

# Observation et contrôle du chaos hamiltonien dans les interactions ondes-particules

A. Macor & F. Doveil

Turbulence Plasma, PIIM, UMR6633 CNRS/Université de Provence, Centre de Saint Jérôme, case 321, Avenue Escadrille Normandie-Niémen, 13397 Marseille cedex 20

macor@up.univ-mrs.fr, doveil@up.univ-mrs.fr

**Résumé.** On injecte un faisceau d'électrons de faible intensité dans un tube à onde progressive. Celui-ci interagit avec les ondes émises par un générateur de forme d'onde arbitraire. On relie la dispersion de la fonction de distribution en vitesses des électrons mesurée à la sortie du tube à la transition au chaos pour le mouvement de particules dans un spectre d'ondes. Une stratégie de contrôle du chaos a ainsi pu être mise à l'épreuve.

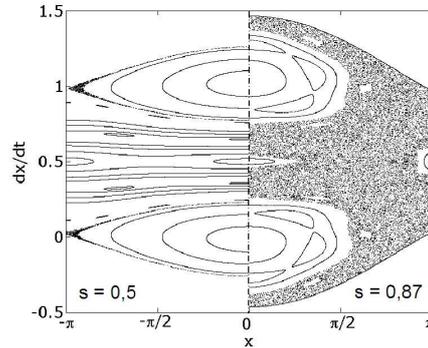
**Abstract.** A low intensity electron beam is injected in a travelling wave tube. It interacts with waves launched from an arbitrary waveform generator. We relate the measured spread of the electron velocity distribution function at the outlet of the tube to the transition to large scale chaos for the electron dynamics in a spectrum of waves. A new strategy for control of Hamiltonian chaos could thus be tested.

Les interactions ondes-particules sont au coeur du fonctionnement des tubes électroniques [1,2]. Un Tube à Onde Progressive (TOP) de grande longueur permet de simuler avantageusement le système faisceau-plasma, paradigme de la turbulence plasma [3,4]. Quand des ondes sont injectées extérieurement dans le TOP et que l'intensité du faisceau est suffisamment faible pour ne pas induire de croissance significative des ondes, les électrons du faisceau jouent le rôle de particules tests évoluant dans le potentiel des ondes.

Le mouvement d'une particule chargée dans le potentiel d'une seule onde est intégrable et identifiable au classique pendule non linéaire. Une particule, dite "résonante", de vitesse moyenne proche de la vitesse de phase de l'onde  $v_\phi$ , peut être piégée au fond d'un puits de potentiel de l'onde et effectuer des oscillations de piégeage (libration du pendule). Une particule « non résonante », beaucoup plus rapide ou plus lente que l'onde, verra sa vitesse osciller autour de sa vitesse moyenne (rotation du pendule). Une courbe, la séparatrice, sépare ces deux types de mouvement dans l'espace de phase. Ne peuvent être piégées dans l'onde que les particules dont la vitesse initiale diffère de  $v_\phi$  de moins de  $\delta v = 2\sqrt{|\eta|\phi}$  où  $\eta$  désigne le rapport de la charge à la masse de la particule et  $\phi$  est l'amplitude du potentiel de l'onde. En présence d'une deuxième onde de vitesse de phase différente  $v'_\phi$ , le mouvement de la particule est non intégrable. On introduit le paramètre de recouvrement de résonances  $s = (\delta v + \delta v')/|v_\phi - v'_\phi|$ . Si  $s \ll 1$ , les orbites de la particule restent régulières et le théorème de Poincaré-Birkhoff [5] prévoit que des résonances secondaires apparaissent et confèrent à l'espace de phase une structure fractale, comme on le voit sur la moitié gauche de la Fig. 1. Si  $s \geq 1$ , le chaos grande échelle apparaît avec la destruction des derniers tores de KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [6], comme on le voit sur la moitié droite de la Fig. 1.

L'injection d'un faisceau test dans le TOP a récemment permis d'observer la synchronisation non linéaire de particules non résonantes par une onde isolée [7], à la base de l'amortissement Landau dans les plasmas. Pour un faisceau résonant, le piégeage peut être observé [8]. En présence de deux ondes, le recouvrement de résonances conduit à la transition au chaos grande échelle [9,10] avec mise en évidence de « l'escalier du diable » traduisant la structure fractale de l'espace de phase [11]. Même lorsqu'une seule fréquence est excitée, la transition associée au recouvrement de résonances entre le mode d'hélice et le mode faisceau oscillant à la même fréquence a pu être observée. C'est dans ces conditions qu'une nouvelle stratégie de contrôle du chaos hamiltonien a été mise en oeuvre avec succès [12].

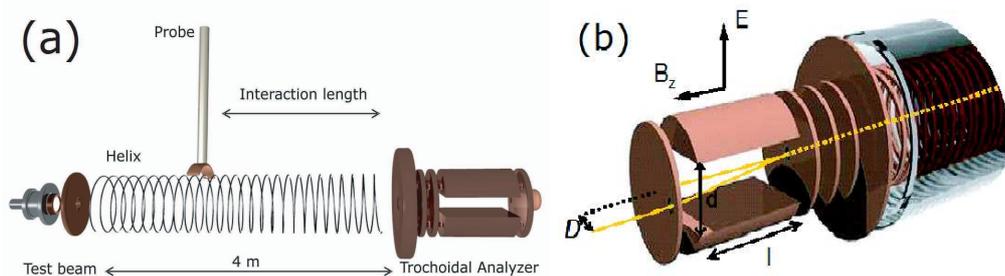
Dans la section 2, le principe des mesures est brièvement rappelé. La section 3 dresse un tableau des résultats obtenus dans cette configuration. Les conclusions et perspectives sont énoncées en section 4.



**Fig.1.** Section de Poincaré pour 26 conditions initiales de la dynamique régie par  $\ddot{x} = -\varepsilon(\sin(x) + \sin(x - t))$ . La moitié gauche pour  $\varepsilon = 1/64$  ( $s = .5$ ) exhibe des chaînes d'îlots de resonances secondaires aux vitesses rationnelles  $m/(n + m)$ ; la moitié droite pour  $\varepsilon = 3/64$  ( $s = .87$ ) exhibe du chaos grande échelle.

## 1 Faisceau test dans un TOP

Les détails concernant le TOP ont déjà été publiés [8,9]. Il consiste en trois éléments principaux : un canon à électrons, une structure à onde lente constituée d'une hélice de 4 m de long, présentant un rayon de 11.3 mm et un pas de 0.8 mm, couplée capacitivement à 4 antennes mobiles le long de la structure, et un analyseur électrostatique trochoïdal. La Fig. 2a rappelle le principe des mesures. A l'entrée, on peut contrôler la vitesse initiale du faisceau d'une intensité de l'ordre de  $10nA$  émis par une cathode à oxyde devant une anode percée d'un trou circulaire dont le diamètre fixe celui du faisceau. Le faisceau est confiné le long de l'axe de l'hélice par un champ magnétique de 500 G. Avec une antenne, on peut exciter un spectre d'ondes dont on contrôle indépendamment la fréquence, l'amplitude et la phase. Pour chaque fréquence, la longueur d'onde du mode d'hélice (essentiellement longitudinal près de l'axe) est fixée par la relation de dispersion de l'hélice [9]. La position de l'antenne à la sortie de l'hélice fixe la longueur d'interaction du faisceau avec les ondes. A la sortie de l'hélice, un analyseur trochoïdal permet de reconstituer la fonction de distribution en vitesses du faisceau (moyennée en temps) après son interaction avec les modes propagés dans le dispositif. La Fig. 2b rappelle le principe de fonctionnement de l'analyseur qui utilise la dérive ExB du faisceau associée à la présence d'un champ électrique constant dans l'analyseur [13].



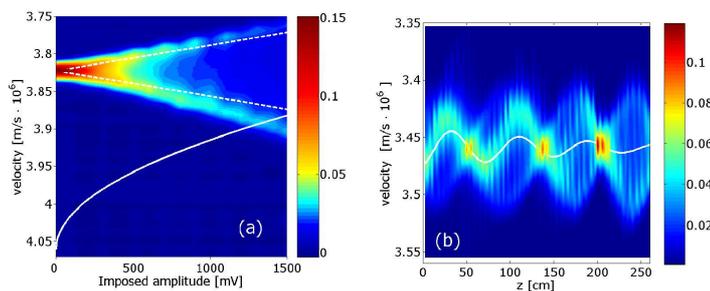
**Fig.2.** a) Principe de la mesure; b) Schéma de l'analyseur trochoïdal.

## 2 Résultats pour un faisceau test

Nous avons tout d'abord vérifié que le faisceau d'électrons se propage sans modification le long de l'axe de la machine.

## 2.1 Synchronisation du faisceau avec une onde non résonante

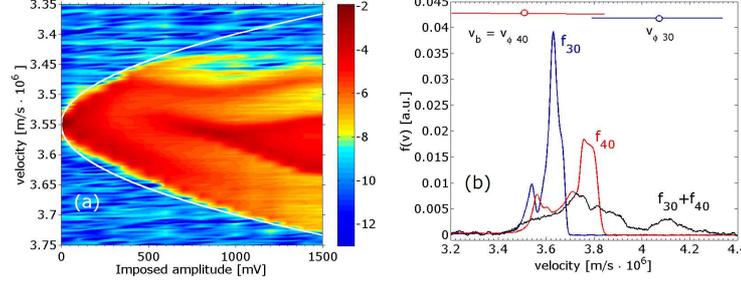
Dans cette expérience [7], on applique un signal de fréquence 30 MHz sur l'antenne. D'après la relation de dispersion de l'hélice, on excite ainsi une onde progressive de vitesse de phase  $v_\phi = 4.07 \cdot 10^6$  m/s. La Fig. 3a montre un contour 2D de la fonction de distribution en vitesses ( $fdv$ ) d'un faisceau test d'intensité  $I_b = 10$  nA et de vitesse initiale  $v_b = 2.5 \cdot 10^6$  m/s, mesurée à la sortie du tube après son interaction, sur une longueur de 0.5 m, avec le mode d'hélice. Il est le résultat d'une interpolation linéaire par MATLAB des mesures obtenues pour différentes amplitudes du signal appliqué variant de 0 mV à 1500 mV par pas de 100 mV. Quand l'amplitude augmente graduellement, le pic initial isolé du faisceau donne naissance à deux pics dont la séparation augmente. La ligne continue de la Fig. 3a donne une estimation de la limite basse de la zone de piégeage de l'onde qui varie comme la racine carrée de l'amplitude de l'onde  $\phi$ . Comme la vitesse initiale du faisceau est hors de cette zone, les électrons du faisceau subissent une simple modulation de leur vitesse d'amplitude  $\eta\phi/|v_\phi - v_b|$  autour de leur vitesse initiale  $v_b$ . Cette estimation est le résultat d'un calcul perturbatif du premier ordre en  $\phi$  autour du mouvement libre d'une particule de vitesse constante  $v_b$ . Une moyenne sur la phase initiale de l'électron par rapport à l'onde engendre deux pics aux vitesses maximum et minimum de l'électron pour sa fonction de distribution. Ces deux pics correspondent aux deux lignes pointillées de la Fig. 3a, symétriques autour de  $v_b$ . On observe une déviation systématique par rapport à cette estimation orientée vers  $v_\phi$  quand l'amplitude de l'onde augmente. Pour  $v_b$  plus grand que  $v_\phi$  nous observons aussi une déviation vers  $v_\phi$ . Cette déviation traduit une synchronisation des électrons avec l'onde. On peut l'expliquer en considérant le mouvement d'électrons tests dans le potentiel de l'onde, décrit par l'équation intégrable du pendule non linéaire classique.



**Fig.3.** Contour 2D de  $fdv$  d'un faisceau test dans une onde à  $v_\phi = 4.06 \times 10^6$  m/s : a) vs amplitude de l'onde (longueur d'interaction  $L = 0.5$  m) avec estimation au 1er ordre de la modulation (lignes) et zone de piégeage (demie parabole) ; b) vs distance du canon à l'antenne émettrice  $z$  (amplitude de l'onde  $\phi = 18$  mV) avec estimation au 2nd ordre de la vitesse moyenne du faisceau (courbe continue)

Ceci apparaît encore plus clairement quand on garde l'amplitude de l'onde constante et fait varier la longueur d'interaction  $z$  en déplaçant l'antenne émettrice le long de l'hélice. La Fig. 3b est obtenue en superposant les  $fdv$  du faisceau test mesurées à la sortie de l'hélice pour 100 différentes positions de l'antenne espacées de 2.5 cm. On remarque tout d'abord un regroupement périodique en vitesses des  $vdv$  avec une période spatiale de  $L_b = v_b v_\phi / (f|v_b - v_\phi|) = 0.76$  m qui correspond à la longueur pour laquelle le temps de transit des électrons  $L_b/v_b$  diffère du temps de propagation de l'onde  $L_b/v_\phi$  d'une période  $1/f$ . On remarque aussi que l'amplitude de la modulation en vitesse du faisceau augmente avec  $z$  car, quand l'antenne s'approche de la sortie du tube, l'onde est moins amortie dans la structure à onde lente. Un examen plus attentif des contours de la Fig. 3b révèle que la vitesse moyenne du faisceau test oscille avec  $z$ . La courbe continue superposée sur le contour correspond à l'estimation au second ordre de la vitesse des électrons moyennée sur la phase initiale quand l'amortissement de l'onde est aussi pris en compte. On trouve un excellent accord entre cette estimation et la vitesse moyenne calculée à partir des  $fdv$  mesurées. Cet effet de synchronisation du faisceau est à la source de l'amortissement Landau dans les plasmas [7].

## 2.2 Piégeage du faisceau dans une onde résonante



**Fig.4.** a) Contours 2D de la  $fdv$  mesurée pour un faisceau test ( $I_b = 120$  nA,  $v_b = 3.55 \times 10^6$  m/s) piégé dans une onde à 40 MHz avec zone de piégeage (courbe continue) vs amplitude de l’onde (longueur d’interaction  $L = 2.3$  m); b)  $fdv$  normalisée pour une onde à 30 MHz (courbe  $f_{30}$ ), une onde à 40 MHz (courbe  $f_{40}$ ), et deux ondes à 30 et 40 MHz (courbe  $f_{30} + f_{40}$ ). Les cercles indiquent les vitesses de phase; les barres horizontales indiquent les zones de piégeage.

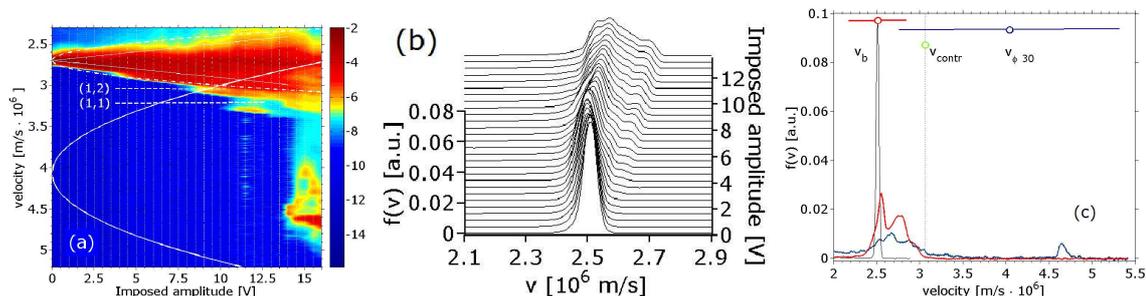
La Fig. 4a est obtenue de la même façon que la Fig. 3a mais correspond à un signal appliqué à 40 MHz sur une antenne située à  $L = 2.3$  m de la sortie du tube, et à un faisceau de vitesse initiale égale à la vitesse de phase  $v_\varphi = 3.55 \cdot 10^6$  m/s du mode d’hélice. On observe que la forme du domaine de vitesse embrassée par le faisceau est très différente de la Fig. 3a. Sa largeur n’augmente pas linéairement avec l’amplitude de l’onde mais plutôt comme la racine carrée comme prévu par le piégeage des électrons dans les puits de potentiel de l’onde. On observe aussi un regroupement en vitesse des électrons autour de leur vitesse initiale pour une amplitude du signal appliqué de 900 mV. Si on se réfère au modèle d’une barre tournante [14] pour décrire le mouvement des électrons piégés dans l’espace de phase, ce phénomène est aussi relié au piégeage. En égalant  $L$  à une demie période de piégeage quand le regroupement en vitesses se produit, on peut calculer l’amplitude du mode d’hélice et vérifier qu’elle est en accord avec une mesure indépendante du coefficient de couplage des antennes [15] ou de la largeur en vitesse de la zone de piégeage [8].

## 2.3 Recouvrement de résonances pour deux ondes

Trois différentes  $fdv$  sont tracées sur la Fig. 4b. La longueur d’interaction est de 3.6 m. le faisceau test d’intensité  $I_b = 50$  nA est initialement centré en  $v_{\varphi 40} = 3.55 \cdot 10^6$  m/s, la vitesse de phase d’une onde à 40 MHz. La courbe bleue (resp. rouge) étiquetée  $f_{30}$  (resp.  $f_{40}$ ) montre la  $fdv$  normalisée du faisceau mesurée à la sortie du tube après modulation (resp. piégeage) du faisceau test dans une onde isolée à 30 MHz (resp. 40 MHz) émise sur une antenne fixe. La zone de piégeage de l’onde à 30 MHz (resp. 40 MHz) est indiquée par la barre horizontale bleue (resp. rouge) centrée sur sa vitesse de phase. Dans les deux cas, avec la résolution expérimentale utilisée, aucun électron n’est détecté au delà de la vitesse limite supérieure de la zone de piégeage de l’onde à 40 MHz. Comme les zones de piégeage des deux ondes se recouvrent, on observe que, quand les deux signaux à ces deux fréquences sont excités sur la même antenne avec un générateur de forme d’onde arbitraire, la  $fdv$  mesurée étiquetée  $f_{30+40}$  s’étend sur les deux domaines au delà de la limite précédente. Ceci constitue une indication claire qu’aucune barrière à la diffusion chaotique en vitesses ne subsiste, comme prévu par la théorie KAM qui décrit la transition au chaos à grande échelle pour le mouvement d’une particule chargée dans deux ondes électrostatiques [6].

## 2.4 Transition au chaos et « escalier du diable »

La Fig. 5a correspond à des conditions similaires à la Fig. 3a mais pour un signal appliqué sur l’antenne plus grand, une longueur d’interaction  $L = 3.6$  m plus grande, et un faisceau test avec une



**Fig.5.** Transition au chaos grande échelle, contrôle du chaos et “escalier du diable” expérimental : a) contour 2D des  $f dv$  d’un faisceau test ( $I_b = 10$  nA,  $v_b = 2.7 \times 10^6$  m/s) après interaction sur  $L = 3.6$  m avec une onde à 30 MHz vs. amplitude du signal ; zone de piégeage du mode d’hélice (resp. mode faisceau) indiquée par parabole continue (resp. pointillée) ; résonances secondaires  $(n, m)$  indiquées aux vitesses  $m\kappa/(n+m\kappa)$  avec  $\kappa = v_\varphi/v_b$  ; b)  $f dv$  exhibant des marches de “l’escalier du diable” ; c)  $f dv$  normalisée à la sortie du TOP : faisceau test ( $I_b = 50$  nA,  $v_b = 2.5 \times 10^6$  m/s) [pic noir] ; avec modes d’hélice et de faisceau à 30 MHz (vitesse de phase et zone de piégeage de chaque mode données respectivement par les cercles et les barres horizontales) [courbe bleue avec grande dispersion] ; avec une onde de contrôle additionnelle à 60 MHz (vitesse de phase au cercle médian) [courbe rouge moins étalée].

vitesse initiale égale à  $2.7 \cdot 10^6$  m/s. Quand l’amplitude du signal augmente, on constate que la taille de la zone sur laquelle s’étend la  $f dv$  ne croît pas linéairement et suit plutôt la parabole pointillée typique d’un comportement de piégeage. Ceci correspond à l’existence d’un mode faisceau, associé aux oscillations plasma dans le référentiel du faisceau. Les électrons du faisceau sont piégés dans ce mode, qui se propage à la même vitesse que le faisceau. Il est opportun de remarquer que l’on retrouve les mêmes régions en  $V$  horizontales que sur la Fig. 4a, associées au “piquage” périodique de la distribution en vitesses résultant du piégeage du faisceau dans le mode faisceau.

Quand on continue d’augmenter l’amplitude du signal appliqué, les zones de piégeage du mode faisceau et du mode d’hélice se recouvrent et les électrons peuvent même être accélérés à une vitesse plus grande que la vitesse de phase du mode d’hélice comme le prévoit la transition au chaos pour le mouvement des électrons dans ces deux modes de vitesses de phase différentes. De plus nous observons que cette transition ne se produit pas de façon régulière mais opère par sauts. La Fig. 5b montre quelques détails de ces sauts. Chaque saut peut être relié à la présence des résonances secondaires [18] telles que celles observées sur la moitié gauche de la Fig. 1. Ces résonances secondaires exhibent un comportement en “escalier du diable” avec une infinité de résonances à l’intérieur des résonances. Seules deux résonances principales sont indiquées par les lignes horizontales de la Fig. 5a. Une comparaison avec les simulations numériques, une analyse plus détaillée de ce comportement, ainsi que son exploration quand deux fréquences sont excitées ont été conduites [17].

La connaissance approfondie de ce système nous à permis de mettre à l’épreuve une nouvelle théorie de contrôle du chaos Hamiltonien [19]. Le coeur de cette approche consiste en une modification réduite du system qui permet de contenir le chaos en construisant des barrières de transport dans l’espace de phase.

## 2.5 Contrôle du chaos

La Fig. 5c montre trois différentes fonctions de distribution des vitesses. Le pic étroit correspond au faisceau test initial après qu’il a parcouru l’intégralité de l’hélice en l’absence de signal excité. La courbe bleue, exhibant un étalement maximum du faisceau, correspond au recouvrement de résonances du mode d’hélice et du mode faisceau décrit dans la sous-section précédente. On superpose alors sur l’antenne un signal de contrôle correspondant au battement de ces deux modes, avec amplitude et phase bien définies. Pour le choix judicieux de la phase de la Fig. 5c on observe un “piquage” de la fonction de distribution rouge sans électrons détectés de vitesse supérieure à la vitesse de phase du signal de contrôle. Au contraire, pour une phase augmentée de  $\pi$ , nous observerions un plus grand étalement de la fonction de distribution.

On montre que la condition de résonance, qui implique que le mode de battement du mode de faisceau et du mode d'hélice à 60 MHz doit satisfaire la relation de dispersion de l'hélice à cette fréquence, est cruciale pour l'efficacité de la méthode. Ce contrôle est réalisé avec un coût d'énergie additionnel qui correspond à moins que 1 de l'énergie initiale du système à deux ondes. Intuitivement il correspond à annuler la résonance secondaire associée au battement des deux modes et restaurer localement un tore de KAM pour empêcher la diffusion des électrons dans l'espace de phase. Cette expérience fut inspirée par une méthode générale de contrôle du chaos Hamiltonian [19] et a aussi été comparée aux prédictions numériques [11].

### 3 Conclusions et perspectives

Ce système fournit un moyen de mettre en évidence les caractéristiques fondamentales des systèmes hamiltoniens chaotiques. On espère obtenir encore plus de détails sur la dynamique des particules en injectant, non pas un faisceau continu, mais des paquets d'électrons avec une phase initiale bien définie par rapport aux ondes [20]. Un autre sujet d'étude concerne la robustesse des phénomènes chaotiques lorsqu'on introduit l'auto-cohérence en autorisant les électrons à agir sur le spectre d'ondes, comme dans les TOP conventionnels. Ceci peut être étudié en augmentant progressivement l'intensité du faisceau.

Ces études fondamentales ouvrent de nouvelles pistes en physique des plasmas et pour le contrôle des systèmes complexes, tels que les tubes électroniques et les lasers à électrons libres pour lesquels l'amélioration des performances est cruciale.

Les auteurs remercient J-C Chezeaux, D. Guyomarc'h, et B. Squizzaro de leur précieuse aide technique. Ce travail a bénéficié du soutien d'un contrat Euratom/Cea. A. Macor bénéficie d'une bourse du Ministère de la Recherche Scientifique.

### Références

1. J.R. PIERCE, *Traveling wave tubes* (Van Nostrand, New York, 1950).
2. A.S. GILMOUR JR, *Principles of traveling wave tube* (Artech House, London, 1994).
3. G. DIMONTE AND J.H. MALMBERG, *Phys. Fluids* **21**, 1188 (1978).
4. S.I. TSUNODA, F. DOVEIL AND J.H. MALMBERG, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1112 (1987).
5. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* Gauthier-Vilars, Paris (1899).
6. D.F. ESCANDE, *Phys. Rep.* **121**, 165 (1985).
7. F. DOVEIL, D.F. ESCANDE AND A. MACOR, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 085003 (2005).
8. F. DOVEIL, A. MACOR AND KH. AUHMANI, *J. Phys.* **C7**, 154-162 (2005).
9. F. DOVEIL, A. MACOR AND KH. AUHMANI, *Plasma Phys. Control. Fusion* **47**, A261-A271 (2005).
10. F. DOVEIL, KH. AUHMANI, A. MACOR AND D. GUYOMARC'H, *Phys. Plasmas* **12**, 010702 (2005).
11. A. MACOR, F. DOVEIL AND Y. ELSKENS, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 264102 (2005).
12. C. CHANDRE, G. CIRAOLO, F. DOVEIL, R. LIMA, A. MACOR AND M. VITTOT, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 074101 (2005).
13. D. GUYOMARC'H AND F. DOVEIL, *Rev. Sci. Instrum.* **71**, 4087 (2000).
14. H.E. MYNICK AND A.N. KAUFMAN, *Phys. Fluids* **21**, 653 (1978).
15. J.H. MALMBERG, T.H. JENSEN AND T.M. O'NEIL, *Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res.* **1**, 683 (1966).
16. F. DOVEIL AND D.F. ESCANDE, *Phys. Lett.* **90A**, 226 (1982).
17. F. DOVEIL, A. MACOR, AND Y. ELSKENS, *Electron climbing a "devil's staircase" in wave particle interaction*, submitted.
18. F. DOVEIL AND D.F. ESCANDE, *Phys. Lett.* **90A**, 226 (1982).
19. G. CIRAOLO, C. CHANDRE, R. LIMA, M. VITTOT, M. PETTINI, AND PH. GHENDRIH, *Europhys. Lett.* **69**, 879 (2005).
20. A. BOUCHOULE AND M. WEINFELD, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1144 (1976).