

Dynamo Taylor-Couette en géométrie finie

R. Laguerre^{1,2}, A. Ribeiro¹, C. Nore^{1,2}, J. Léorat³, & J.-L. Guermond^{1,4}

¹ LIMSI-CNRS, BP133, 91403 Orsay Cedex, France

² Université Paris XI, département de physique, 91405 Orsay cedex, France

³ LUTH, Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon, France

⁴ Department of Mathematics, Texas A&M University, 3368 Tamu, College Station, TX 77843-3368, USA

laguerre@limsi.fr

Résumé. Nous présentons des calculs d'instabilités hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques (MHD) dans une configuration de Taylor-Couette en géométrie finie. La première bifurcation hydrodynamique est une bifurcation fourche imparfaite vers des rouleaux de Taylor axisymétriques et stationnaires. Ces rouleaux servent d'écoulement figé pour des calculs de dynamo cinématique qui mettent en évidence une bifurcation de Hopf supercritique vers une structure magnétique localisée de longueur caractéristique deux fois plus grande que celle de la vitesse. A partir des rouleaux de Taylor et du vecteur propre magnétique issu de la dynamo cinématique, la dynamo non-linéaire montre un comportement cyclique inédit où les symétries par rapport au plan médian des champs de vitesse et magnétique jouent un rôle prépondérant.

Abstract. We present calculations of hydrodynamic and hydromagnetic instabilities in a finite Taylor-Couette configuration. The first hydrodynamic bifurcation is an imperfect pitchfork bifurcation giving rise to Taylor vortices. This flow is used in kinematic dynamo computations showing a supercritical Hopf bifurcation towards a localised magnetic structure of typical length twice as long as the velocity typical length. Using Taylor vortices and the magnetic eigenvector obtained from the kinematic regime, the non linear dynamo shows a striking cyclic behaviour where the symmetries with respect to the median plane play a major role.

1 Introduction

L'écoulement de Taylor-Couette, engendré par la rotation différentielle de deux cylindres concentriques, est un des piliers de l'hydrodynamique, dans toutes ses facettes, expérimentales, théoriques et numériques. Dans son ouvrage de 1961, Chandrasekhar [1] s'est intéressé au problème hydromagnétique de l'écoulement de Taylor-Couette, dans le cas axisymétrique. Le problème consistait à considérer un écoulement de fluide conducteur plongé dans un champ extérieur appliqué. Les résultats récents obtenus dans le cadre de la dynamo, ainsi que l'intérêt astrophysique important de l'instabilité magnéto-rotationnelle, ont motivé une série d'études numériques. La dynamo cinématique fait l'objet d'une étude dans l'article [7] pour un écoulement de Taylor-Couette analytique. Dans l'article [6], une autre étude cinématique basée sur un écoulement solution des équations de Navier-Stokes, ainsi que la résolution du problème couplé non linéaire sont présentées. Dans ces deux études, le cylindre est axialement périodique et l'effet des couvercles sur la dynamo n'est pas pris en compte. Nous nous proposons d'étudier l'influence de ces couvercles sur les instabilités hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques.

2 Equations et méthode numérique

2.1 Equations de la MHD pour le problème de Taylor-Couette

Nous considérons un fluide incompressible de viscosité cinématique ν , de diffusivité magnétique η , de perméabilité magnétique μ et de masse volumique ρ , contenu entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_i (cylindre intérieur) et R_o (cylindre extérieur) et de hauteur L_z . Seul le cylindre intérieur est entraîné en

rotation à la vitesse angulaire Ω_i et les équations du problème à résoudre s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H} + \nu \Delta \mathbf{U}, \\ \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sigma \nabla \times (\mathbf{U} \times \mu \mathbf{H}) + \Delta \mathbf{H}, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où \mathbf{U} est le champ de vitesse, p est la pression et \mathbf{H} l'induction magnétique. Il faut de plus ajouter à ces équations les conditions aux limites adéquates qui seront abordées dans la suite. En prenant l'interstice $\delta = R_o - R_i$ comme longueur caractéristique, $\mathcal{U} = R_i \Omega_i$ comme vitesse caractéristique et $\mathcal{H} \sqrt{\mu/\rho} = \mathcal{U}$, les paramètres pertinents du problème sont le nombre de Reynolds cinétique, $Re = \frac{R_i \Omega_i \delta}{\nu}$, le nombre de Reynolds magnétique, $Re_m = \mu \sigma R_i \Omega_i \delta$, le rapport des rayons des cylindres, $\eta = \frac{R_i}{R_o}$ et le rapport d'aspect $\Gamma = \frac{L_z}{\delta}$. Dans ces conditions, les équations adimensionnées à l'aide des différentes échelles caractéristiques et du temps advectif défini par $\mathcal{T} = \delta/\mathcal{U}$, s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu_r \mathbf{H} + Re^{-1} \Delta \mathbf{U}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) + Re_m^{-1} \Delta \mathbf{H}, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

avec μ_r la perméabilité magnétique relative du fluide définie par la relation $\mu = \mu_0 \mu_r$, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

2.2 Caractéristiques de la méthode de résolution des équations couplées

La méthode développée et qui ne sera pas détaillée dans cette note, permet de résoudre les équations complètes de la MHD en trois dimensions pour toute géométrie axisymétrique (sphère, cylindre, ellipsoïde,...), qui sont d'un grand intérêt à la fois dans le domaine astrophysique et le domaine expérimental. L'algorithme permet de considérer un domaine de calcul numérique hétérogène composé de matériaux de conductivités électriques différentes. De manière naturelle, les équations sont résolues dans un repère cylindrique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ et chaque variable du problème est décomposée en séries de Fourier (cosinus-sinus) dans la direction azimutale \mathbf{e}_θ . À partir d'un problème 3D initial, on obtient ainsi M problèmes 2D couplés (M étant le nombre de modes de Fourier) à résoudre dans un plan méridien de la géométrie considérée. L'approximation de la solution dans le plan méridien est effectuée à l'aide d'éléments finis de Lagrange.

Le champ magnétique dans les régions isolantes est exprimé comme le gradient d'un potentiel scalaire $\mathbf{H}^v = \nabla \phi$ du fait qu'il soit à rotationnel nul. On réduit ainsi le nombre de variables du problème et on se restreint à des domaines géométriques dont les plans méridiens sont simplement connexes. L'originalité de la méthode repose sur l'emploi d'une technique de pénalisation de type Galerkin discontinu pour imposer les continuités requises par le champ magnétique au niveau des interfaces isolant/conducteur. Il s'agit d'assurer la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} et de la composante normale de $\mu_r \mathbf{H}$.

Les équations de Navier-Stokes sont résolues à l'aide d'un schéma prédicteur-correcteur sous forme rotationnelle optimale pour l'approximation de la pression et l'avancée temporelle est discrétisée au moyen d'un schéma BDF2. La méthode de résolution des équations de Maxwell est détaillée et validée dans [2] et s'est avérée efficace dans le domaine de la dynamo cinématique [3]. Les équations couplées sont résolues de façon alternée en temps.

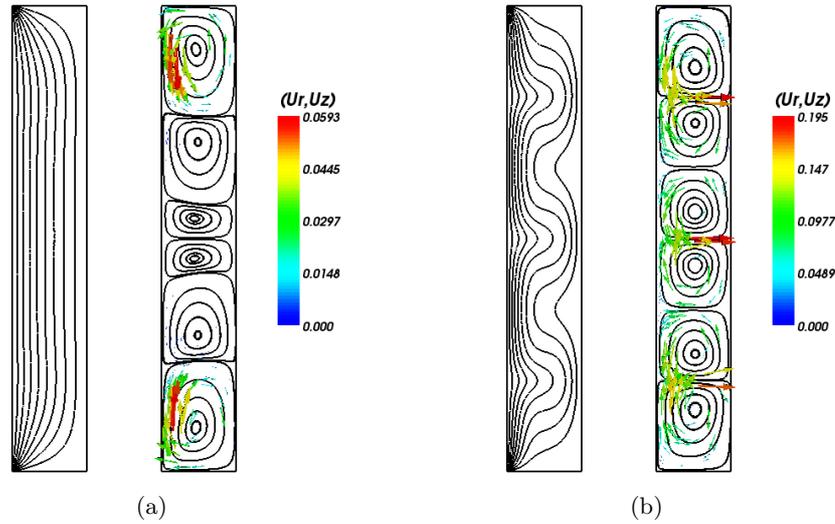


Fig.1. Champ de vitesse pour l'écoulement de Taylor-Couette pour $Re = 50$ (à gauche) et $Re = 120$ (à droite). Pour chaque Re sont représentés sur la partie gauche les isolignes de la composante azimutale (10 valeurs entre 0 et 10), et sur la partie droite, le champ de vitesse méridien. Pour chaque figure, l'axe vertical gauche est situé en $r = R_i = 1$ et l'axe vertical droit en $r = R_o = 2$.

3 Première bifurcation hydrodynamique : formation des rouleaux de Taylor

Nous considérons d'abord le cas hydrodynamique, sans champ magnétique imposé. La mise en rotation du cylindre intérieur aboutit, pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds, à un écoulement axisymétrique de Couette (C), admettant une solution analytique dans le cas axialement périodique. Une augmentation du nombre de Reynolds entraîne l'apparition de jets radiaux qui compensent l'excès de moment cinétique dû à la rotation rapide du cylindre intérieur. On obtient un écoulement formé de rouleaux de Taylor (TV) axisymétriques et stationnaires qui brisent la symétrie de translation le long de l'axe des cylindres. Taylor [4] a prédit le seuil de cette instabilité en supposant que les cylindres étaient axialement périodiques. Dans ces conditions, la bifurcation qui aboutit à un écoulement en rouleaux (TV) est une bifurcation fourche super-critique dont le paramètre d'ordre, qui peut être l'intensité des rouleaux, varie comme la racine carrée de l'écart au seuil $Re - Re^c$.

Pour nos calculs, nous avons choisi $L_z = 2\pi$, ce qui évite d'obtenir un écoulement dominé par les couvercles des cylindres, mais de taille raisonnable afin de minimiser les temps de calcul. Nous avons de plus choisi $R_i = 1$ et $R_o = 2$ de manière à avoir $\eta = 0.5$, $\delta = 1$ et $\Gamma = 2\pi$. Les conditions aux limites utilisées pour le champ de vitesse sont des conditions aux limites de non-glisement sur les parois des différents cylindres

- $U_r = U_z = 0$ pour $r = R_i$ et $r = R_o$,
- $U_\theta = 1$ pour $r = R_i$ et $U_\theta = 0$ pour $r = R_o$,
- $U_r = U_z = U_\theta = 0$ pour $z = 0$ et $z = L_z$.

On remarquera que nous avons arbitrairement choisi ici d'immobiliser les deux couvercles des cylindres coaxiaux.

Près des couvercles, on peut observer sur la figure 1 l'apparition de couches limites d'Ekman dans lesquelles le fluide se dirige vers l'axe du cylindre en spiralant, pour tout Re . Les rouleaux de Taylor se développent d'abord dans ces couches limites, pour de faibles Re (figure 1 à gauche, $Re < Re^c$) et envahissent l'ensemble de l'écoulement lorsque l'on s'approche de la valeur critique Re^c (figure 1 à droite, $Re > Re^c$). Benjamin [5] a interprété la formation de ces rouleaux de Taylor dans un dispositif de dimension finie comme une bifurcation fourche imparfaite. Nous retrouvons cette caractéristique en traçant le carré de la norme $L^2([0, T[, L^2(\Omega))$ de la composante radiale de la vitesse dans une faible épaisseur

proche du plan médian (de façon à minimiser les effets de bord) en fonction de Re (figure non montrée). Une interpolation linéaire de ces résultats aboutit à une valeur critique $Re^c = 65$ qui est légèrement inférieure à la valeur obtenue par Willis et Barenghi [6] dans le cas des cylindres axialement périodiques $Re_{perio}^c = 68.2$. La figure 1 (en bas) montre un écoulement formé de trois paires de rouleaux contra-rotatifs de rapport d'aspect pratiquement égal à l'unité et les propriétés de symétrie de cet écoulement par rapport au plan $z = 0$ sont $(U_r(r, \theta, -z), U_\theta(r, \theta, -z), U_z(r, \theta, -z)) = (U_r(r, \theta, z), U_\theta(r, \theta, z), -U_z(r, \theta, z))$. Nous allons maintenant utiliser cet écoulement, qui sera noté \mathbf{U}^{TV} , pour effectuer des simulations dans le cadre de la dynamo cinématique.

4 Dynamo cinématique

Pour l'étude en dynamo cinématique, nous utilisons l'écoulement \mathbf{U}^{TV} obtenu pour $Re = 120 = 1.85Re^c$ pour la résolution de l'équation de l'induction (régime linéaire). L'écoulement étant axisymétrique, les différents modes azimutaux du champ magnétique sont découplés et nous n'étudierons que le mode $m = 1$ qui est le mode le plus instable dans le cas périodique [6]. Nous attendons une échelle magnétique axiale de l'ordre de deux fois celle du champ de vitesse [7], le champ magnétique initial doit donc présenter une modulation axiale quelconque, de manière à ce que le mode axial le plus instable soit excité, après interaction avec le champ de vitesse.

Nous avons choisi d'initialiser nos simulations avec un champ magnétique qui vérifie les conditions de continuité à l'interface avec un champ potentiel nul à l'extérieur. Soit \mathbf{A} tel que $\mathbf{H}^c = \nabla \times \mathbf{A}$ et k_0 le nombre d'onde axial du champ magnétique dans le domaine conducteur. \mathbf{H}^c est déterminé par la fonction radiale f vérifiant

$$\begin{cases} H_r = \frac{1}{r} f(r) \cos(\theta) \sin(k_0 z), \\ H_\theta = -f'(r) \sin(\theta) \sin(k_0 z), \\ H_z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où f' est la dérivée de f et $k_0 = n_0 2\pi / L_z$. En utilisant les quatre conditions aux limites, on peut choisir un polynôme d'ordre 4 pour f et on obtient $f(r) = A(R_i - r)^2(R_o - r)^2$. L'évolution de l'énergie magnétique du mode azimutal $m = 1$ en fonction du temps a été obtenue pour différentes valeurs de $Re_m \in [120, 360]$. Ce qui nous a permis d'obtenir les taux de croissances σ_H du champ magnétique en fonction de Re_m . Nous avons de plus vérifié que les évolutions asymptotiques des énergies n'étaient pas affectées par la valeur n_0 dans la solution initiale. La valeur critique du nombre de Reynolds magnétique obtenu pour $\sigma_H = 0$ vaut $Re_m^c = 210$, résultat à comparer avec la valeur correspondant au cas périodique $Re_m^c(perio) = 190$. La différence entre ces deux valeurs provient certainement de la différence de topologie entre les écoulements de fluide dans les cas fini et périodique et aussi de la différence des conditions magnétiques vérifiées sur les deux couvercles.

Au delà de la valeur seuil, on observe que l'évolution du champ magnétique en un point fixé est composée d'une partie exponentielle croissante et d'une partie oscillante. De plus, les oppositions de phase entre les parties cosinus et sinus des différentes composantes traduisent la présence d'une structure magnétique en rotation autour de l'axe des cylindres. La composante dominante est la composante azimutale, d'amplitude environ 3 fois plus élevée que les composantes axiale et radiale qui sont comparables. La bifurcation est une bifurcation de Hopf super-critique.

Le mode propre est présenté en figure 2 dans les plans méridiens $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. On remarque que comme dans le cas périodique, la taille caractéristique des structures magnétiques est deux fois plus importante que celle des structures hydrodynamiques (rouleaux de Taylor de la figure 1). En raison de l'extension finie du cylindre, on ne voit apparaître que deux cellules magnétiques. Enfin, la symétrie de ce mode propre magnétique est $(H_r(r, \theta, -z, t), H_\theta(r, \theta, -z, t), H_z(r, \theta, -z, t)) = (-H_r(r, \theta, z, t), -H_\theta(r, \theta, z, t), H_z(r, \theta, z, t))$.

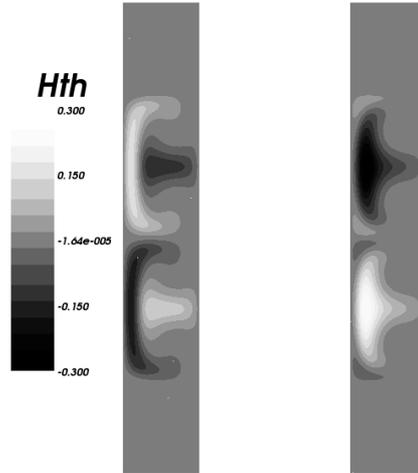


Fig.2. Composante azimutale du champ magnétique pour la dynamo cinématique de Taylor-Couette avec $Re = 120$ et $Re_m = 240 > Re_m^c \approx 210$ dans les plans $\theta = 0$ (à gauche) et $\theta = \pi/2$ (à droite). Pour chaque figure, l'axe vertical gauche est situé en $r = R_i = 1$ et l'axe vertical droit en $r = R_o = 2$.

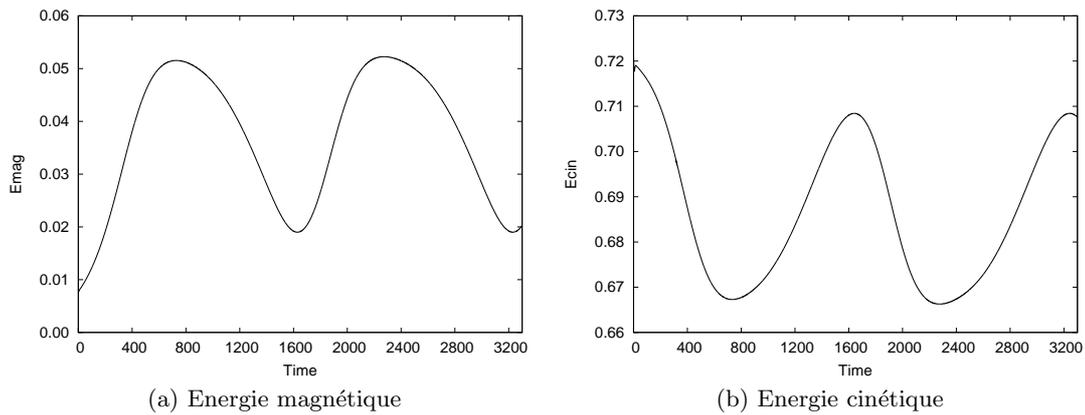


Fig.3. Dynamo non-linéaire pour $Re = 120$ et $Re_m = 240$ avec 12 modes azimutaux. Evolution temporelle de l'énergie magnétique (à gauche) et de l'énergie cinétique (à droite).

5 Dynamo non-linéaire

La solution hydrodynamique non linéaire \mathbf{U}^{TV} ainsi que le mode propre magnétique obtenu pour $Re = 120$ et $Re_m = 240$ vont maintenant être utilisés comme conditions initiales d'un calcul non linéaire. La résolution azimutale est de 12 modes ($m = 0 \dots 11$) et le maillage méridien utilisé est le même que celui utilisé dans la section précédente. Nous présentons sur la figure 3 les évolutions des énergies magnétique (à gauche) et cinétique (à droite) en fonction du temps. Comme attendu, on observe une première phase ($0 \leq t \leq 300$) de croissance exponentielle de l'énergie magnétique dont le taux de croissance est proche de celui obtenu dans le cas cinématique, alors que l'énergie cinétique décroît. Ensuite, les énergies magnétique et cinétique saturent vers $t = 800$ avant d'aborder une seconde phase pendant laquelle les tendances s'inversent ($800 \leq t \leq 1600$). L'énergie magnétique atteint alors un minimum pour $t = 1600$ et se remet à croître jusqu'à $t = 2300$. Nous avons reproduit deux cycles d'environ 1500 unités de temps adimensionnées pendant lesquelles les énergies oscillent en opposition de phase. Il est instructif de suivre l'évolution temporelle des symétries du mode propre magnétique par rapport au plan $z = 0$. Dans la première phase, le champ magnétique est amplifié en gardant la même symétrie que la condition initiale jusqu'à ce que

les effets non-linéaires rentrent en jeu et brisent cette symétrie. Dans la seconde phase, la composante azimutale du champ magnétique est à peu près paire en z et la dynamo est interrompue. Lorsque le champ magnétique redevient faible, de sorte que la force de Lorentz n'influe plus sur l'écoulement, le flot retrouve sa configuration initiale (\mathbf{U}^{TV}) et le mode propre magnétique symétrique se remet à croître ($1600 \leq t \leq 1900$). On observe une dynamo laminaire cyclique.

6 Conclusion

Nous avons retrouvé que la première bifurcation hydrodynamique est une bifurcation fourche imparfaite vers des rouleaux de Taylor. Nous avons prouvé que, dans le cadre de la dynamo cinématique, la bifurcation est une bifurcation de Hopf supercritique qui produit une structure magnétique localisée et unique pour la hauteur des cylindres considérée. Nous avons montré l'existence d'une dynamo non-linéaire cyclique dont le comportement est influencé par les symétries par rapport au plan médian des champs de vitesse et magnétique. Nous envisageons dans la suite d'effectuer des calculs de dynamo non-linéaire en imposant certaines symétries, afin de comprendre leur rôle dans l'évolution cyclique mise en évidence dans cette note.

Références

1. S. CHANDRASEKHAR, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability *Oxford University Press* (1961).
2. J.-L. GUERMOND, R. LAGUERRE, J. LÉORAT ET C. NORE, An Interior Penalty Galerkin method for the MHD equations in heterogeneous domains, *Journal of Computational Physics*, **221**, 349-369 (2007).
3. R. LAGUERRE, C. NORE, J. LÉORAT ET J.-L. GUERMOND, Effects of conductivity jumps in the envelope of a kinematic dynamo flow, *C. R. Mécanique*, **334**, 593-598 (2006).
4. G.I. TAYLOR, Stability of a viscous liquid container between two rotating cylinders, *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **223**, 289-343 (1923).
5. T.B. BENJAMIN, Bifurcation phenomena in steady flows of viscous liquid. I. Theory *Proc. Roy. Soc. London A*, **359**, 1-26 (1978).
6. A. P. WILLIS AND C. F. BARENGHI, A Taylor-Couette dynamo *Astronomy and Astrophysics*, **393**, 339-343 (2002).
7. P. LAURE, P. CHOSSAT ET F. DAVIAUD, Generation of magnetic field in the Couette-Taylor system *Dynamo and dynamics, a mathematical challenge, Nato Sci Ser. II*, **26**, 17, (2000).