Reynolds correspondant à la plage transitionnelle considérée, il peut sembler assez légitime de rester dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté car, dans cette plage, la cohérence est encore forte et même si l'on peut voir apparaître certaines structures que l'on peut juger à petite échelle, il est admissible de les considérer comme des harmoniques esclaves des plus grandes structures. Cependant, la prédiction d'un comportement exponentiel indéfini repose sur l'hypothèse que rien ne viendra perturber l'existence de la structure homocline et donc qu'aucune bifurcation globale autre que celle qui lui a donné naissance ne se produira. Il existe cependant de nombreux exemples simples du contraire. Ainsi, le modèle de Hénon ( $X_{k+1} = 1 - aX_k^2 + bY_k$ ,  $Y_{k+1} = X_k$ ) possède un attracteur chaotique pour  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  et un attracteur périodique pour  $a = 1.3$ ,  $b = 0.3$  apparaissant par une crise liée à une bifurcation globale qui voit la variété portant l'attracteur de Hénon "picorée" par le bassin d'attraction de la solution périodique. On peut également construire des systèmes simples pour lesquels un comportement critique est observable au voisinage du point de crise. La prédiction du comportement critique n'est pas toujours aussi facile que pour l'application unidimensionnelle en accent circonflexe  $X_{k+1} = 2r|X_k|$  au voisinage de  $r = 1$  pour lequel on trouve que le temps de vie moyen diverge en  $1/(r - 1)$  mais des exemples existent [12,15]. Selon moi, le comportement exponentiel décrit par Hof et coll. [10] n'est pas générique mais peut être spécifique

<sup>2</sup>  $R = \overline{U}d/\nu$  avec  $\overline{U}$  : vitesse moyenne de l'écoulement, i.e. débit volumique/surface de section,  $d$  : diamètre du tube,  $\nu$  : viscosité cinématique.

à la façon particulière de réaliser l'éPt car Willis & Kerswell [11] ont montré l'extrême sensibilité de la solution à la forme et à l'amplitude des perturbations. D'autre part, le fait que ces derniers ne retrouvent pas le comportement annoncé lorsque la longueur du domaine est grande ( $\sim 2,5$  fois la longueur d'une bouffée typique) montre qu'il faut sans doute prendre en compte le caractère déjà spatio-temporel de la relaxation des transitoires et que les prédictions faites sur la base de domaines trop courts (ici  $1/4$  de longueur de bouffée), donc dans un cadre strictement temporel, sont de moindre valeur.

C'est la raison pour laquelle je considère que ce que j'ai présenté dans la figure 1 est encore très préliminaire. Je privilégie actuellement l'étude des propriétés statistiques de la relaxation de la turbulence dans des systèmes très étendus, car il apparaît que la transition se produit par effondrement local de régions turbulentes. Les idées de Pomeau [3] sur l'intermittence spatio-temporelle retrouverait ainsi à s'appliquer de nouveau mais plus solidement ancrées sur l'hydrodynamique. Cela suggère aussi de chercher à dériver un modèle quasi-unidimensionnel d'éPt qui fasse le pendant du modèle quasi-bidimensionnel d'écP et permette d'étudier la relaxation de la turbulence sans être gêné par les effets de taille ou de temps de simulation.

## Références

1. P. MANNEVILLE, *Instabilités, chaos et turbulence* (Éd. École Polytechnique, 2004), Chap. 6, et plus particulièrement § 6.3.4.
2. S. BOTTIN & H. CHATÉ, *Eur. Phys. J. B*, **6**, 143–155 (1998).
3. Y. POMEAU, *Physica D*, **23**, 3–11 (1986).
4. P. MANNEVILLE, dans *Rencontres du Non-Linéaire 2000*, Y. Pomeau & R. Ribotta, eds. (Paris Onze Éditions, Orsay) pp. 123–128 — P. MANNEVILLE & F. LOCHER, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **328** Serie IIb, 159–164 (2000).
5. M. LAGHA & P. MANNEVILLE, *Eur. Phys. J. B*, soumis, — M. LAGHA, Thèse École Polytechnique, Déc. 2006.
6. H. SALWEN, F.W. COTTON & C.E. GROSCH, *J. Fluid Mech.*, **98**, 273–284 (1980) et références citées.
7. O. REYNOLDS, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **174**, 935–982 (1883).
8. H. SHAN, B. MA, Z. ZHANG & F.T.M. NIEUWSTADT, *J. Fluid Mech.*, **387**, 39–60 (1999).
9. J. PEIXINHO & T. MULLIN, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 094501 (2006).
10. B. HOF *et al.*, *Nature*, **443**, 59–62 (2006).
11. A. P. WALLIS & R. R. KERSWELL, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 014501 (2007).
12. T. TÉL, “Transient chaos” dans Hao Bai-lin, *Directions in Chaos*, vol. 3 (World Scientific, 1990).
13. B. HOF, C. W. H. VAN DOORNE, J. WESTERWEEL, F. T. M. NIEUWSTADT, H. FAISST, B. ECKHARDT, K. WEDIN, R. R. KERSWELL & F. WALEFFE, *Science*, **305**, 1594–1598 (2004).
14. H. FAISST & B. ECKHARDT, “Dynamical systems and the transition to turbulence”, dans T. Mullin & R.R. Kerswell *IUTAM symposium on Laminar–Turbulent Transition and Finite Amplitude Solutions* Springer (2005).
15. C. GREBOGI, E. OTT & J.A. YORKE, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1284–1287 (1986).