

# Influence d'un gradient de température dans le système de Couette-Taylor

V. Lepiller, R. Guillermin, A. Prigent, & I. Mutabazi

LMPG, Université du Havre, 53 rue de Prony, BP 540, 76058 Le Havre cedex  
[valerie.lepillier@univ-lehavre.fr](mailto:valerie.lepillier@univ-lehavre.fr)

**Résumé.** Cette étude expérimentale porte sur le couplage des instabilités hydrodynamiques et thermiques dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient de température. Un liquide est confiné entre deux cylindres coaxiaux verticaux maintenus à des températures différentes. Le rapport d'aspect est de 114 et le rapport des rayons est de 0,8. Les paramètres de contrôle physiques sont le nombre de Grashof lié à l'écart de température et le nombre de Taylor lié à la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Le nombre de Grashof est fixé et le nombre de Taylor est augmenté progressivement. A partir d'une valeur critique du nombre de Taylor, cet écoulement de base se déstabilise et un écoulement spiralé apparaît dans le système. Pour  $Gr < 1165$ , le motif est présent dans la partie inférieure du système et sa taille augmente avec le nombre de Taylor. Pour  $Gr > 1165$ , le motif spiralé apparaît au centre et remplit la quasi totalité du système. Dès le seuil, le motif possède une modulation basse fréquence de son amplitude.

**Abstract.** We investigate experimentally the influence of a radial temperature gradient in a vertical rotating cylindrical annulus. The geometrical parameters are fixed with aspect ratio and radii ratio respectively equal to 114 and 0.8. The physical parameters are the Grashof number related to the radial temperature gradient and the Taylor number related to the angular velocity. After imposing a Grashof number, the convection cell is destabilized by inertial forces due to the increasing of the rotation of the inner cylinder. Above a critical value of the control parameter, the Taylor number, a spiral pattern occurs giving rise to a finite extent propagating pattern. For  $Gr < 1165$ , the pattern occurs at the bottom of the system and for  $Gr > 1165$ , the pattern occurs in the middle of the system with a modulation.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons aux effets induits par un gradient radial de température sur les modes d'instabilité du système de Couette-Taylor avec seul le cylindre intérieur en rotation. Ce type de configurations est rencontré dans de nombreuses applications industrielles comme les systèmes de refroidissement des machines tournantes ou des composants électroniques [1]. Il est également présent dans des modèles géophysiques expliquant la circulation de fluides dans le manteau supérieur ou dans l'atmosphère [2]. La stabilité d'un fluide confiné entre deux cylindres coaxiaux verticaux avec un gradient radial de température a fait l'objet de nombreuses études numériques, théoriques et expérimentales [3,4,5]. Des études théoriques et numériques [6,7] se sont intéressées à l'ajout de la rotation pour mieux comprendre le couplage entre la force centrifuge et le couple de forces induit par la stratification radiale de la masse volumique. Toutefois, peu d'études expérimentales [8,9,10] se sont intéressées au problème du système de Couette-Taylor couplé avec un gradient de température. Ces études se sont limitées à une visualisation de l'écoulement et peu de données quantitatives en ont été extraites. Dans ce qui suit nous décrirons ces différents motifs observés et en déduirons les propriétés de l'écoulement en fonction de deux paramètres de contrôle, le nombre de Taylor  $Ta$ , lié à la vitesse de rotation du cylindre intérieur et le nombre de Grashof  $Gr$ , lié au gradient radial de température. Le nombre de Taylor  $Ta = \Omega ad/\nu\sqrt{d/a}$  est défini comme le rapport du temps caractéristique de diffusion visqueuse  $\tau_\nu = d^2/\nu$  sur le temps caractéristique de diffusion centrifuge  $\tau_c = 1/\Omega\sqrt{d/a}$ . Le nombre de Grashof  $Gr = g\alpha\Delta T d^3/\nu^2$  est défini comme le rapport du temps caractéristique de diffusion visqueuse  $\tau_\nu$  au carré sur le temps de la poussée d'Archimède au carré  $\tau_A^2 = (g\alpha\Delta T d)/\nu$ . Snyder et Karlsson [8] ont observé un motif spiralé suite à l'ajout d'un

gradient radial de température. Leur gamme de nombres de Grashof est peu étendue s'étalant de -365 à 365.

## 2 Dispositif expérimental

Le système se compose de trois cylindres coaxiaux verticaux de même longueur  $H = 57$  cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon  $a = 2$  cm, un cylindre extérieur en verre transparent de rayon  $b = 2,5$  cm et un cylindre d'isolation en verre transparent de rayon  $c = 5$  cm (Fig. 1). Le liquide étudié, l'eau déminéralisée, se trouve confiné dans l'espace entre les deux premiers cylindres dont la distance est  $d = b - a = 0,5$  cm. Ainsi le rapport d'aspect est  $\Gamma = H/d = 114$  et le rapport des rayons est  $\eta = a/b = 0,8$ . Le cylindre intérieur et l'espace compris entre les cylindres extérieur et d'isolation peuvent être maintenus à des températures différentes respectivement  $T_1$  et  $T_2$  grâce à deux circulations d'eau provenant de deux cryo-thermostats. Un gradient radial de température  $\delta T = \mu * (T_1 - T_2) = \mu * \Delta T$  est ainsi créé dans l'entrefer, où le coefficient  $\mu$  dépend de la conductivité des matériaux des cylindres et de l'eau. Dans notre expérience,  $\mu$  vaut 0,61. Afin de visualiser l'écoulement, on ajoute 2 % de Kalliroscope AQ-1000 [11], qui est une suspension de 1-2 % de plaquettes réfléchissantes de dimensions  $30 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m} \times 0,07 \mu\text{m}$ . Deux miroirs plans entourent le dispositif expérimental pour permettre une visualisation complète de l'écoulement dont nous enregistrons une hauteur de 32 cm à l'aide d'une caméra 2D [12,13]. Un faisceau monochromatique issu du laser He-Ne ( $\lambda = 638$  nm) est transformé par une lentille cylindrique en une nappe plane verticale perpendiculaire à l'axe des cylindres. L'intersection de cette nappe avec l'entrefer permet de visualiser une section droite verticale de l'écoulement. Une caméra CCD linéaire de 2048 pixels enregistre, à intervalles de temps réguliers, un signal de distribution de l'intensité lumineuse le long d'une ligne verticale de la section. Le signal est représenté sous forme de 256 niveaux de gris. Les lignes ainsi enregistrées sont disposées les unes à la suite des autres et forment un diagramme spatio-temporel (Fig. 2).

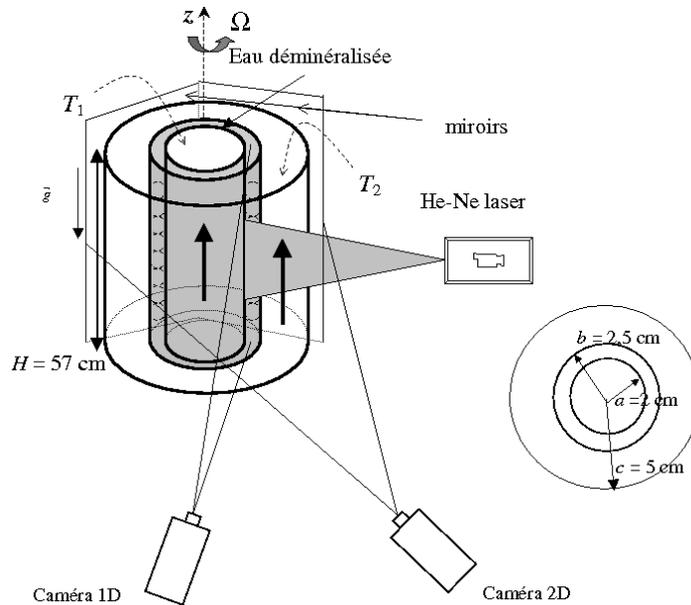
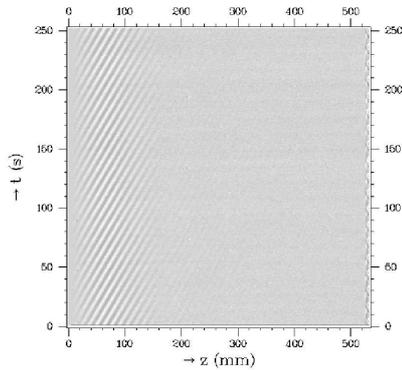
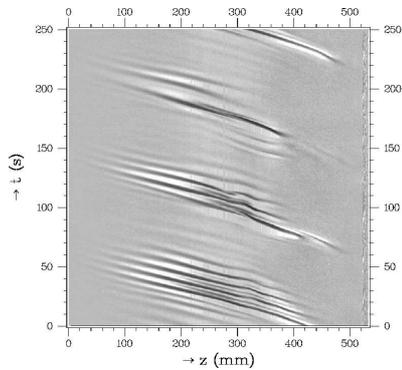


Fig.1. Schéma du dispositif expérimental.

(a)  $Ta_c = 28$  et  $Gr = -500$ (b)  $Ta_c = 12.5$  et  $Gr = 4350$ **Fig.2.** Diagrammes spatio-temporels du motif.(a)  $Ta_c = 28$  et  $Gr = -500$  (b)  $Ta_c = 12.5$  et  $Gr = 4350$ **Fig.3.** Photos du motif.

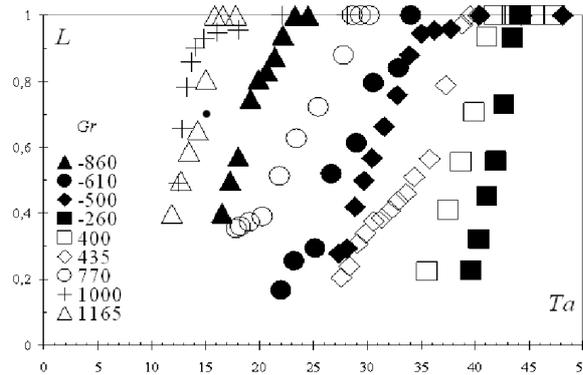
### 3 Protocole expérimental

Nous étudions le mécanisme de déstabilisation de l'écoulement de base faisant intervenir la stratification radiale du moment cinétique et de la masse volumique. Dans cette perspective, nous imposons au départ la même température aux deux bains thermostatés. Puis, nous créons un écart radial de température constant avec une température du cylindre extérieur  $T_2 = 30$  °C. Nous augmentons progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Près du seuil du motif, cette vitesse est augmentée par pas de 1 mHz. Ainsi seul un paramètre de contrôle, le nombre de Taylor, varie tandis que le nombre de Grashof est fixé.

## 4 Résultats

### 4.1 $Gr < 1165$

Deux types de motifs ont été observés en fonction de l'écart de température. Lorsque nous appliquons un faible nombre de Grashof  $Gr < 1165$ , un motif spiralé apparaît dans la partie inférieure du système à partir d'une valeur critique du nombre de Taylor. Aucun rouleau d'Eckman n'a été observé aux bords inférieur et supérieur du système. Les figures 2 et 3(a) correspondent respectivement à un diagramme spatio-temporel et à une photo représentant le motif (un quart de la circonférence du système) pour  $Gr = -500$  et  $Ta_c = 28$ . L'écoulement axial de la cellule de convection générée par la différence de température supprime la stationnarité des rouleaux de Taylor, première instabilité dans le cas isotherme. La taille du motif augmente avec le nombre de Taylor jusqu'à atteindre la taille du système. La figure 4 représente la taille du motif adimensionnée par la hauteur du système pour différents nombres de Grashof.



**Fig.4.** Variation de la taille du motif adimensionnée avec la taille du système en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Grashof.

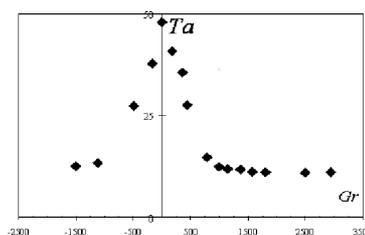
#### 4.2 $Gr > 1165$

Pour des nombres de Grashof plus élevés, le motif apparaissant au seuil se compose d'une spirale modulée présente déjà dans la quasi totalité du système. Une petite augmentation du nombre de Taylor suffit à provoquer le remplissage du motif dans toute la cavité annulaire. Les figures 2 et 3(b) représentent un diagramme spatio-temporel et une photo représentant le motif (un quart de la circonférence du système) pour  $Gr = 4350$  et  $Ta_c = 12, 5$ .

#### 4.3 Caractéristiques des motifs

La figure 5 représente la variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Grashof. On constate une diminution de  $Ta_c$  puis une stagnation pour les grands nombres de Grashof. Cette différence de comportement du nombre de Taylor correspond aux deux motifs rencontrés au seuil.

Dans les deux situations observées, nous avons constaté que le sens de propagation de la spirale dépend uniquement du nombre de Grashof, c'est-à-dire du gradient radial de température. Par contre, le sens d'inclinaison de la spirale par rapport à l'horizontale dépend du signe du produit entre le nombre de Grashof et le nombre de Taylor [7].



**Fig.5.** Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Grashof.

Pour de faibles nombres de Grashof, le motif est caractérisé par une seule et unique fréquence et un seul nombre d'onde.

Pour les nombres de Grashof élevés, le motif devient modulé dans le temps. Sur les spectres de puissance temporels, une basse fréquence apparaît. La figure 6 représente la variation de la fréquence en fonction de Taylor pour différents nombres de Grashof. Nous avons observé l'augmentation de la fréquence de modulation  $f_{mod}$  avec le nombre de Taylor suivant la relation :  $f_{mod} = 0,0365Ta - 0,0601$ .

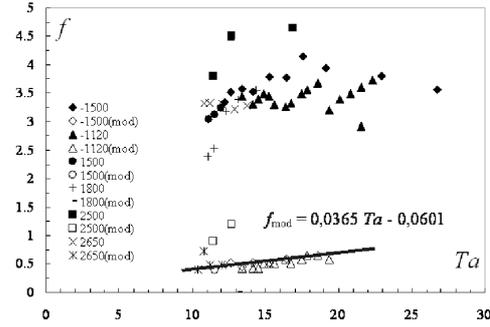


Fig.6. Variation de la fréquence du motif en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Grashof.

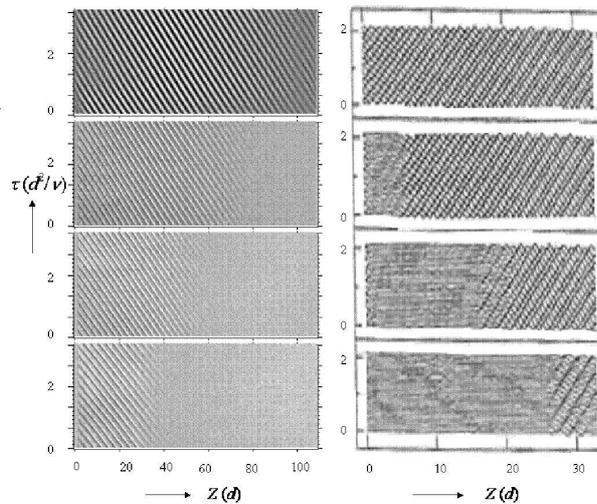
## 5 Discussion

Le système étudié peut être rapproché du système de Couette-Taylor avec écoulement axial. En effet, l'ajout d'un gradient radial de température induit l'apparition d'un écoulement axial : ascendant le long de la paroi chauffée et descendant le long de la paroi refroidie. Dans le cas d'un système de Couette-Taylor avec écoulement axial, la première instabilité est axisymétrique sous forme de rouleaux de Taylor propagatifs. Babcock [14] a observé un motif de rouleaux de Taylor propagatifs près de la sortie et a supposé que l'entrée est génératrice de bruit. Or nous avons observé expérimentalement la présence d'un motif très proche du leur dans la partie inférieure du système. Les diagrammes spatio-temporels (Fig.7) représentent la croissance du motif spiralé, obtenu pour un nombre de Grashof  $Gr = 770$ , le long de la direction axiale pour différentes valeurs du paramètre de contrôle  $\epsilon$ .  $\epsilon$  correspond au nombre de Taylor réduit, écrit comme  $\epsilon = \Omega - \Omega_c / \Omega_c$ , où  $\Omega_c$  représente la vitesse de rotation du cylindre intérieur pour la première instabilité dans le cas isotherme. La taille du motif augmente avec  $\epsilon$ . Ainsi ces comportements sont similaires à ceux rencontrés dans l'écoulement de Couette-Taylor axial par Babcock [14]. Ils en ont déduit que lorsque la taille du motif croît, l'instabilité est de nature convective. Le motif devient absolument instable lorsqu'il est présent dans tout le dispositif.

Pour des écarts de températures plus élevés, l'écoulement axial généré ne peut plus être considéré comme un bruit. L'écoulement de base se compose à la fois d'un écoulement de Couette circulaire et d'un écoulement barocline :  $\mathbf{V}_b = V_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + W(r)\mathbf{e}_z$ . La stabilité des écoulements centrifuges peut être en général expliquée par le critère de stabilité de Rayleigh, basé sur le déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression centripète égal et opposé dans un écoulement non visqueux. On peut généraliser le critère de Rayleigh aux écoulements centrifuges avec un gradient radial de température en ajoutant une partie thermique  $\Phi_{th}$  au discriminant de Rayleigh  $\Phi_0(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} [rv(r)]^2$  qui mesure la stratification du moment cinétique dans la direction radiale. Le discriminant thermique s'écrit sous la forme :  $\Phi_{th} = -\alpha(T(r) - T_0)\Phi_0(r) - \alpha \frac{dT}{dr} \frac{V^2}{r}$ . L'étude du signe permet de déterminer la stabilité du système. Le discriminant généralisé avec une très faible contribution thermique est négatif. La force centrifuge domine le gradient de pression et éloigne la particule de sa position d'équilibre, l'écoulement est déstabilisé.

## 6 Conclusion

Nous avons montré que lorsqu'un gradient radial de température est appliqué à l'écoulement circulaire de Couette, l'écoulement laminaire de base se déstabilise. Des vortex spiralés apparaissent près du bord inférieur du dispositif via une bifurcation supercritique pour  $Gr < 1165$ . Ce type de comportement est analogue au système de Couette Taylor avec un faible écoulement axial. Pour  $Gr > 1165$ , des vortex apparaissent dans presque tout le dispositif via une bifurcation sous-critique.



**Fig.7.** A gauche : Diagrammes spatio-temporels obtenus pour  $Gr = 770$  et  $\epsilon = -0,61$ ;  $\epsilon = -0,53$ ;  $\epsilon = -0,46$ ;  $\epsilon = -0,37$ . A droite : Diagrammes spatio-temporels obtenus dans l'étude de Couette-Taylor avec écoulement axial.

## Références

1. F. KREITH, *Convection Heat Transfer in Rotating Systems*, in *Advances in Heat Transfer* 5, Academic Press New-York, pp. 129-251, (1968).
2. M. AUER, F.H. BUSSE & E. GANGLER, Instabilities of flows between differentially rotating coaxial cylinders in the presence of a radial temperature gradient, *Eur. J. Mechanics B*, **15**, 605 (1996).
3. I.G. CHOI & S.A. KORPELA, Stability of conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus, *J. Fluid Mech.*, **99**, 725-738 (1980).
4. A. BAHLOUL, I. MUTABAZI & A. AMBARI, Codimension 2 points in the flow inside a cylindrical annulus with a radial temperature gradient, *Eur. Phys. J. AP*, **9**, 253-264 (2000).
5. V. LEPILLER, A. PRIGENT, F. DUMOUCHEL & I. MUTABAZI, Convection naturelle dans un anneau cylindrique vertical, *Compte-rendus de la 7ème rencontre du Non-Linéaire Paris*, 167-172 (2004).
6. K.S. BALL & B. FAROUK, Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with buoyancy effects, *J. Fluid Mech.*, **197**, 479-501 (1988).
7. P.D. WEIDMAN & M.E. ALI, On the stability of circular Couette flow with radial heating, *J. Fluid Mech.*, **220**, 53 (1990).
8. H.A. SNYDER & S.K.F. KARLSSON, Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Phys. Fluids*, **7**, 1696-1706 (1964).
9. K.S. BALL, B. FAROUK & V.C DIXIT, An experimental study of heat transfer in a vertical annulus with a rotating inner cylinder, *J. Heat Mass Transfer*, **32**, 1517-1526 (1989).
10. M.M. SOROUR & J.E.R. CONEY, The effect of temperature gradient on the stability of flow between vertical concentric, rotating cylinders, *J. Mech. Eng. Science*, **21**, 403-409 (1979).
11. M.A. DOMINGUEZ-LERMA, G. AHLERS & D.S. CANNELL, Effects of 'kalliroscope' flow visualization particles on rotating Couette-Taylor flow, *Phys. Fluids*, **28**, 1204-1206 (1985).
12. A. PRIGENT & O. DAUCHOT, Visualization of a Taylor-Couette flow avoiding parasitic reflections, *Physics of Fluids*, **12**, 2688-2690 (2000).
13. H. LITSCHKE & K.G. ROESNER, New experimental methods for turbulent spots and turbulent spirals in the Taylor-Couette flow, *Exp. Fluids*, **24**, 201 (1998).
14. K.L. BABCOCK, G. AHLERS & D.S. CANNELL, Noise-sustained structure in Taylor-Couette flow with through flow, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3392-3395 (1991).