

# Auto-organisation et chaos spatio-temporel pour un modèle proie-prédateur avec diffusion

Baba Issa Camara & M.A. Aziz Alaoui

Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre, Université du Havre, BP 540  
76058 Le Havre Cedex, FRANCE  
babaissa@yahoo.fr & aziz.alaoui@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Nous étudions ici un système proie-prédateur qui prend en compte l'évolution de la distribution spatiale de deux populations. Il s'agit d'analyser un modèle mathématique représentant les dynamiques spatio-temporelles de deux espèces. Ces dynamiques paramétrées par des variables de contrôle, dépendent aussi des conditions initiales. Dans la première partie du travail nous présentons le modèle en déterminant les conditions d'existence de solution stables. La seconde partie est consacrée à l'étude des bifurcations. Enfin, dans la troisième partie nous étudions l'émergence de motifs.

**Abstract.** The dynamic relationship between species are at heart of many important ecological and biological processes. Predator-prey dynamics are a classic and relatively well-studied example of interactions. In this paper we consider a system of in which only basic qualitative features of the system are known, namely the invasion of a prey population by predators. The local dynamics has been studied in [1] and [5], see also [2,3,4]. We assume now that both predators and prey move in space, we represent the mathematical model by reaction-diffusion equations. It is a type of spatiotemporal model most commonly used in ecology an biology. We focus on mechanisms responsible for transitions between different kind of dynamics and the identification of factors that can potentially enhance or suppress chaos and give rise to orgaization and patterns.

## 1 Modèle mathématique et stabilité asymptotique

La conservation des densités de proies et prédateurs est régie par une équation de réaction-diffusion couplée avec une réponse fonctionnelle qui traduit la dynamique locale des espèces. La fonction réponse considérée est une version modifiée de Holling Tanner [1]. Le modèle mathématique s'écrit,

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial T} = D_1 \Delta H + (a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1}) H \\ \frac{\partial P}{\partial T} = D_2 \Delta P + (a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2}) P, \end{cases} \quad (1)$$

La dynamique locale est donnée par les équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{dH}{dT} = (a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1}) H \\ \frac{dP}{dT} = (a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2}) P, \end{cases} \quad (2)$$

$H$  et  $P$  représentent les densités de proies et prédateurs à l'instant  $T$  à la position considérée.  $\Delta H$  (resp  $\Delta P$ ) est le laplacien appliqué à la densité de proies (resp prédateurs).  $a_1$  (resp.  $a_2$ ) est le taux de croissance de la proie (resp. du prédateur).  $b_1$  mesure la mortalité due à la compétition entre les individus de l'espèce  $H$ .

$c_1$  (resp.  $c_2$ ) est la valeur maximale que le taux de réduction par individu  $H$  (resp.  $P$ ) peut atteindre.  $k_1$  (resp.  $k_2$ ) mesure la protection dont la proie  $H$  (resp. le prédateur  $P$ ) bénéficie grâce à l'environnement, (voir [1,2] pour plus de détails).

Pour étudier le problème nous réduisons le nombre de paramètres par le changement de variable suivant :

$$t = a_1 T, \quad u(t) = \frac{b_1}{a_1} H(T), \quad v(t) = \frac{c_2 b_1}{a_1 a_2} P(T), \quad x = X \left( \frac{a_1}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y = Y \left( \frac{a_1}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$a = \frac{a_2 c_1}{a_1 c_2}, \quad b = \frac{a_2}{a_1}, \quad e_1 = \frac{b_1 k_1}{a_1}, \quad e_2 = \frac{b_1 k_2}{a_1}, \quad \delta = \frac{D_2}{D_1} \quad (4)$$

Les équations spatio-temporelles deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(1-u) - \frac{auv}{u+e_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + b \left(1 - \frac{v}{u+e_2}\right) v, \end{cases} \quad (5)$$

Tandis que les équations locales s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{auv}{u+e_1} \\ \frac{dv}{dt} = b \left(1 - \frac{v}{u+e_2}\right) v, \end{cases} \quad (6)$$

Notons que tout point d'équilibre de (6) l'est aussi pour (5). Notons aussi que (6) admet un unique point d'équilibre  $(u^*, v^*)$  non trivial dans la région du plan  $(u > 0, v > 0)$ .

**Théorème :** Si les conditions suivantes sont vérifiées,

$$\begin{cases} 1 \leq e_1 \leq e_2 \\ \left( \frac{\delta}{u^* + e_1} [2u^{*2} + (e_1 - 1)u^*] + b \right)^2 \leq \frac{4\delta b u^*}{u^* + e_1} (2u^* + a + e_1 - 1) \end{cases} \quad (7)$$

alors le point d'équilibre  $(u^*, v^*)$  est globalement asymptotiquement stable pour le système (5)

Pour la preuve voir [5].

**Remarque 1 :** La relation  $e_1 \leq e_2$  signifie que le milieu écologique supporte une plus grande quantité de prédateurs que de proies. La deuxième inéquation de (7) sert à exclure la manifestation d'une instabilité de Turing pour certaines valeurs du coefficient de diffusion  $\delta$ . En effet si cette inéquation n'est pas vérifiée alors le point d'équilibre  $(u^*, v^*)$  stable pour le système (5) devient instable pour (6), voir [4].

## 2 Bifurcations et chaos dans le cas où l'espace est de dimension 1

Nous présentons dans cette partie les résultats de notre simulation numérique. Le domaine spatial considérée est  $D = [0, L]$ . Pour l'approximation numérique, nous combinons la méthode de Crank-Nicolson avec le schéma de Runge-Kutta. Afin de mieux représenter le problème d'invasion, nous considérons la

condition initiale avec un flux nul au bord.

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{sur } [L_1u, L_2u] \text{ avec } 0 < L_1u < L_2u < L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_0 & \text{sur } [L_1v, L_2v] \text{ avec } 0 < L_1v < L_2v < L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

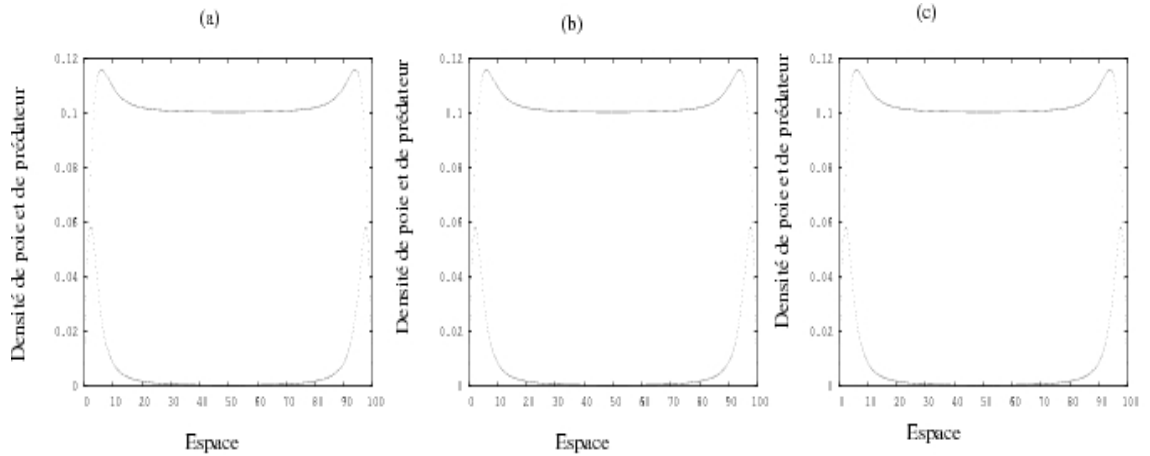
Notons que  $0 < L_1u < L_1v < L_2v < L_2u < L$ .

Nous avons choisi les paramètres et la condition initiale de telle sorte qu'aucune espèce ne disparaît. En fait, si le domaine est petit et/ou la densité des espèces est faible, on observe une extention des populations. Cette propriété porte le nom de "effet Allee" [4]. Pour notre système, elle se manifeste par exemple pour les paramètres et les conditions initiales suivantes :

$$e_1 = 0.08, e_2 = 0.01, b = 0.2, a = 3.0, u_0 = 0.08, v_0 = 0.01, \delta = 1$$

Posons maintenant,

$$\begin{aligned} e_1 = 0.08, e_2 = 0.01, b = 0.2, a = 3.0, u_0 = 1.0, v_0 = 0.1, L = 100, \\ L_1u = 40, L_1v = 48, L_2v = 56, L_2u = 60, a = 3.0, b = 0.256, \delta = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

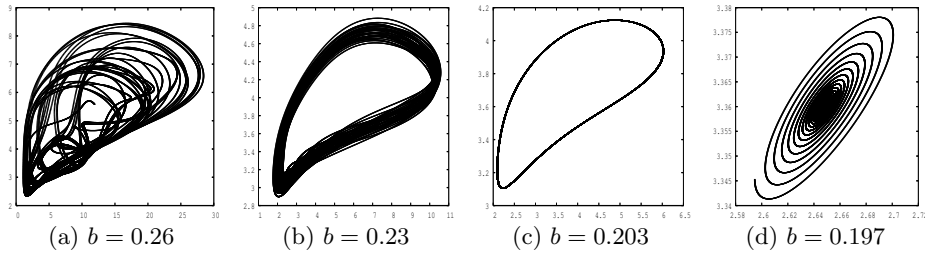


**Fig.1.** Distribution spatiale de la densité du système (2.5) avec les paramètres de (3.3) à différents instants.

La figure 1 est un exemple de répartition spatiale des populations observée aux instants  $t = 250$  (a),  $t = 750$  (b),  $t = 1200$  (c). Avec ces paramètres fixés, et ces distributions initiales, il y a deux pics au début et à la fin du domaine qui se forment dès les premiers instants de la simulation. Entre ces pics les densités restent et demeurent constantes au fil du temps. Des comportements similaires peuvent être observés pour des valeurs de  $b$  entre 0.19 et 2.7.

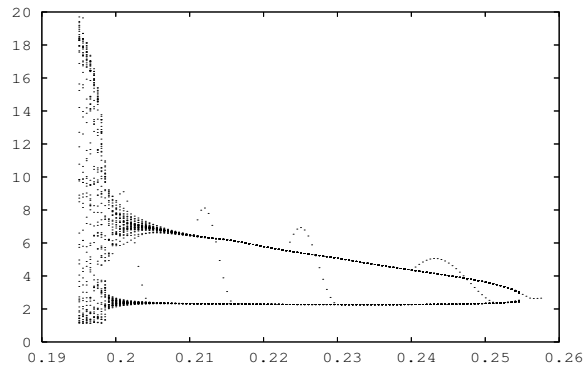
Pour mieux examiner les propriétés de la dynamique des populations, nous considérons les quantités totales de proie et de prédateurs en posant :

$$U(t) = \int_0^L u(x, t) dx, \quad V(t) = \int_0^L v(x, t) dx \quad (11)$$



**Fig.2.** Cascade sur le plan de phase  $(U, V)$ , conduisant à des oscillations chaotiques pour différentes valeurs de  $b$ .

L'objectif est d'étudier les propriétés des oscillations de la dynamique des populations quand on fait varier un paramètre de contrôle. Le choix de ce paramètre est alors autrement important. Dans le système (5), nous pouvons faire varier  $a$  ou  $b$ . Nous allons choisir  $b$  comme paramètre de contrôle puisqu'il détermine le rapport de deux facteurs que sont les taux de natalité de la proie et du prédateur. Donc, mis à part  $b$  qui variera entre 0.195 et 2.62 les autres paramètres seront fixés comme dans (10). Pour chaque valeur de  $a$  le système (5) est résolu avec les conditions initiales (8) et (9). Pour que les portraits de phase des quantités totales des espèces  $U$  et  $V$  soient dans l'attracteur, nous laissons un temps transitoire assez grand. Nous démarrons avec  $b = 0.26$ , valeur pour laquelle le système présente un foyer attractif dans  $(U, V)$ . On obtient le même portrait tant que le rapport des taux de natalité du prédateur sur la proie est supérieur à 0.255. Nous avons une première bifurcation quand ce quotient est égal 0.255. Lorsqu'il est compris entre 0.208 et 0.255 le système exhibe des oscillations périodiques (Fig. 2b). Une seconde bifurcation plonge la dynamique des espèces dans un attracteur quasi-périodique, pour des valeurs de  $b$  entre 0.199 et 0.208, (Fig. 2c). Enfin, pour  $b$  entre 0.199 et 0.208 elle devient chaotique (Fig. 2d).



**Fig.3.** Diagramme de bifurcations sur le plan de phase  $(U, V)$  en fonction du paramètre  $b$ .

Ces résultats se résument par le diagramme de bifurcation de la figure 3. Il est obtenu en calculant pour chaque valeur de  $b$  le portrait de phase  $(U, V)$ . Puis nous faisons une coupe de Poincaré dont le plan correspond à la valeur moyenne prise par  $V$  durant l'observation.

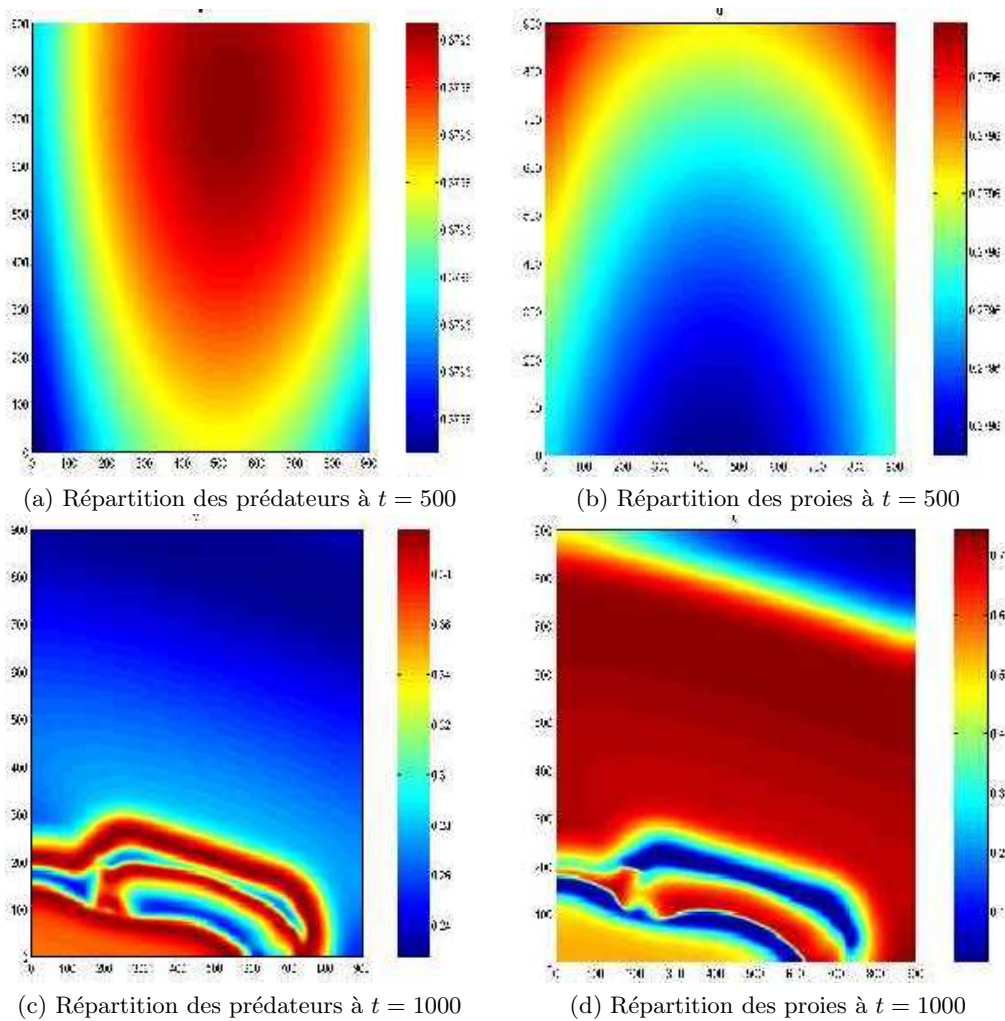
**Remarque 2 :** Les quantités  $U$  et  $V$  sont les sommes linéaires des densités locales  $u$  et  $v$  respectivement. Cependant, ces dernières ne manifestent pas d'oscillations irrégulières, alors que les quantités totales ont une dynamique chaotique pour certaines valeurs de  $b$ . Ainsi le Tout n'est plus la somme des parties dès que les interactions causales sont non linéaires (émergence de nouvelles propriétés).

### 3 Organisation et émergence dans le cas où l'espace est de dimension 2

Cette dernière partie est réservée à l'étude du problème sur le domaine borné  $D = [0; 900] \times [0; 900]$ . Nous nous intéressons aux structures émergentes dans le cas où l'équilibre  $(u^*, v^*)$  de (6) est instable.  $(u^*, v^*)$  devient aussi instable pour (5). Nous partons d'une condition initiale assez voisine de  $(u^*, v^*)$ , présentant une faible disparité de la répartition spatiale. Cette répartition spatiale initiale est donnée par :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^* - \epsilon(x - 450) * (y - 675) + \eta \\ v(x, 0) = v^* \end{cases} \quad (12)$$

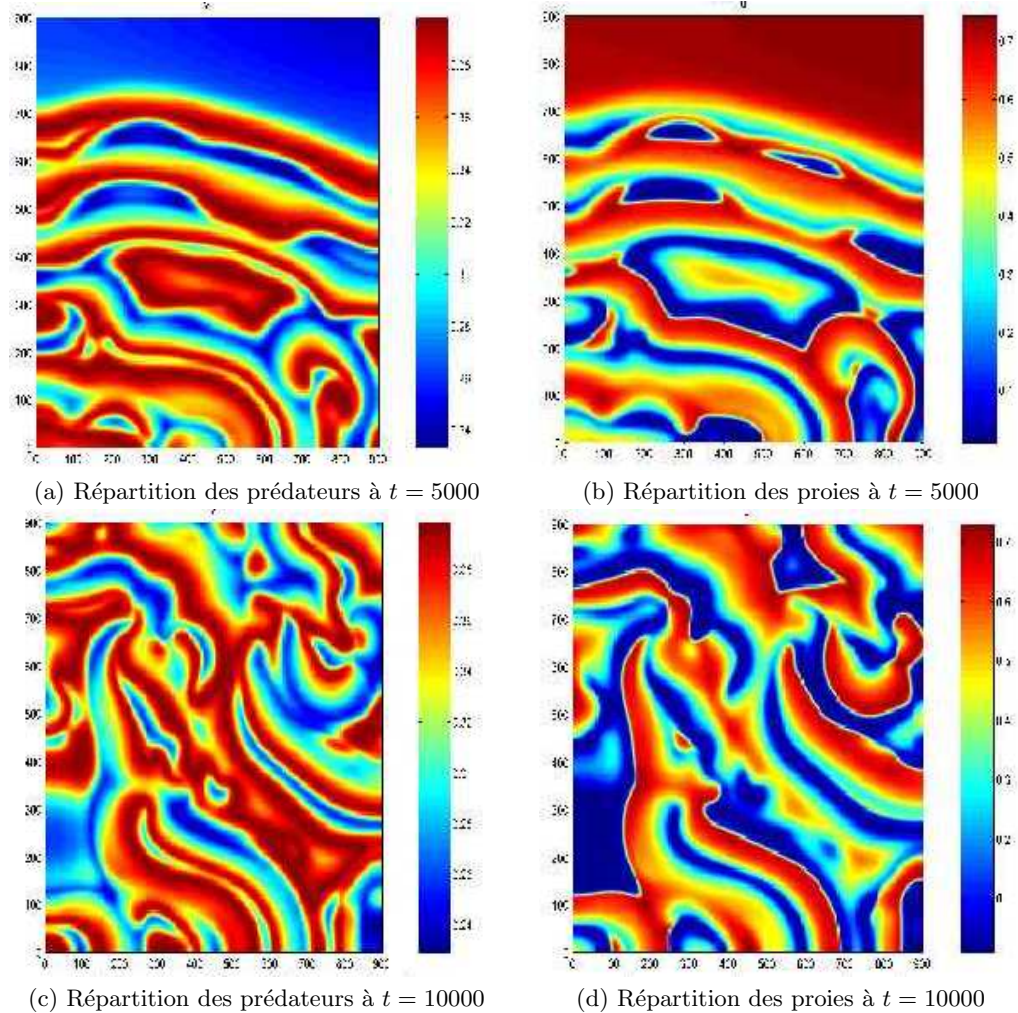
$$\epsilon = 2 \cdot 10^{-7}, \quad \eta = 1.2 \cdot 10^{-4}$$



**Fig.4.** Distribution spatiale des populations à  $t = 500$  et à  $t = 1000$ .

Il existe alors une valeur propre de la linéarisation de (5) qui va imprimer une vitesse maximale de croissance des espèces. Les effets nonlinéaires augmentent par conséquent. Avant d'atteindre le seuil important d'interactions, la distribution spatiale passe par une première phase de transition (Figs. 4a et

4b). Lorsque les effets nonlinéaires deviennent importants la structure presque homogène se brise pour laisser place à un motif spatial hétérogène. C'est la deuxième phase. Elle est illustrée par les figures 4c et 4d. La troisième phase est en fait la propagation locale puis globale de ces motifs (Fig. 5).



**Fig.5.** Distribution spatiale des populations dans le cas à  $t = 5000$  et à  $t = 10000$ .

## Références

1. M. A. AZIZ-ALAOUI & O. M. DAHER, Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-gower and Holling-type II schemes, *Applied Mathematical Letters*, **16** (7), 1069-1075, (2003).
2. M. A. AZIZ-ALAOUI, Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model, *Chaos, Solitons & Fractals*, **14** (8), 1275-1293, (2002).
3. C. LETELLIER & M. A. AZIZ-ALAOUI, Analysis of the dynamics of a realistic ecological model, *Chaos, Solitons & Fractals*, **13** (1), 95-107, (2002).
4. A. MOROZOV, S. PETROVSKII & BAI-LIAN LI, Bifurcations and chaos in a prey datorprey system with the Allee effect, *Proceedings of the Royal Society of London B*, **271**, 1407-1414 (2004).
5. M. A. AZIZ ALAOUI & B. I. CAMARA, *en préparation*.