

Chaos Classique avec un objet quantique

Quentin Thommen¹, Jean-Claude Garreau², & Véronique Zehnlé²

¹ O.N.T., Université Libre de Bruxelles

² Laboratoire Phlam, université de Lille1

qthommen@ulb.ac.be, jean-claude.garreau@univ-lille1.fr, veronique.zehnlé@univ-lille1.fr

Résumé. La dynamique quantique d'un gaz quantique dégénéré, chargé dans un réseau incliné, est étudiée. Nous montrons qu'elle présente des similarités forte avec le chaos classique.

Abstract. We study the quantum dynamics of an ultracold quantum degenerate gas in a tilted lattice and show that it displays features very close to classical chaos.

1 Atomes refroidis et condensation de Bose-Einstein

1.1 Atomes refroidis par lasers et potentiels lumineux

Le centre de masse d'un atome subit un potentiel mécanique proportionnel à l'intensité locale du champ électrique. L'utilisation de champs lasers permet ainsi une synthèse souple et variée de potentiels mécaniques. Si l'atome est suffisamment refroidi pour que sa longueur d'onde de De Broglie soit de l'ordre de la longueur caractéristique de variation du potentiel, sa dynamique doit être décrite dans le cadre de la mécanique quantique. L'utilisation d'atomes refroidis par lasers permet d'étudier expérimentalement (grâce entre autre aux techniques de mesure de vitesse atomique par spectroscopie) une grande variété de dynamiques quantiques. La dynamique du centre de masse atomique est décrite par une fonction d'onde, notée Ψ , dont le module au carré $|\Psi|^2$ exprime la densité de probabilité de présence et dont l'évolution est déterminée par l'équation linéaire de Schrödinger. Dans les expériences utilisant des atomes refroidis, la dissipation est maîtrisée et considérée comme nulle sur le temps de l'expérience (de l'ordre de la milli-seconde).

1.2 Réseau incliné et Base de Wannier-Stark

Nous nous intéressons à la dynamique unidimensionnel dans un réseau incliné, formé d'un potentiel périodique et d'un potentiel linéaire. Un tel potentiel est facilement réalisable à l'aide de champs lasers.

La dynamique d'un gaz parfait d'atomes refroidis dans un réseau incliné est très simple à décrire en employant la base des états propres du réseau incliné que nous décrivons ici brièvement. Le réseau incliné est composé d'une série de puits de potentiel périodiquement espacés. Pour les puits profonds, les états propres sont localisés dans les cuvettes de potentiel et sont appelés *états de Wannier Stark*. On note $\varphi_n(x)$ la fonction d'onde de l'état centré autour du puits numéro n et E_n l'énergie de l'état. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont ortho-normées entre elles.

Le réseau incliné est invariant par une translation conjointe espace-énergie correspondant à une translation d'un pas du réseau et à une translation d'énergie égale à F . Cette symétrie se retrouve dans les états propres : $E_{n+1}^l = E_n^l + F$ et $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x - d)$ où d est le pas du réseau. Ainsi, de proche en proche, les états localisés $\varphi_n(x)$ se répartissent sur une échelle linéaire d'énergie, de pas F . Ces deux propriétés de symétrie font tout l'intérêt de ce système.

Si l'on restreint la description de la dynamique quantique dans un réseau incliné aux seuls états localisés, la dynamique est alors celle d'un système quantique d'états d'énergie équidistants (comme ceux de l'oscillateur harmonique) ayant tous une fonction d'onde identique à une translation près (comme

dans le cas d'un réseau profond). Le réseau incliné combine ainsi les avantages de ces deux potentiels "standarts". Ce système simple permet de mettre en évidence des phénomènes dynamiques remarquables dûs aux cohérences quantiques comme les "oscillations de Bloch" [1].

1.3 Condensat de Bose-Einstein (CBE)

La condensation de Bose Einstein est l'accumulation macroscopique de particules bosoniques – de spin entier – dans l'état fondamental d'un puits de potentiel. Cet effet d'origine quantique a été mis en évidence avec un gaz d'atomes refroidis. Comme le gaz atomique est dilué, la dynamique du gaz condensé (ou condensat) est correctement décrite à très basse température par une approche de type "champ moyen". Cette approche prends en compte les collisions entre bosons et décrit le gaz condensé par une fonction d'onde unique [2].

Nous nous intéressons à la dynamique d'un CBE placé dans un réseau incliné unidimensionnel. Expérimentalement, il est possible de se rapprocher de ce cas théorique en "confinant" condensat dans deux directions spatiales. L'équation d'évolution unidimensionnelle de la fonction d'onde du CBE dans le cadre de la théorie de champ moyen est :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} + V_0 \cos(kx) + Fx \right) \Psi(z, t) + g |\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t). \quad (1)$$

Les termes linéaires en ψ correspondent à l'équation de Schrödinger ; le terme non-linéaire décrit les collisions binaires comme un potentiel, répulsif ou attractif proportionnel à la densité de présence $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Le paramètre g caractérise l'importance des collisions entre particules traitées par la théorie de champ moyen, il traduit la non-linéarité du système. Le domaine d'étude est au carrefour de la mécanique quantique et de la physique non-linéaire.

2 Dynamique d'un CBE dans un réseau incliné

2.1 Modélisation à l'aide des états de Wannier-Stark

La dynamique d'un CBE est étudiée dans le cadre de la théorie de champ moyen en décomposant la fonction d'onde du condensat dans la base des états de Wannier Stark φ_n

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \varphi_n(x).$$

Les coefficients $c_n(t)$ sont les amplitudes instantanées de chaque état. L'évolution de la dynamique quantique est décrite par un système dynamique portant sur les amplitudes c_n .

$$i \frac{dc_n}{dt} = E_n c_n + \sum_{k,l,m} X_{0,k}^{l,m} c_{n+l} c_{n+k}^* c_{n+m}. \quad (2)$$

Les termes de couplage non-linéaires dépendent d'une intégrale de recouvrement entre quatre états propres

$$X_{n,p}^{o,q} \equiv g \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_o(x) \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx. \quad (3)$$

L'intégrale $X_{n,p}^{o,q}$ traduit l'amplitude de probabilité que deux atomes initialement dans les états φ_o et φ_q transitent vers les états φ_p et φ_n sous l'effet d'une collision binaire. D'après les propriétés de symétrie du réseau incliné, les intégrales de recouvrement (3) sont invariantes par permutation et/ou par translation globale des indices.

Les fonctions d'onde des états de Wannier Stark étant fortement localisées dans le réseau incliné, il est évident que les intégrales de recouvrement (3) impliquant des fonctions d'onde localisées dans des puits éloignés seront faibles comparées à celles impliquant quatre fonctions d'onde localisées dans le même puits

$X_{0,0}^{0,0}$. Les collisions binaires entre particules dans le même état de Wannier Stark sont donc dominantes. En ne prenant en compte que les collisions dominantes dans le système dynamique (2), les équations se découpent et ont pour solutions $c_n(t) = c_n(0) \exp -i\omega_n t$ où

$$\omega_n \equiv E_n + X_{0,0}^{0,0} |c_n(0)|^2. \quad (4)$$

La population de chaque état est constante au cours du temps. L'effet du terme non-linéaire dominant $X_{0,0}^{0,0}$ est un déplacement du niveau d'énergie, proportionnel à la population de l'état. Cet effet nouveau est similaire à l'effet Kerr optique qui modifie l'indice de réfraction du milieu proportionnellement à l'intensité lumineuse.

Pendant, la restriction de la description de la dynamique aux termes dominants $X_{0,0}^{0,0}$ n'est pas correcte. En effet, le déplacement de niveaux permet l'apparition de dégénérescences accidentelles entre niveaux voisins. Dans ces cas les termes non-linéaires suivant vont introduire un couplage important qu'il faut prendre en compte. La dynamique est par contre bien décrite par le système dynamique (2) en ne prenant en compte que les collisions entre particules d'un même puits $X_{0,0}^{0,0}$ et les collisions transférant une particule dans un puits voisin $X_{0,0}^{1,0}$.

2.2 Formulation hamiltonienne et théorème Kolmogorov Arnold Moser

Il est intéressant d'introduire un changement de variable faisant apparaître explicitement les populations des états puisque celles-ci sont constantes lorsque les transferts d'atomes par collisions entre puits voisins sont négligeables. Nous posons donc $c_n(t) \equiv \sqrt{I_n(t)} e^{i\theta_n(t)}$, les variables I_n et θ_n représentant alors la population et la phase de l'état $\varphi_n(x)$. L'ensemble des populations I_n et des phases θ_n forme un *espace des phases classique*, c'est à dire un espace dans lequel le système est représenté à tout instant par un point unique. L'évolution dynamique du CBE décrit une trajectoire dans cet espace. Le système d'équations différentielles décrivant la dynamique dans cet espace des phases se met sous une forme canonique

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{dH(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})}{d\theta_n}; \quad \frac{d\theta_n}{dt} = -\frac{dH(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})}{dI_n}$$

où l'on a introduit un hamiltonien

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = \underbrace{\sum_n (E_n I_n + X_{0,0}^{0,0} I_n^2)}_{H_0(\mathbf{I})} + X_{1,0}^{0,0} \underbrace{\sum_n \sqrt{I_n I_{n+1}} (I_n - I_{n+1}) \cos(\theta_n - \theta_{n+1})}_{H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})}. \quad (5)$$

Dans cette formulation les populations et les phases forment un ensemble canonique de variables conjuguées. Ainsi, l'introduction d'une base d'états adaptée, permet de représenter la **dynamique quantique** par un **système hamiltonien classique**. Il existe ainsi une analogie possible entre la dynamique quantique d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné et la dynamique classique d'une chaîne d'oscillateurs non-linéaires couplés.

Le système dynamique décrit par $H_0(\mathbf{I})$ est intégrable et les solutions sont $I_n(t) = I_n(0)$ et $\theta_n(t) = \theta_n(0) - \omega_n I_n(0)$. Les populations I_n sont des intégrales premières du mouvement. Les fréquences déplacées (4) correspondent à $\omega_n = \frac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial I_n}$.

Le paramètre $X_{0,0}^{1,0}$ traduit le caractère perturbatif du second terme du hamiltonien (5), il dépend des propriétés du condensat et des paramètres du réseau incliné (expérimentalement modifiable). Lorsque $|X_{0,0}^{1,0}| \ll X_{0,0}^{0,0}$ le système est proche d'un système intégrable, il est qualifié de *quasi-intégrable*.

Selon le *théorème Kolmogorov Arnold Moser* (KAM), si le système est "suffisamment proche" du système intégrable, la grande majorité des trajectoires sont stables, régulières et identifiables aux trajectoires faiblement déformées du système intégrable [3]. La condition d'existence de ces trajectoires dépend d'un critère de non dégénérescence entre les fréquences (4). Les trajectoires sont alors *passantes i.e.* la différence de phase entre deux amplitudes d'états de Wannier-Stark est non-bornée. Lorsque les fréquences déplacées (4) sont non-dégénérées, les termes de perturbations ont une faible influence.

Pour les trajectoires dites *résonnantes* correspondant à des fréquences déplacées (4) presque linéairement dépendantes. Des phénomènes d'accrochage de phases entre états voisins apparaissent au sein d'îlots de résonance aisément identifiables sur une section de Poincaré. Les populations et les phases des états couplés oscillent de manière synchrone. Lorsque ces îlots correspondent à une dégénérescence entre deux fréquences déplacées, un modèle simple à deux états donne une description analytique fidèle de la dynamique. Au voisinage des îlots de résonances, des dynamiques quasi-périodiques ou même chaotiques apparaissent. Nous pouvons ainsi mettre en évidence du **chaos** au sens **classique** dans la **dynamique** d'un objet **quantique** [4].

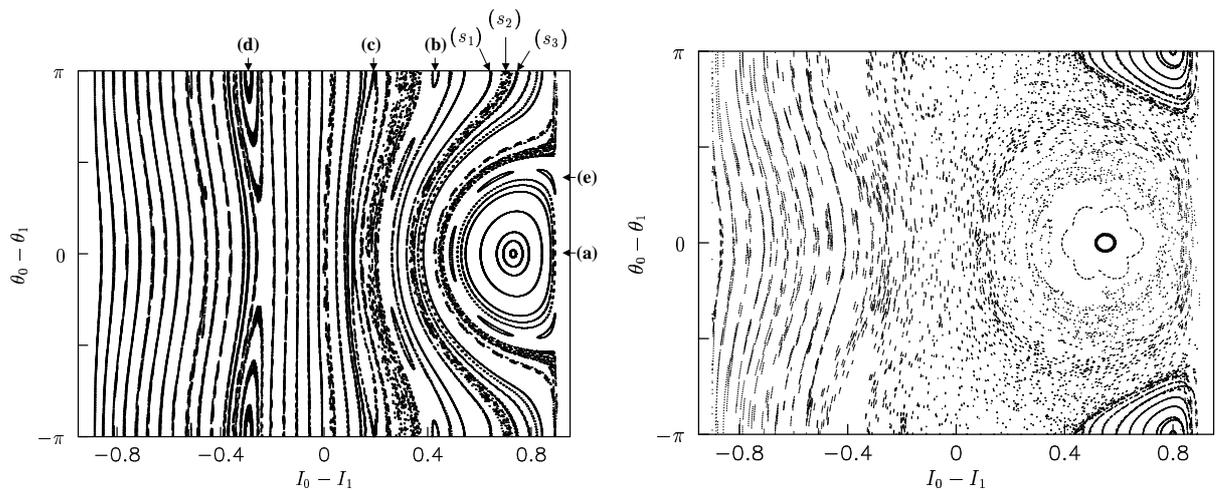


Fig.1. Section de Poincaré : La figure représente les intersections des trajectoires de l'espace des phase avec le plan défini par $I_{-1} = 0, 1$, $\theta_0 - \theta_{-1} = 0$ et $I_{|n|>1} = 0$.

Deux exemples de section de Poincaré sont présentés sur la Figure 1. Sur la section de gauche, la plupart des points d'intersections se répartissent sur des courbes régulières, identifiables aux trajectoires passantes et résonnantes. Le plus grand îlot de résonance – repéré par l'étiquette (a) – correspond à la dégénérescence entre les fréquences déplacées $\omega_1 - \omega_0 = 0$ soit pour $I_0 - I_1 = \frac{F}{X_0}$. Les autres îlots de résonance (b), (c) et (d), plus étroits que (a), correspondent à des combinaisons linéaires plus complexes entre les fréquences déplacées, respectivement $(\omega_0 - \omega_{-1}) + 3(\omega_0 - \omega_1) = 0$, $\omega_{-1} - \omega_0 + \omega_1 = 0$ et $(\omega_0 - \omega_{-1}) + (\omega_0 - \omega_1) = 0$. Les nuées de points irrégulièrement réparties (s_2 par exemple) entourées de trajectoires régulières (s_1 et s_3) ne sont pas le fait d'une imprécision numérique, ils traduisent une dynamique quasi-périodique.

Lorsque la pente F du réseau incliné diminue, l'îlot de résonance principale rentre plus dans le plan de la section et les nuées de points s'enroulent autour de la résonance. Parallèlement, l'influence des termes de perturbation augmente, couplant de manière plus forte les îlots de résonance secondaires, le nombre et la taille des nuées de points croissent jusqu'à se rejoindre et former une vaste "mer" de points d'intersection comme le représente la figure de droite.

L'évolution temporelle de $I_0(t)$ ainsi que le spectre de Fourier de l'amplitude $c_0(t)$ correspondant à une trajectoire de la "mer" de points sont représentés sur la Figure 2. L'évolution aléatoire de la population $I_0(t)$ et le spectre de Fourier continue de l'amplitude $c_0(t)$ démontre le caractère chaotique des trajectoires issues de la mer de points. Il est le fait d'une "hésitation" du système entre deux trajectoires possibles : passante, contournant la résonance et résonante, entourant la résonance. Les grandes oscillations de population correspondent à l'enroulement autour de la résonance et les petites, au contournement de la résonance. Ces trajectoires chaotiques apparaissent à l'interface entre îlots de résonance et trajectoires passantes. La dynamique du CBE présente une oscillation chaotique de population entre les états couplés.

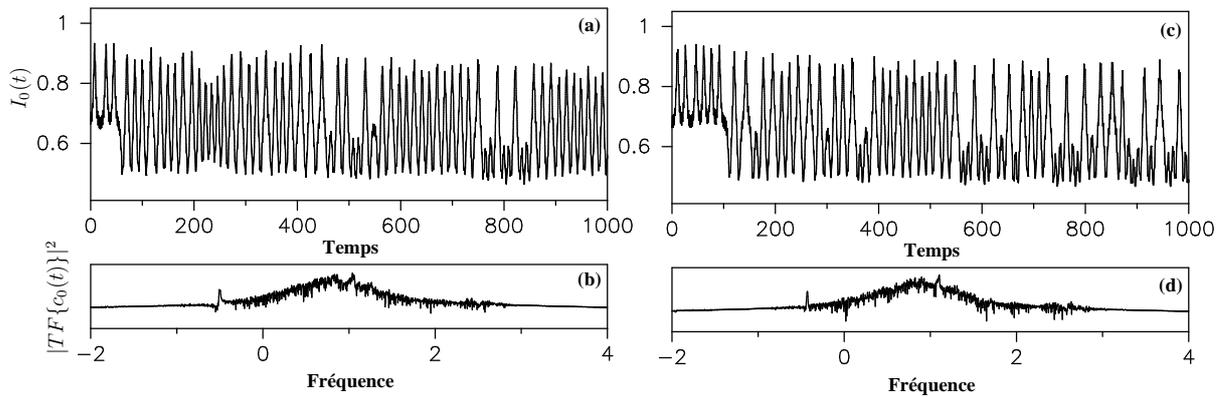


Fig.2. Évolution chaotique de l'intensité : Les figures (a) et (c) représentent l'évolution temporelle de $I_0(t)$ calculée respectivement par une intégration numérique du modèle discret (5) et de l'équation de Gross Pitaevskii (1). Les figures (b) et (d) représentent les spectres de puissance de l'amplitude $c_0(t)$. L'évolution chaotique de l'intensité se traduit par un spectre de fréquence continu.

2.3 Conclusion

En utilisant une décomposition de la fonction d'onde sur les états de Wannier Stark, nous avons montré l'analogie formelle entre la dynamique quantique du condensat dans un réseau incliné et la dynamique d'une chaîne d'oscillateurs non-linéaires classiques couplés. Ce rapprochement, qui est le point clef de notre description, nous a permis d'étudier la dynamique d'un CBE en utilisant les outils standards de la dynamique hamiltonienne classique. Dans le cadre de cette démarche originale, nous avons pu mettre en évidence des phénomènes purement non-linéaires de la dynamique quantique tels que l'accrochage de phase entre états voisins où l'évolution chaotique au sens classique des populations des états. Ces dynamiques ont alors pu être en partie interprétées à l'aide de la représentation simple des fréquences déplacées.

L'observation de dynamique chaotique classique avec un condensat de Bose Einstein n'est sûrement pas particulière au réseau incliné, l'image des fréquences déplacées doit permettre d'identifier de tels comportements dynamiques dans bien d'autres configurations de potentiel. Il n'est pas difficile d'imaginer par exemple des dynamiques chaotiques dues aux couplages entre les états du potentiel harmonique transverse de confinement.

Il est intéressant de remarquer en conclusion que la mise en évidence d'évolutions chaotiques des amplitudes des états quantiques du condensat est un phénomène nouveau, preuve de la passerelle lancée entre mécanique quantique et physique non-linéaire par l'étude des gaz atomiques quantiques.

Références

1. F. BLOCH, Über die Quantenmechanik der electronen in Kristallgittern, *Z. Phys.* , **52**, 555 (1928).
2. F. DALFOVO AND S. GIORGINI AND L. P. PITAEVSKII AND S. STRINGARI, Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases, *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 463 (1999).
3. V. I. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, *Éditions de Moscou*, (1974).
4. Q. THOMMEN, J.C. GARREAU, AND V. ZEHLÉ, Classical Chaos with Bose-Einstein Condensates in Tilted Optical Lattices, *Phys. Rev. Lett.* , **91**, 210405 (2003).

