Variété Invariante Intégrale de Systèmes Dynamiques

Ginoux Jean-Marc & Rossetto Bruno

Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon, Université de Sud
B.P. 20132, 83957, La Garde Cedex, France
ginoux@univ-tln.fr

Résumé. Le but de cet article est de présenter une nouvelle méthode de détermination d'intégrales de systèmes dynamiques autonomes de dimension deux ou trois. Considérant les courbes trajectoires solutions de ces systèmes comme des courbes planes ou gauches des propriétés de la Géométrie Différentielle telles que la courbure (resp. la torsion) ont permis de leur associer une variété. Définie comme le lieu des points où la courbure (resp. torsion) locale des courbes trajectoires s'annule, les conditions pour lesquelles cette variété est invariante sont établies en utilisant la théorie des courbes invariantes (resp. surfaces invariantes) introduite par Gaston Darboux et Henri Poincaré. Alors, à partir des travaux de M. J. Prelle et M. F. Singer, D. Schlomiuk, J. Llibre, H. Giacomini, C. Christopher et A. Goriely pour n'en citer que quelques-uns, une classification des différents cas pour lesquels ces systèmes dynamiques autonomes de dimension deux ou trois admettent une variété invariante comme intégrale première est fournie. Différents exemples d'applications permettent d'illustrer cette nouvelle approche.

Abstract. The aim of this article is to present a new method of determination of integrals of autonomous dynamical systems of dimension two or three. While considering the trajectory curves solutions of these systems as plane or space curves some Differential Geometry properties such as curvature (resp. torsion) enable to associate a manifold to them. Defined as the location of the points where the local curvature (resp. torsion) of the trajectory curves vanishes, the conditions for which this manifold is invariant are established by using the the invariant theory of curves (resp. surfaces) introduced by Gaston Darboux and Henri Poincaré. Then, starting from the works of M. J. Prelle and M. F. Singer, D. Schlomiuk, J. Free, H. Giacomini, C. Christopher and A. Goriely to name but a few, a classification of the various cases for which these autonomous dynamical systems of dimension two or three admit an invariant manifold as first integral is provided. Various examples of applications make it possible to emphasize this new approach.

1 Système d'équations différentielles

On considère un système d'équations différentielles défini sur un compact E de $\mathbb{R}$ par :

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \Im\left(\boldsymbol{X}\right) \tag{1}$$

Le vecteur $\Im\left(\boldsymbol{X}\right) = {}^t\left[f_1\left(\boldsymbol{X}\right), f_2\left(\boldsymbol{X}\right), ..., f_n\left(\boldsymbol{X}\right)\right]$ défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes f_i indépendantes du temps, supposées continues, de classe C^∞ sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2]. Ce système autonome admet une *courbe trajectoire* $\boldsymbol{X} = {}^t\left[x_1, x_2, ..., x_n\right]$ tangente à $\Im$ en tout point. Dans tout ce qui suit on supposera que le système défini par (1) est de dimension deux (resp. trois).

2 Propriétés de la courbe trajectoire

La *courbe trajectoire* $\boldsymbol{X}\left(t\right)$ intégrale du système défini par (1) peut être envisagée comme une courbe *plane* ou *gauche* possédant des propriétés métriques locales : *courbure* et *torsion*.

2.1 Courbure de la courbe trajectoire

Soit $\boldsymbol{X}(t)$ la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1) possédant en M un vecteur vitesse instantanée $\boldsymbol{V}(t)$ et un vecteur accélération instantanée $\boldsymbol{\gamma}(t)$, la *courbure* est définie par :

$$\frac{1}{\Re} = \frac{\|\gamma \wedge \boldsymbol{V}\|}{\|\boldsymbol{V}\|^3} \tag{2}$$

où $\Re$ représente le *rayon de courbure.*

2.2 Torsion de la courbe trajectoire

Soit $\boldsymbol{X}(t)$ la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1) possédant en M un vecteur vitesse instantanée $\boldsymbol{V}(t)$, un vecteur accélération instantanée $\boldsymbol{\gamma}(t)$ et un vecteur sur-accélération instantanée $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, la *torsion* est définie par :

$$\frac{1}{\Im} = -\frac{\dot{\gamma} \cdot (\gamma \wedge \boldsymbol{V})}{\|\gamma \wedge \boldsymbol{V}\|^2} \tag{3}$$

où $\Im$ représente le *rayon de torsion.*

3 Dérivée de Lie et intégrale première

3.1 Variété invariante

Soit ϕ une fonction de classe C^1 définie sur un compact E inclus dans $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{X}(t)$ la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1). La dérivée de Lie est définie par :

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\dot{x}_i = \frac{d\phi}{dt} \tag{4}$$

Une *variété* (une courbe, resp. une surface) définie par $\phi(\boldsymbol{X}) = 0$ où ϕ est une fonction de classe C^1 dans un ouvert U et dite *invariante* s'il existe une fonction C^1 notée $k(\boldsymbol{X})$ et appelée cofacteur qui satisfasse pour tout $\boldsymbol{X} \in U$:

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi(\boldsymbol{X}) = k(\boldsymbol{X})\,\phi(\boldsymbol{X}) \tag{5}$$

Cette notion a été introduite par Gaston Darboux [3].

3.2 Intégrale première

Si $L_{\boldsymbol{X}}\phi(\boldsymbol{X}) = 0$ alors $\phi(\boldsymbol{X})$ est intégrale première du système défini par (1). Ainsi, $\phi(\boldsymbol{X})$ est constante le long de chaque *courbe trajectoire* et les courbes intégrales sont tracées sur les ensembles de niveau $\{\phi(\boldsymbol{X}) = \alpha\}$ où α est une constante.

D'après Darboux [3], une variété $\phi(\boldsymbol{X}) = 0$ est une solution algébrique du système défini par (1) si et seulement si, $\phi(\boldsymbol{X}) = 0$ est une variété algébrique invariante.

4 Variété algébrique invariante

4.1 Variété algébrique de courbure (torsion) nulle

On appelle variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle la variété (la courbe, resp. la surface) définie par le lieu des points où la *courbure* (resp. la *torsion*) locale des *courbes trajectoires* intégrales d'un système (1) de dimension deux (resp. trois) s'annule.

4.2 Invariance de la variété algébrique de courbure (torsion) nulle

En posant $\phi(\boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{V}\|$, il a été démontré dans une précédente publication [4] que la dérivée de Lie de la *courbure* s'écrit :

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi(\boldsymbol{X}) = Tr(J)\,\phi(\boldsymbol{X}) + \left\| \frac{dJ}{dt}\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V} \right\| \tag{6}$$

où J représente le jacobien fonctionnel associé au système (1).

De même, en posant $\phi(\boldsymbol{X}) = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{V})$, il a été démontré dans [1] que la dérivée de Lie de la *torsion* s'écrit :

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi(\boldsymbol{X}) = Tr(J)\,\phi(\boldsymbol{X}) + \left(-Tr(J)\frac{dJ}{dt}\boldsymbol{V} + J\frac{dJ}{dt}\boldsymbol{V} + 2\frac{dJ}{dt}\boldsymbol{\gamma} + \frac{d^2J}{dt^2}\boldsymbol{V} \right) \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{V}) \tag{7}$$

Ainsi, la dérivée de Lie de la *courbure* (resp. de la *torsion*) peut s'écrire :

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi(\boldsymbol{X}) = Tr(J)\,\phi(\boldsymbol{X}) + R(\boldsymbol{X}) \tag{8}$$

où $R(\boldsymbol{X})$ représente la seconde partie du membre de droite de l'équation (6) (resp. (7)).

En comparant les équations (8) et (4) on constate que l'invariance de la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle est liée à la présence du terme R. Ceci conduit à une classification des différents cas pour lesquels cette variété algébrique est invariante.

La dépendance de R vis à vis de la différentielle totale du jacobien fonctionnel associé au système (1) permet alors distinguer deux types de systèmes : les systèmes linéaires, les systèmes multi-échelles, i.e., possédant un ou plusieurs petits paramètres multiplicatifs en facteur dans leur champ de vecteurs vitesse, appelés également singulièrement perturbés, ou lents-rapides.

1. Systèmes linéaires :
   Dans le cas de systèmes linéaires le jacobien fonctionnel est constant, i.e., sa différentielle totale est donc nulle. L'invariance globale de la variété algébrique en découle *ipso facto* et le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première du système.
2. Systèmes Autonomes Lents-Rapides :
   Dans le cas de Systèmes Autonomes Lents-Rapides, il a été établi dans [4] que dans le voisinage de $\phi(\boldsymbol{X}) = 0$ le jacobien fonctionnel est stationnaire et par conséquent sa différentielle totale est nulle. La variété algébrique est donc localement invariante et le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première locale du système.

Dans le cas de systèmes défini par (1) qui ne soient ni linéaires, ni lents-rapides, il existe des conditions pour lesquelles le terme R se factorise en fonction de ϕ ou bien s'annule. La variété algébrique est alors globalement invariante et le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première du système. La détermination de certaines conditions d'invariance de la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle associée à ces systèmes fait l'objet du paragraphe suivant.

4.3 Invariance des isoclines

Théorème : Un système différentiel (1) de dimension deux (resp. trois) dont les composantes du champ de vecteurs vitesse sont des variétés algébriques invariantes admet la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle pour variété algébrique invariante et pour intégrale première.

Démonstration. On considère un système d'équations différentielles défini sur un compact E de $\mathbb{R}$ par :

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \mathfrak{I}(\boldsymbol{X})$$

Le vecteur $\Im(\boldsymbol{X}) = {}^t\left[f_1(\boldsymbol{X}), f_2(\boldsymbol{X}), ..., f_n(\boldsymbol{X})\right]$ défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes f_i indépendantes du temps, supposées continues, de classe C^∞ sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2] et la coondition d'invariance de Darboux (5) :

$$L_{\boldsymbol{X}} f_i(\boldsymbol{X}) = k_i(\boldsymbol{X}) f_i(\boldsymbol{X}) \tag{9}$$

La variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle s'écrit alors :

$$\phi(\boldsymbol{X}) = P\left(k_i, \dot{k}_i\right) \prod_{i=1}^{n} f_i \tag{10}$$

où $P\left(k_i, \dot{k}_i\right)$ représente un polynôme dépendant des cofacteurs k_i et de leurs différentielles totales $\dot{k}_i$. La dérivée de Lie s'écrit :

$$L_{\boldsymbol{X}} \phi(\boldsymbol{X}) = \left[\dot{P}\left(k_i, \dot{k}_i\right) + P\left(k_i, \dot{k}_i\right) \sum_{i=1}^{n} k_i\right] \prod_{i=1}^{n} f_i \tag{11}$$

On vérifie que la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle est bien invariante et que le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première du système défini par (1).

Ainsi, si toutes les isoclines d'un système défini par (1) sont invariantes, ce système admet la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle pour variété algébrique invariante et pour intégrale première.

5 Applications

5.1 Système différentiel de dimension deux

On considère le système d'équations différentielles défini sur un compact E de $\mathbb{R}$ suivant :

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \Im(\boldsymbol{X}) \tag{12}$$

Le vecteur $\Im(\boldsymbol{X}) = {}^t\left[f_1\left(\boldsymbol{X} = ax + bx^2 + cxy\right), f_2(\boldsymbol{X}) = 4ay + 4bxy + 4cy^2\right]$ défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes f_i indépendantes du temps, supposées continues, de classe C^∞ sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2] et où a, b et c sont des paramètres réels. On peut vérifier facilement que les composantes du champ de vecteurs vitesse du système quadratique (12) satisfont les conditions du Théorème d'invariance des isoclines.
La variété algébrique de *courbure* nulle associée à ce système s'écrit :

$$\phi(\boldsymbol{X}) = 12xy(a + bx + cy)^3 \tag{13}$$

La dérivée de Lie s'écrit :

$$L_{\boldsymbol{X}} \phi(\boldsymbol{X}) = 12xy(a + bx + cy)^3(5a + 8bx + 17cy) \tag{14}$$

Le système (12) admet bien la variété algébrique de *courbure* nulle pour variété invariante et pour intégrale première.

5.2 Système différentiel de dimension trois

On considère le système d'équations différentielles défini sur un compact E de $\mathbb{R}$ suivant :

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \Im(\boldsymbol{X}) \tag{15}$$

Le vecteur $\Im(\boldsymbol{X}) = {}^t\left[f_1(\boldsymbol{X} = axyz(x+A)), f_2(\boldsymbol{X}) = bxyz(y+B), f_3(\boldsymbol{X}) = cxyz(z+C)\right]$ défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes f_i indépendantes du temps, supposées continues, de classe C^∞ sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2] et où a, A, b, B et c, C sont des paramètres réels. On peut vérifier facilement que les composantes du champ de vecteurs vitesse du système (15) satisfont les conditions du Théorème d'invariance des isoclines. La variété algébrique de *torsion* nulle associée à ce système s'écrit :

$$\phi(\boldsymbol{X}) = abc(a-b)(a-c)(c-b)x^6y^6z^6(A+x)(B+y)(C+z) \tag{16}$$

La dérivée de Lie s'écrit :

$$L_{\boldsymbol{X}}\phi(\boldsymbol{X}) = abc(a-b)(a-c)(c-b)x^6y^6z^6(A+x)(B+y)(C+z)P(x,y,z) \tag{17}$$

où le cofacteur est $P(x,y,z) = 6cCxy + 6bBxz + 6aAyz + 7(a+b+c)xyz$. Le système (15) admet bien la variété algébrique de *torsion* nulle pour variété invariante et pour intégrale première.

6 Conclusion

Dans cet article il a été établi que la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle peut constituer sous certaines conditions l'une des variétés invariantes associée à tout système défini par (1). Dans ce cas le lieu des points où elle s'annule permet d'obtenir l'intégrale première de ces systèmes. Néanmoins, si le Théorème d'invariance des isoclines fournit une de ces conditions il semble que d'autres restent à découvrir. Ainsi, l'étude de systèmes différentiels composés de polynômes homogènes a conduit, en dimension deux, à l'équation d'une variété invariante directement issue de la variété algébrique de *courbure* nulle et devrait fournir, en dimension trois, de nouvelles conditions.

Références

1. C. Christopher & J. Llibre, *Ann. Differential Equations*, **16** (1), 5-19 (2000).
2. E.A. Coddington & N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mac Graw Hill, New York, (1955).
3. G. Darboux, *Bull. Sci. Math. Sér.*, **2** (2), 60-96, 123-143, 151-200 (1878).
4. J.M. Ginoux & B. Rossetto, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **16**, 887-910 (2006).
5. A. Goriely, Integrability and Nonintegrability of ordinary differential equations, *Advanced Series on Nonlinear Dynamics*, **19** World Scientific (2001).
6. J. Llibre, Integrability of polynomial differential systems, *Handbook of Differential Equations* (Ordinary Differential Equations Volume I), pp. 437-532. Elsevier (2003).
7. M. Prelle & M. Singer, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **279**, 215-229 (1983).
8. H. Poincaré, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **1**, 169-191 (1891).
9. H. Poincaré, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **11**, 193-239 (1897).
10. D. Schlomiuk, Bifurcations and periodic orbits of Vector Fields, *Series C : Mathematical and Physical Sciences*, **408**, Kluwer Academic Publishers, NATO Advanced Study Institute Series (1993).