

Reconstruction phénoménologique de systèmes complexes forcés

Delphine Lejri & Jean-Marc Malamsoma

Laboratoire Géomatériaux DGCB-URA CNRS 1652
 ENTPE, rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin cedex
 lejri@entpe.fr

Résumé. La modélisation phénoménologique de systèmes dynamiques complexes a pour but de reconstruire la dynamique d'un système, à partir d'une série chronologique chaotique scalaire. Smirnov et Bezruchkov ont proposé en 2001 une méthode adaptée aux systèmes non autonomes, que nous avons mis en oeuvre pour une série issue du système d'Ondaçuhu et al., comprenant un terme de forçage périodique ou quasi-périodique. D'autre part, la méthode a été éprouvée vis-à-vis de la coexistence d'attracteurs chaotiques.

Abstract. Different methods of global nonlinear modeling have been developed for last two decades. Smirnov and Bezruchkov suggested in 2001 an approach to reconstructing the dynamic of nonautonomous systems. We applied this method to scalar time series coming from Ondaçuhu and al.'s system. We obtained ordinary differential equations that successfully describe the harmonically and the quasi-periodically driven systems. Moreover, we observed the efficiency of this approach when it comes to coexistence of chaotic attractors.

1 Présentation de la méthode de reconstruction de systèmes non autonomes

La modélisation phénoménologique de systèmes dynamiques complexes est un sujet de recherche qui suscite toujours beaucoup d'intérêt. Elle a pour but de reconstruire la dynamique d'un système, à partir de l'analyse d'une série chronologique chaotique scalaire, à laquelle on a souvent accès par la mesure, dans des domaines scientifiques très variés.

Pour pouvoir mettre en oeuvre ces techniques, cette série doit avant tout subir un prétraitement, qui consiste essentiellement à plonger la série scalaire dans un espace de dimension D , après un éventuel débruitage. Cet espace dit « de plongement », a une dimension, telle qu'il peut contenir la dynamique complexe du système étudié [1], ainsi caractérisée par D variables obtenues à partir des dérivées successives de la série ou grâce aux décalages. Nous nous placerons ici, dans le système de coordonnées dérivées qui est plus adapté à la reconstruction de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Les systèmes non autonomes sont caractérisés par la présence explicite du temps au sein des équations. L'approche classique pour ce type de systèmes consiste à s'affranchir de cette dépendance explicite en temps, afin de se ramener à un système autonome. Ceci conduit nécessairement à augmenter le nombre d'équations du système, ce qui en terme de reconstruction revient à un nombre de variables D plus grand. En pratique, augmenter la dimension D n'est pas souhaitable, car cela génère des erreurs supplémentaires (dérivation, bruit) et aussi augmente la complexité du modèle à déterminer. C'est pourquoi, il est préférable de conserver une dimension D et se rapprocher du cas de la reconstruction de système autonome, qui peut-être décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 \\ \dot{s}_2 = s_3 \\ \dot{s}_3 = s_4 \\ \vdots \\ \dot{s}_D = \mathcal{F}(s_1, s_2, \dots, s_D) \end{cases} \quad (1)$$

où s_1 est une observable et $s_2 \dots s_D$, les dérivées successives de s_1 .

Les techniques de reconstruction consistent alors à déterminer la fonction \mathcal{F} , en projetant le vecteur \dot{s}_D sur une base de fonctions des vecteurs $(s_1 \dots s_D)$. Cette projection peut se faire sur une base de polynômes, de fractions rationnelles, d'exponentielles ou autres. Nous nous placerons dans le cas où \mathcal{F} est une base de polynômes de degré M et la projection sur la base de polynômes se fait à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt Modifiée [2].

Smirnov et Bezruchkov [3] ont proposé en 2001 une méthode adaptée aux systèmes non autonomes. L'idée consiste alors à projeter la série dérivée \dot{s}_D sur une base étendue, qui permettrait d'inclure dans la fonction \mathcal{F} , la dépendance explicite en temps, due à la présence du terme de forçage. Dans un premier temps, on se propose par exemple de décomposer chaque terme de la fonction \mathcal{F} en 3 termes : un terme constant, un terme en $\cos \omega t$, et un terme en $\sin \omega t$, ce qui permet de traiter les systèmes avec un terme de forçage périodique.

Cette méthode a l'avantage d'être assez facile à mettre en oeuvre à partir du cas autonome. Par contre, elle a pour inconvénient d'introduire une voire plusieurs inconnues supplémentaires : la (ou les) pulsation(s) du terme de forçage.

Détermination de la pulsation

Supposons que l'on n'ait à priori aucun renseignement sur la nature fréquentielle de ce terme de forçage. La série étudiée est une série chaotique, au contenu fréquentiel complexe. Ainsi, les techniques classiques d'analyse spectrale, telles que le spectre de Fourier, ne sont pas pertinentes.

En effet, si on prend l'exemple du spectre présenté sur la figure(1), on est incapable d'isoler la fréquence associée au terme de forçage parmi les fréquences qui caractérisent l'attracteur chaotique. Toutefois, ce spectre nous indique un ensemble de valeurs que l'on peut envisager de tester. Faute de mieux, la détermination de la pulsation se fait donc à postériori. Ainsi, on effectue la reconstruction pour différentes valeurs de ω susceptibles de convenir. On quantifie alors la qualité de chacun des modèles obtenus, afin de pouvoir sélectionner la pulsation qui conduit à la meilleure approximation du système.

Le critère de comparaison des modèles obtenus s'appuie sur l'erreur commise en estimant la série dérivée à l'aide des polynômes de la base qui ont été sélectionnés par la méthode. Ainsi, l'erreur commise au sens des moindres carrés, a pour expression :

$$\epsilon(\omega) = \sqrt{\frac{1}{L-T} \sum_{i=1}^L [s_D(i) - \tilde{\mathcal{F}}_\omega(s_1(i), s_2(i), \dots, s_D(i))]^2}$$

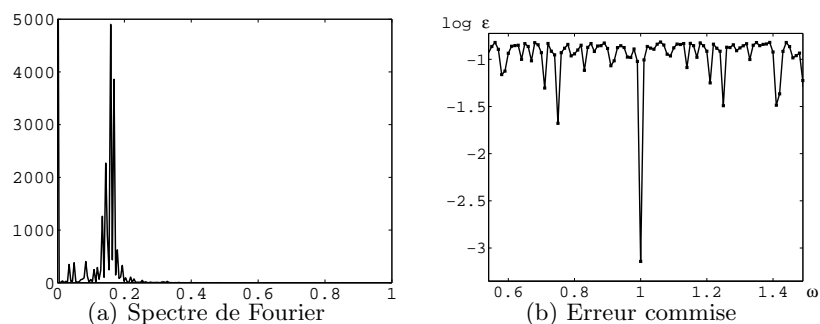


Fig.1. Détermination de la pulsation

2 Application au cas du système issu de la mécanique des fluides

2.1 Cas d'un forçage périodique

Nous avons mis en oeuvre cette technique de modélisation, en utilisant une série chronologique numérique, obtenue par intégration du système d'Ondarçuhu et al. [4]. Ce système forcé périodiquement (Eq. 2) avec la pulsation ω , modélise un aspect de l'expérience dite de Bénard-Marangoni et sa dynamique est caractérisée par la présence de deux attracteurs chaotiques symétriques qui coexistent.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 + \epsilon \cos \omega t)x + \nu(1 + \epsilon \cos \omega t)y + x^2y - x^3 \end{cases} \quad (2)$$

Le système a été étudié pour les valeurs de paramètres suivantes :

$$(\mu, \nu, \epsilon, \omega) = (1.0434, -1.0, 0.45, 0.4).$$

Pour ces valeurs, on se trouve en présence de deux attracteurs chaotiques symétriques l'un de l'autre (Fig. 2).

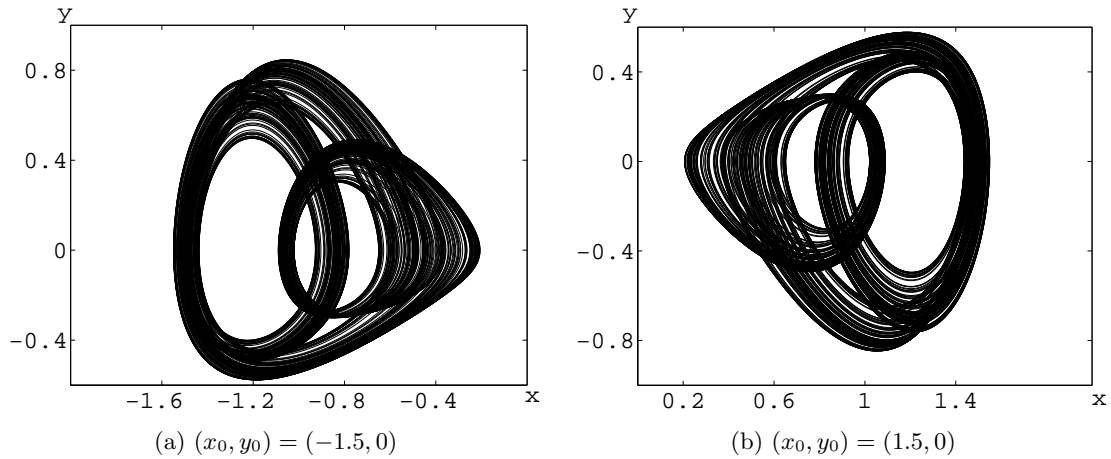


Fig.2. Les attracteurs sont obtenus pour les conditions initiales respectives.

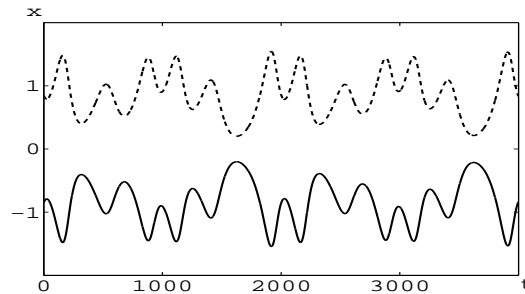


Fig.3. Les séries utilisées pour la reconstruction issues de la variable x du système original.

Détermination de la pulsation

La première étape de la reconstruction de l'attracteur chaotique consiste à déterminer la pulsation du

terme de forçage. On observe très nettement que l'erreur est minimale pour $\omega = 0.4$. D'ailleurs, si on diminue encore le pas, l'erreur est toujours minimale pour cette valeur de ω .

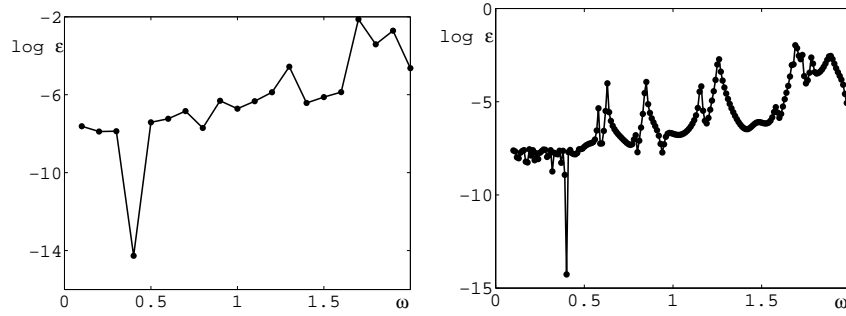


Fig.4. Représentations de l'erreur commise $\epsilon(\omega)$ lors de la reconstruction avec un balayage sur la valeur de ω respectivement de 0.1 et 0.01

Reconstruction à partir d'une série issue de l'attracteur 1

terme	système reconstruit	système original	erreur relative
X	$1.043395e + 000$	1.0434	$4.7920e - 006$
\dot{X}	$-9.999903e - 001$	-1	$9.7000e - 006$
X^3	$-9.999955e - 001$	-1	$4.5000e - 006$
$\dot{X}X^2$	$1.000007e + 000$	1	$7.0000e - 006$
$X \cos(0.4t)$	$4.695278e - 001$	0.46953	$4.6855e - 006$
$\dot{X} \cos(0.4t)$	$-4.499907e - 001$	-0.45	$2.0667e - 005$
$\ddot{X}X \cos(0.4t)$	$9.048722e - 006$	0	$9.0487e - 006$
$\dot{X}X$	$1.600213e - 005$	0	$1.6002e - 005$

Ce tableau présente les termes obtenus lors de la reconstruction. En intégrant ces équations, on obtient l'attracteur chaotique 1, malgré la présence de deux termes parasites, qui ne sont pas présents dans les équations du système original (Eq.2). D'autre part, en changeant les conditions initiales, on parvient à reconstruire son symétrique, l'attracteur 2. Ainsi, la dynamique du système reconstruit reproduit la coexistence d'attracteurs chaotiques présente dans le système original.

Bien évidemment, si on néglige les deux termes parasites, les résultats obtenus sont les mêmes.

Reconstruction à partir d'une série issue de l'attracteur 2

terme	système reconstruit	système original	erreur relative
X	$1.043395e + 000$	1.0434	$4.7920e - 006$
\dot{X}	$-9.999932e - 001$	-1	$6.8000e - 006$
X^3	$-9.999953e - 001$	-1	$4.7000e - 006$
$\dot{X}X^2$	$1.000003e + 000$	1	$3.0000e - 006$
$X \cos(0.4t)$	$4.695279e - 001$	0.46953	$4.4726e - 006$
$\dot{X} \cos(0.4t)$	$-4.499937e - 001$	-0.45	$1.4000e - 005$
$\ddot{X}X \cos(0.4t)$	$-5.598544e - 006$	0	$-5.5985e - 006$
$\dot{X}X$	$-9.682801e - 006$	0	$-9.6828e - 006$

Le système reconstruit, obtenu à partir d'une série issue de l'attracteur 2, comporte exactement les mêmes termes. Ce système, lorsqu'il est intégré, conduit à l'attracteur chaotique 1 pour $(x_0, y_0) = (-1.5, 0)$ et à l'attracteur 2 pour $(x_0, y_0) = (1.5, 0)$.

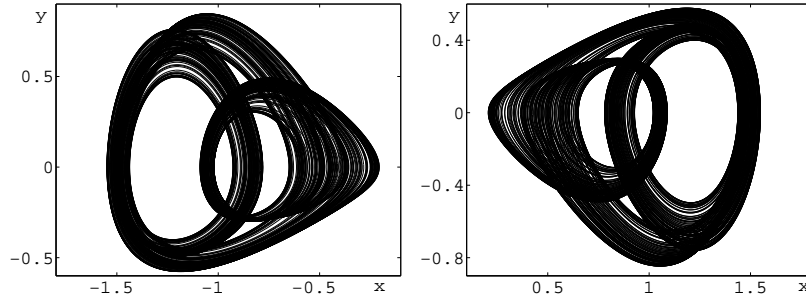


Fig.5. Attracteurs reconstruits à partir d'une série issue de l'attracteur 1

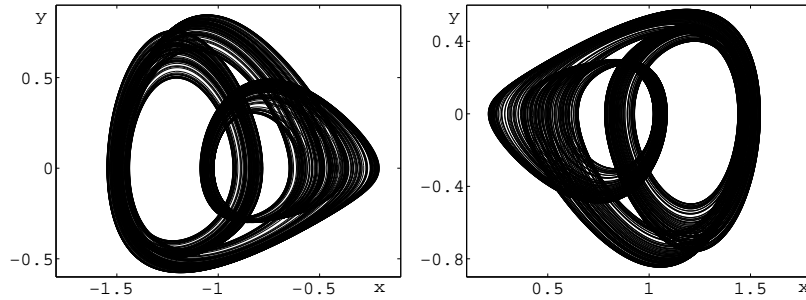


Fig.6. Attracteurs reconstruits à partir d'une série issue de l'attracteur 2

2.2 Cas d'un forçage quasi-périodique

Nous avons également traité le cas où le système est forcé quasipériodiquement.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 + \epsilon_1 \cos \omega_1 t)x + \nu(1 + \epsilon_2 \cos \omega_2 t)y + x^2 y - x^3 \end{cases}$$

Le système a été étudié pour les valeurs de paramètres suivants :

$$(\mu, \nu, \epsilon_1, \omega_1, \epsilon_2, \omega_2) = (1.0434, -1.0, 0.45, 0.399, 0.01, 0.21)$$

Détermination de la pulsation

Cette première étape indispensable pour pouvoir effectuer la reconstruction du système, s'avère plus difficile dans le cas d'un forçage quasi-périodique, car il y a deux pulsations inconnues à déterminer. Pour cela, on utilise le spectre de Fourier, qui donne un point de départ à notre recherche. Dans le cas considéré, on observe une valeur remarquable : $\omega = 0.399$. En fixant $\omega_1 = 0.399$, on applique la méthode du cas périodique pour ω_2 . On obtient le graphe de la figure 7, lorsqu'on fait varier ω_2 .

Reconstruction avec $\omega_1 = 0.399$ et $\omega_2 = 0.21$

terme	système reconstruit	système original	erreur relative
X	$1.043047e + 000$	1.0434	$3.3832e - 004$
\dot{X}	$-9.998304e - 001$	-1	$1.6960e - 004$
X^3	$-9.996612e - 001$	-1	$3.3880e - 004$
$\dot{X}X^2$	$9.998308e - 001$	1	$1.6920e - 004$
$X \cos(0.399t)$	$4.693704e - 001$	0.46953	$3.3991e - 004$
$\dot{X} \cos(0.21t)$	$-9.998229e - 003$	-0.001	$1.7710e - 004$
$\cos(0.399t)$	$4.718024e - 007$	0	$4.7180e - 007$
$\dot{X}X^2 \cos(0.399t)$	$-3.011196e - 007$	0	$3.0112e - 007$

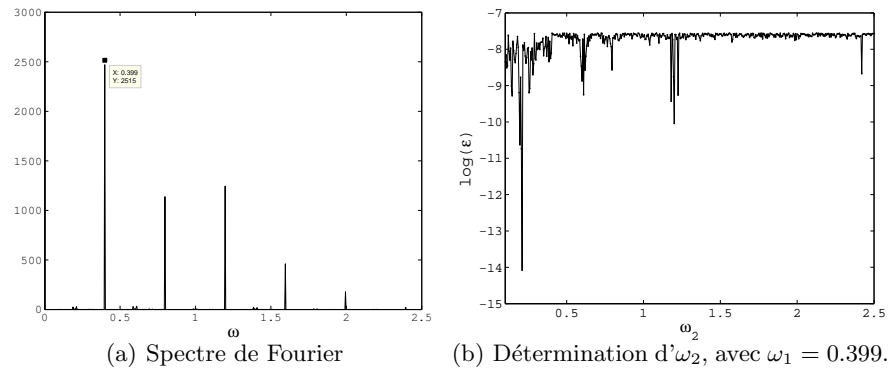


Fig.7. Détermination de la pulsation dans le cas quasi-périodique

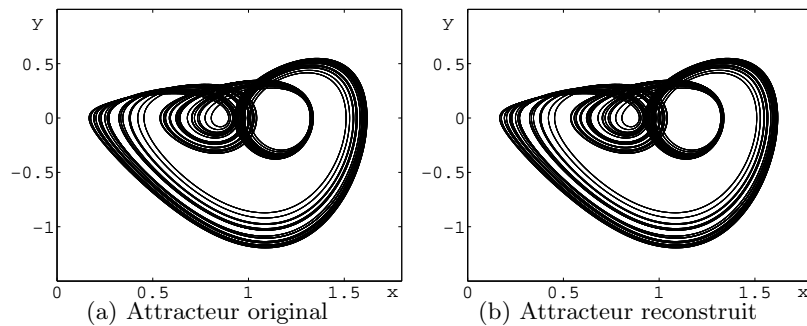


Fig.8. Comparaison des diagrammes de phases (x, \dot{x}) .

D'autre part, il se trouve que pour ces valeurs de paramètres, l'attracteur chaotique coexiste avec son symétrique. On obtient alors les mêmes résultats en terme de reconstruction concernant cette coexistence que dans le cas du forçage périodique.

Conclusion

Les résultats présentés dans cet article montrent que la technique développée pour les systèmes non autonomes est robuste. En effet, elle permet non seulement de traiter les cas de forçage périodique et quasi-périodique, mais aussi de reconstruire la dynamique complète du système considéré, dans le cas où deux attracteurs coexistent. Nous avons éprouvé la méthode sur des systèmes numériques. Il s'agit à présent de traiter des séries bruitées numériquement, voire des séries expérimentales, afin d'observer comment la méthode se comporte.

Références

1. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381 (1981).
2. S. CHEN, S.A. BILLINGS & W. LUO, Orthogonal least squares methods and their application to nonlinear system identification, *Int.J.Control*, **50** (5), 1873-1896 (1989).
3. BORIS P. BEZRUCHKO & DMITRY A. SMIRNOV, Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series, *Phys. Rev. E*, **63** (1), 016207 (2001).
4. T. ONDARÇUHU, G.B. MINDLIN, H.L. MANCINI & C. PÉREZ GARCIA, Dynamical patterns in Bénard-Marangoni Convection in a square container *Phys. Rev. Lett.*, **70** (25), 3892-3895 (1993).