

Une nouvelle famille de systèmes chaotiques minimaux équivariants par rotation de π autour d'un axe

Jean-Marc Malasoma

Laboratoire Géomatériaux, DGCB URA CNRS 1652
ENTPE, Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx en Velin Cedex
malasoma@entpe.fr

Résumé. Nous montrons l'existence d'une nouvelle classe de systèmes tridimensionnels, équivariant sous l'action d'une rotation d'angle π autour d'un axe et présentant une structure algébrique minimale autorisant une dynamique chaotique. Nous énoncerons les premiers résultats obtenus en effectuant une analyse topologique des attracteurs chaotiques observés. Nous montrerons, en particulier, qu'une description fine de cette topologie nécessite l'emploi d'une dynamique symbolique utilisant un alphabet contenant 8 symboles.

1 Introduction

Quarante années après la découverte du premier système chaotique par Lorenz [1], la détermination des conditions minimales d'apparition du chaos, dans un système d'équations différentielles, demeure un problème largement ouvert. Les premières tentatives pour trouver un système chaotique algébriquement plus simple sont dues Rössler [2]. En 1976 il propose un premier modèle, constitué toujours de sept monômes mais cette fois un seul d'entre eux est nonlinéaire. Depuis cette époque de nombreux systèmes chaotiques ont été décrits et étudiés dans la littérature spécialisée, mais ce n'est qu'en 1997 que Heideel et Zhang [3] obtiennent le premier résultat donnant des bases rigoureuses à cette recherche. Ils démontrent qu'en dimension trois, aucun système quadratique ne peut être chaotique s'il n'est pas constitué d'au moins cinq monômes dont une nonlinéarité. La même année Sprott [4] montre que ces conditions nécessaires sont en fait suffisantes, en exhibant deux modèles chaotiques équivalents présentant une structure minimale. Enfin plus récemment [5], nous avons décrit sept nouveaux systèmes chaotiques minimaux et nous avons prouvé que ces systèmes ainsi que les deux de Sprott peuvent être regroupés en deux classes d'équivalence en utilisant la C^k -équivalence des flots.

Toutefois, le modèle de Lorenz présente une invariance par rotation d'angle π autour de l'axe Oz , ce qui ne peut pas être le cas des modèles minimaux appartenant aux deux classes que l'on vient d'évoquer. Pour cette raison, nous avons récemment entrepris de déterminer mathématiquement l'ensemble des systèmes quadratiques équivariants sous l'action de la rotation $R_z(\pi)$ et présentant une structure algébrique minimale autorisant une dynamique chaotique. Nous présentons dans cet article, une partie des résultats obtenus lors de cette étude.

2 Systèmes chaotiques connus équivariant par $R_z(\pi)$

Considérons un système quadratique tridimensionnel équivariant sous l'action d'une rotation d'angle π autour d'un axe. On peut, sans perte de généralité, supposer que cet axe est l'axe Oz et que par conséquent la symétrie en jeu est la rotation $R_z(\pi)$. Dans ces conditions, la forme la plus générale pour un tel système est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3xz + a_4yz \\ \dot{y} = b_1x + b_2y + b_3xz + b_4yz \\ \dot{z} = c_0 + c_1z + c_2x^2 + c_3xy + c_4y^2 + c_5z^2 \end{cases} \quad (1)$$

S'il n'y a pas de nonlinéarités dans les deux premières équations, c'est-à-dire si $a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0$, alors x et y sont solutions d'un système différentiel bidimensionnel, par conséquent ces variables ne peuvent

pas être chaotiques en vertu du théorème de Poincaré-Bendixon. De façon similaire, si $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, z est solution d'une équation monodimensionnelle et en vertu du même théorème ne présentera pas de comportement chaotique. En conséquence, un tel système ne pourra être chaotique que s'il contient au moins une nonlinéarité dans l'une de ses deux premières équations et une nonlinéarité différente de z^2 dans la troisième.

Cette condition nécessaire est en fait suffisante comme le montre un certain nombre de systèmes chaotiques déjà décrits dans la littérature. Le premier d'entre eux est bien évidemment le célèbre système de Lorenz [1] qui comporte sept monômes dont deux sont quadratiques :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

En 1980, Shimizu et Morioka [6] ont proposé un nouveau modèle chaotique présentant une structure algébriquement plus simple que celle du système de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \mu y - xz \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 \end{cases} \quad (3)$$

En 1981, Shaw [7] a décrit un modèle chaotique trouvé en collaboration avec Burke. Ce système, comporte les mêmes nonlinéarités que celui de Lorenz, mais il a la même complexité que le système de Shimizu and Morioka :

$$\begin{cases} \dot{x} = -Sx - Sy \\ \dot{y} = -y - Sxz \\ \dot{z} = V + Sxy \end{cases} \quad (4)$$

En 1994, Sprott [8] a trouvé cinq systèmes chaotiques constitués de seulement cinq monômes dont deux quadratiques. Deux de ces systèmes sont dissipatifs et équivariants par $R_z(\pi)$. Le premier est connu sous le nom de système de Sprott B :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = 1 - xy \end{cases} \quad (5)$$

Le second est le système de Sprott C :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = 1 - x^2 \end{cases} \quad (6)$$

Ces deux systèmes présentent la structure algébrique minimale autorisant un comportement chaotique.

En 2000, Van der Schrier et Maas [9] ont obtenu une version simplifiée du modèle de Lorenz dans la limite dans grands nombres de Rayleigh et de Prandtl. Ce système possède encore des solutions chaotiques, mais il présente une structure algébrique minimale :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -xz \\ \dot{z} = R + xy \end{cases} \quad (7)$$

Enfin, en 2002, Lü et Chen [10] ont décrit un système chaotique très similaire à celui de Burke et Shaw. Seul le terme constant du modèle de Burke et Shaw est remplacé par un terme proportionnel à la variable z :

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (8)$$

Ces exemples, prouvent que deux nonlinéarités bien placées, suffisent pour obtenir des systèmes chaotiques équivariants par $R_z(\pi)$, à condition toutefois qu'ils contiennent suffisamment de termes linéaires ou constants. En échangeant au besoin le nom des variables x et y , ce qui n'affecte pas le nom de l'axe de rotation, on peut sans perte de généralité, supposer que les deux nonlinéarités nécessaires et suffisantes appartiennent à la seconde et à la troisième équation. Tous les systèmes précédents, à l'exception des deux systèmes de Sprott, s'écrivent déjà sous cette forme.

Si on utilise cette convention, les systèmes de Sprott B et de Sprott C s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = 1 - xy \end{cases} \quad (9)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = 1 - y^2 \end{cases} \quad (10)$$

Sous cette forme canonique, il devient évident que le système de Van der Schrier et Maas (en changeant y en $-y$) est une généralisation à un paramètre du système de Sprott B. De plus, tous ces exemples possèdent la même nonlinéarité xz dans la seconde équation. Écrit sous forme canonique, le système de Sprott B constitue un exemple de système chaotique équivariant sous l'action de $R_z(\pi)$ présentant une structure minimale avec la nonlinéarité supplémentaire xy . De même, le système de Sprott C fournit un exemple de système chaotique à structure minimale avec la nonlinéarité supplémentaire y^2 . Enfin, le seul système chaotique connu et équivariant sous l'action de $R_z(\pi)$ qui possède la nonlinéarité x^2 est celui de Shimizu et Morioka, sa structure algébrique n'est toutefois pas minimale.

3 Nouveau système à structure minimale équivariant par $R_z(\pi)$

Les conclusions de la section précédente, ouvrent la possibilité de trouver une nouvelle famille de systèmes chaotiques équivariants sous l'action de $R_z(\pi)$ et présentant une structure algébrique non encore décrite dans la littérature spécialisée. Si l'on impose la nonlinéarité x^2 dans la troisième équation, on peut montrer [11] qu'il n'existe que quatre types de systèmes dissipatifs non trivialement non chaotiques. Ces quatre types peuvent être classés par paires que nous allons analyser successivement.

La première de ces paires est constituée des deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_2y \\ \dot{y} = b_6xz \\ \dot{z} = c_0 + c_3z + c_4x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = a_2y \\ \dot{y} = b_1x + b_6xz \\ \dot{z} = c_3z + c_4x^2 \end{cases} \quad (11)$$

Ils sont équivalents par un changement de variables linéaire, de plus ils ne peuvent pas être chaotiques. En effet, à partir du premier d'entre eux, on obtient facilement :

$$b_6z\ddot{z} = b_6c_3z\dot{z} + 2a_2c_4y\dot{y} \quad (12)$$

c'est-à-dire :

$$\dot{S}_1 = -z^2 \quad (13)$$

où, S_1 est une fonction du temps par l'intermédiaire des variables x , y , et z , définie par la relation :

$$S_1(x, y, z) = b_6c_3z^2 + 2a_2c_4y^2 - b_6z(c_0 + c_3z + c_4x^2) \quad (14)$$

S_1 étant une fonction monotone décroissante, elle possède une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque t tend vers l'infini. Si L est finie, alors le comportement asymptotique se situe sur la surface bidimensionnelle $S_1 = L$, par conséquent le théorème de Poincaré-Bendixon interdit tout comportement chaotique. Si $L = -\infty$ alors au moins une des trois variables n'est pas bornée par conséquent n'est pas chaotique.

L'autre paire de systèmes est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y \\ \dot{y} = b_6xz \\ \dot{z} = c_0 + c_4x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = a_2y \\ \dot{y} = b_2y + b_6xz \\ \dot{z} = c_0 + c_4x^2 \end{cases} \quad (15)$$

Ces deux systèmes sont à leur tour équivalents par un changement de variables linéaire. Il suffit par conséquent de ne considérer que le premier qui s'écrit en simplifiant les notations de ses coefficients :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cxz \\ \dot{z} = d + ex^2 \end{cases} \quad (16)$$

avec $a < 0$ pour que le système soit dissipatif et $de < 0$ afin d'avoir deux points fixes n'appartenant pas à l'axe de rotation. On obtient facilement :

$$z\ddot{z} + 2ea^2x\dot{x} - 2eax\ddot{x} - 2eb^2y\dot{y} = 0 \quad (17)$$

La fonction S_2 définie par :

$$S_2(x, y, z) = bcdz + 2abey - a^2ex^2 - b^2ey^2 + bce x^2 \quad (18)$$

possède alors la dérivée par rapport au temps :

$$\dot{S}_2 = bc\dot{z}^2 - 2ae\dot{x}^2 \quad (19)$$

Si $abce < 0$ cette dérivée garde un signe constant, par conséquent S_2 est monotone donc possède une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque t tend vers l'infini. Comme précédemment, on en déduit que ce système n'est pas chaotique.

Considérons maintenant le cas $abce > 0$. Comme $a < 0$ cela signifie que $bce < 0$ c'est-à-dire $bcd > 0$ puisque $de < 0$. En utilisant alors les changements d'échelle suivants :

$$\begin{cases} t = (bcd)^{-1/3}\tau \\ x = \sqrt{-d/e}X \\ y = d\sqrt{-c(be)^{-1}(bcd)^{-1/3}}Y \\ z = d(bcd)^{-1/3}Z \end{cases} \quad (20)$$

On obtient le système à un paramètre :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\alpha X + Y \\ \dot{Y} = XZ \\ \dot{Z} = 1 - X^2 \end{cases} \quad (21)$$

où $\alpha > 0$.

4 Un nouvel exemple de système chaotique minimal équivariant par $R_z(\pi)$

Nous allons maintenant montrer, en utilisant des simulations numériques, que le système à structure minimale identifié dans la section précédente, possède bien des solutions chaotiques.

Par exemple, pour $\alpha = 0.88$, les conditions initiales $(x, y, z) = (1.21, 0, -1.67)$ conduisent à un cycle limite stable. Afin d'étudier les bifurcations que subit ce cycle lorsque α diminue, nous avons utilisé la section de Poincaré Σ définie par :

$$\Sigma = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > 0\} \quad (22)$$

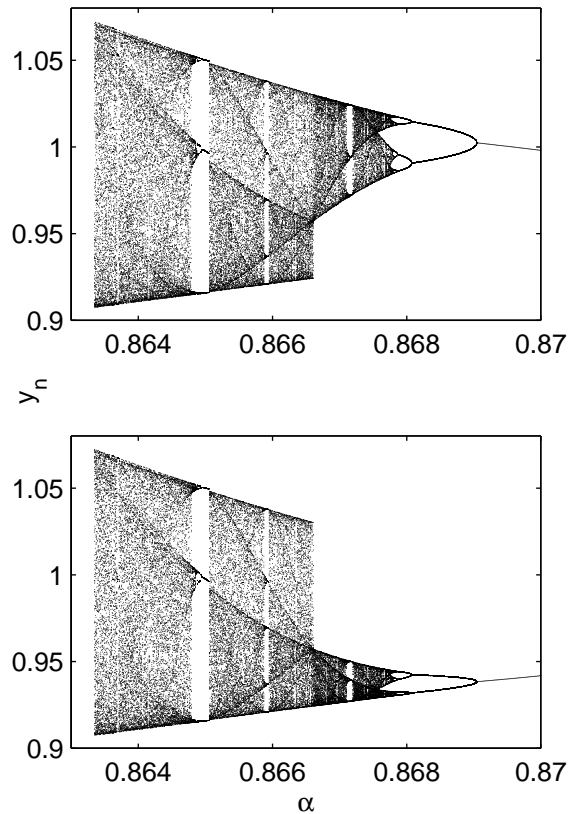


Fig.1. Pour $\alpha = 0.87$ le diagramme du haut commence par un cycle limite stable tandis que celui du bas commence par le cycle limite qui se déduit du précédent par la rotation $R_z(\pi)$

Le diagramme de bifurcation obtenu de cette façon est représenté sur la figure 1. Il à été calculé en diminuant la valeur du paramètre à partir de $\alpha = 0.87$, valeur pour laquelle deux cycles stables coexistent.

On trouvera une description détaillée de l'ensemble des bifurcations observables sur ce diagramme dans [12]. Pour $\alpha < 0.8666\dots$, le système possède un unique attracteur chaotique équivariant sous l'action de la rotation $R_z(\pi)$. Un portrait de phase de cet attracteur est représenté sur la partie gauche de la figure 2 pour $\alpha = 0.86335$ un peu au dessus de la crise frontalière. Les exposants de Lyapunov de cet attracteur sont $\lambda_1 = 0.0997$, $\lambda_2 = 0$, and $\lambda_3 = -0.9630$. l'application de premier retour représentée sur la partie droite de la figure 2, montre que cette application est multimodale à quatre branches. par conséquent, en première approximation, une analyse topologique de cet attracteur conduit à un gabarit à quatre branches, ainsi qu'à une dynamique symbolique utilisant un alphabet à quatre symbole [12]. Une analyse plus fine de cette topologie, révèle qu'en fait chacune des quatre branches est double, comme on peut le suspecter en regardant l'application de premier retour au voisinage du point critique proche de $y_n = 1$. Le gabarit possède alors huit branches et la dynamique symbolique utilise un alphabet à huit symboles [12].

Enfin ce système donne un nouvel exemple [12] de mécanisme conduisant, lorsqu'un paramètre varie, un attracteur chaotique inclus dans un tore de genre 1, a donner naissance à une paire d'attracteurs chaotiques, symétriques l'un de l'autres et entrelacés. Chacun de ces deux attracteurs étant eux mêmes contenus dans un tore de genre 1. Ce mécanisme dit de pérestroika à été décrit récemment dans [13].

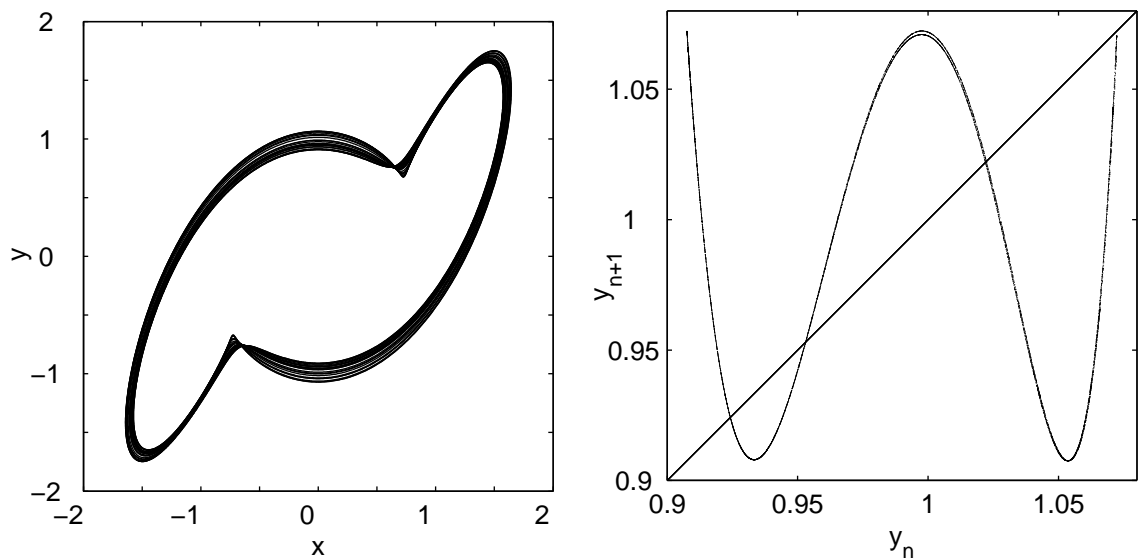


Fig.2. Portrait de phase de l'attracteur chaotique pour $\alpha = 0.86335$ et son application de premier retour.

5 Conclusion

Nous avons prouvé l'existence d'une nouvelle classe de systèmes tridimensionnels, équivariants sous l'action d'une rotation d'angle π autour d'un axe. Ces systèmes sont quadratiques et présentent la structure algébrique la plus simple qui permet l'existence de solutions chaotiques. Une description fine de la topologie des attracteurs chaotiques observés dans ces systèmes, nécessite l'emploi d'une dynamique symbolique utilisant un alphabet contenant 8 symboles.

Références

1. E.N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141 (1963).
2. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
3. F. ZHANG & J. HEIDEL, Non-chaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems, *Nonlinearity*, **10**, 1289-1303 (1997).
4. J.C. SPOTT, Simplest dissipative chaotic flow, *Physics letters A*, **228**, 271-274 (1997).
5. J.M. MALASOMA, A new class of minimal chaotic flows, *Physics letters A*, **305**, 52-58 (2002).
6. T. SHIMIZU & N. MORIOKA, On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model, *Physics Letters A*, **76**, 201-204 (1980)
7. R. SHAW, *Z. Naturforsch.*, **36**, 80-112 (1981)
8. J.C. SPOTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50** (2), R647-650 (1994)
9. G. VAN DER SCHRIER & L.R.M. MAAS. The diffusionless Lorenz equations; Shilnikov bifurcations and reduction to an explicit map, *Physica D*, **141**, 19-36 (2000)
10. J. LÜ & G. CHEN, A new chaotic attractor coined, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12** (3), 659-661 (2002)
11. J.M. MALASOMA, A classification of minimal chaotic flows equivariant by rotation of π around an axis, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, à soumettre (2006).
12. J.M. MALASOMA, A new family of minimal chaotic flows equivariant by rotation of π around an axis, *Physical Review E*, soumis (2006).
13. C. LETELLIER, T.D. TSANKOV, G. BYRNE & R. GILMORE, Large-scale structural reorganization of strange attractors, *Physical Review E*, **72**, 026212 (2005).