

# Comparaison d'un observateur à modes glissants et un observateur adaptatif pour la synchronisation de systèmes chaotiques

M. L'Hernault<sup>1</sup>, J. De Leon<sup>2</sup>, J.P. Barbot<sup>1</sup>, & A. Ouslimani<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ECS-ENSEA, 6 Avenue du Ponceau, 95014 Cergy Cedex, France

<sup>2</sup> Fac. de Ingeniera Mecanica y Electrica, Universidad Autonoma de Nuevo Leon., Apartado Postal 148-F, CU San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon, Mexico

lhernault@ensea.fr

**Résumé.** Dans ce travail, un système de transmission sécurisée d'information basé sur la synchronisation de deux systèmes chaotiques est présenté. L'émetteur est un oscillateur de type Colpitts chaotique dans lequel le message est inséré à l'aide de la méthode dite *par inclusion*. Seulement un des états de l'émetteur est transmis au récepteur via un canal public. Ce dernier est un observateur conçu pour reconstruire tous les états de l'émetteur, ainsi que le message. La problématique traitée est l'inversion à gauche avec observation de l'état complet. Deux types d'observateur sont utilisés : le premier est un observateur à modes glissants et le deuxième est un observateur adaptatif. Ainsi, la synchronisation des deux systèmes chaotiques (émetteur - récepteur) est obtenue et le message est récupéré en utilisant deux méthodes différentes. Les résultats de simulation sont présentés afin d'étudier les performances de chaque observateur et enfin, une étude comparative est effectuée.

**Abstract.** In this paper, a secure data transmission system based on the synchronisation of two chaotic systems is presented. The transmitter is a chaotic Colpitts oscillator in which the message signal is inserted by *inclusion method*. Only one of the states of the emitter is transmitted to the receiver via a public channel, which is an observer designed to reconstruct all of the states of the emitter, as well as the message. The left inversion problem with observation of the complete state is studied in this work. Two types of observer are used : the first one is a sliding mode observer, and the second one is an adaptive observer for a class of non-linear systems. The synchronization of the two chaotic systems (transmitter - receiver) is obtained and the message signal is recovered by two different methods. Simulation results are presented in order to study the performances of each observer and finally, a comparative study is given.

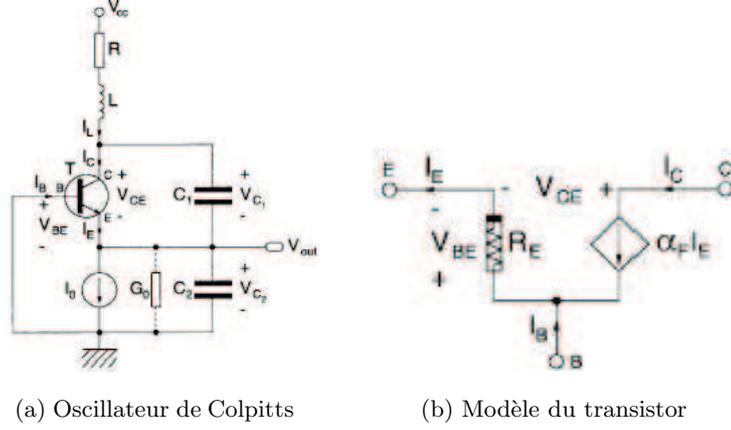
## 1 Introduction

Dans les méthodes de communication chaotique, l'information est transmise au récepteur à l'aide d'un signal chaotique. Différentes techniques ont été proposées pour la cryptographie chaotique [16,12]. Des systèmes de communication chaotique basés sur le circuit de Chua sont réalisés [11,1] et plusieurs méthodes sont proposées pour la synchronisation de systèmes chaotiques [4,15,1]. Dans ce travail nous proposons un système de communication chaotique pour réaliser une communication sécurisée. Le système est composé d'un émetteur chaotique et d'un récepteur. L'émetteur est un oscillateur de Colpitts chaotique [8,10,9]. Le message est injecté dans l'oscillateur de Colpitts par la méthode dite *par inclusion* [2]. Seulement un des états de l'émetteur est transmis au récepteur, qui est un observateur, conçu pour reconstruire tous les états de l'émetteur, ainsi que le message. Deux types d'observateur sont proposés : le premier est un observateur à modes glissants [5,6], [2,7]. Le deuxième observateur est un observateur adaptatif, capable d'estimer les états et certains des paramètres inconnus pour une classe de systèmes nonlinéaires [14,17]. Les résultats de simulation obtenus par chaque observateur sont présentés et commentés.

## 2 Oscillateur de Colpitts

La Fig. 1(a) montre le schéma électronique d'un oscillateur de Colpitts en base commune. Le transistor  $T$  est simplement modélisé par une résistance nonlinéaire et une source de courant (Fig. 1(b)).

L'élément clé de ce modèle est la résistance nonlinéaire, qui est responsable du comportement chaotique de l'oscillateur.



**Fig.1.** Oscillateur de Colpitts et le modèle du transistor

## 2.1 Modèle de l'oscillateur de Colpitts

Le modèle mathématique de l'oscillateur de Colpitts décrit dans la Fig. 1(a) est donné par :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = -f(V_{C_2}) + I_L \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = I_L - I_0 \\ L \frac{dI_L}{dt} = -V_{C_1} - V_{C_2} - I_L R + V_{CC} \end{cases} \quad (1)$$

où  $f(V_{C_2})$  est la caractéristique courant-tension de la résistance nonlinéaire donnée par <sup>1</sup> :

$$f(V_{C_2}) = I_S \exp\left(-\frac{V_{C_2}}{V_T}\right) \quad (2)$$

Afin de simplifier l'étude de l'oscillateur, nous utilisons le modèle normalisé proposé en [8], où les coefficients sont normalisés comme suit :  $V_{ref} = V_t$ ,  $I_{ref} = I_0$ , et  $t_{ref} = \frac{1}{\omega_0}$ . Par conversion, nous noterons :  $(V_{C_2}, V_{C_1}, I_L)^T = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T = A\zeta$ . Alors les équations du système sont données par :

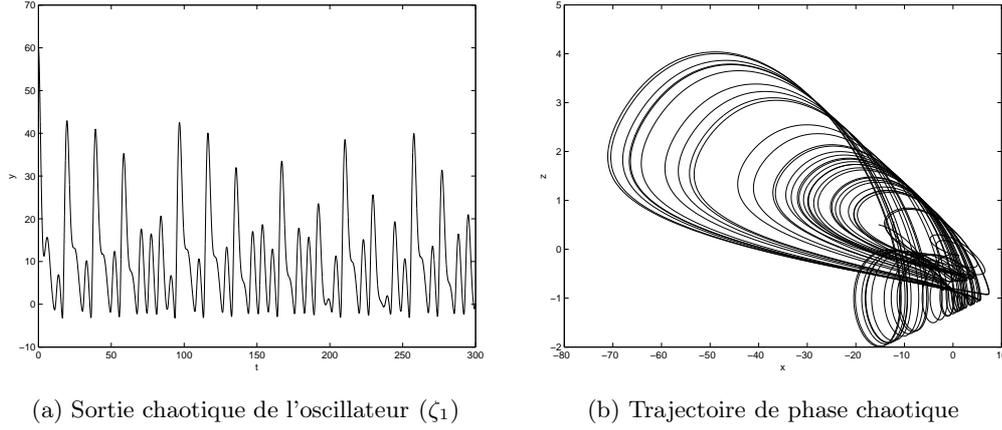
$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \frac{g}{Qk} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -\frac{Qk(1-k)}{g} [\zeta_3 + \zeta_1] - \frac{1}{Q} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_3 = \frac{g}{Q(1-k)} [-n(\zeta_1) + \zeta_2] \end{cases} \quad (3)$$

avec  $n(\zeta_1) = \exp(-\zeta_1) - 1$  et  $k = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ .  $g$  est le gain en boucle ouverte de l'oscillateur lorsque le critère de Barkhausen est satisfait, et  $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$  est le facteur de qualité du circuit  $LC$  non chargé.

<sup>1</sup> Si  $V_{BE} \gg V_T$ ,  $I_E = I_S \left[ \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) - 1 \right] \approx I_S \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right)$   $I_S$  est le courant de saturation inverse et  $V_T \simeq 26mV$

## 2.2 Comportement chaotique

En faisant varier certains paramètres, nous obtenons un comportement chaotique pour l'oscillateur de Colpitts. Conformément aux résultats présentés par G.M. Maggio *et al.* en [8], nous constatons que pour  $g = 4.46$  et  $Q = 1.5$ , le système (3) génère des signaux chaotiques comme on peut le voir sur le plan de phase de la Fig. 2(b). Dans le but de réaliser une liaison sécurisée par la synchronisation chaotique unidirectionnelle, nous avons considéré  $\zeta_1$  comme sortie de l'oscillateur utilisée pour transmettre le message. Dans la Fig. 2(a) il est facile de remarquer l'aspect chaotique de ce signal.



**Fig.2.** Comportement chaotique de l'oscillateur de Colpitts

## 3 Design d'un observateur à modes glissants pour l'oscillateur de Colpitts

### 3.1 Cryptage

Afin de réaliser une transmission avec la méthode par inclusion, nous ajoutons le message ( $m$ ) à l'état  $\zeta_3$ . Comme nous l'avons déjà dit préalablement, la sortie  $y = \zeta_1$  de l'oscillateur est transmise au récepteur à travers le canal public. Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \frac{g}{Qk} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -\frac{Qk(1-k)}{g} [\zeta_3 + \zeta_1] - \frac{1}{Q} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_3 = \frac{g}{Q(1-k)} [-n(\zeta_1) + \zeta_2] + m \\ y = \zeta_1 = h(\zeta) \end{cases} \quad (4)$$

Notons que le message est le dernier état à reconstruire par des dérivations successives des sorties. Cela constitue un moyen sûr pour satisfaire la condition d'*observability matching condition*<sup>2</sup>. Pour simplifier les simulations, nous avons choisi un message sinusoïdal qui varie lentement par rapport aux dynamiques de l'oscillateur chaotique.

<sup>2</sup> On pose  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$  et  $\dot{x} = f(x) + g(x)m$ . Le système (4) vérifie l'*observability matching condition* si  $[dh \ dL_f h \ dL_f^2 h]^T g = [0 \ 0 \ \theta]^T$  avec  $\theta \neq 0$  (voir [13])

### 3.2 Décryptage

Pour décrypter le message transmis à l'aide du système (4), nous utilisons dans un premier temps, l'observateur à modes glissants ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\zeta}_1}{dt} = \frac{g}{Qk}\hat{\zeta}_2 + \lambda_1 \text{sign}(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1) \\ \frac{d\hat{\zeta}_2}{dt} = \frac{-Qk(1-k)}{g}(\hat{\zeta}_3 + \zeta_1) - \frac{\tilde{\zeta}_2}{Q} + E_1\lambda_2 \text{sign}(\tilde{\zeta}_2 - \hat{\zeta}_2) \\ \frac{d\hat{\zeta}_3}{dt} = \frac{g}{Q(1-k)}[-n(\zeta_1) + \tilde{\zeta}_2] + E_2\lambda_3 \text{sign}(\tilde{\zeta}_3 - \hat{\zeta}_3) \end{cases} \quad (5)$$

où *sign* représente la fonction sign usuelle.

Avec les conditions suivantes : si  $\hat{\zeta}_1 = \zeta_1$  alors  $E_1 = 1$  sinon  $E_1 = 0$ . Ainsi, lorsque  $E_1 = 1$ , l'observateur synchronise l'état  $\zeta_2$ . Aussi, si  $\hat{\zeta}_2 = \tilde{\zeta}_2$  et  $E_1 = 1$  alors  $E_2 = 1$  sinon  $E_2 = 0$  et l'observateur synchronise  $\zeta_3$ . Enfin si  $\hat{\zeta}_3 = \tilde{\zeta}_3$  le message sera reconstruit par l'observateur. On calcule maintenant les états auxiliaires comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}_2 = \hat{\zeta}_2 + E_1\lambda_1 \frac{Qk}{g} \text{sign}(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1) \\ \tilde{\zeta}_3 = \hat{\zeta}_3 - E_2\lambda_2 \frac{g}{Qk(1-k)} \text{sign}(\tilde{\zeta}_2 - \hat{\zeta}_2) \\ \tilde{m} = E_3\lambda_3 \text{sign}(\tilde{\zeta}_3 - \hat{\zeta}_3) \end{cases} \quad (6)$$

## 4 Observateur adaptatif pour l'oscillateur de Colpitts

L'observateur adaptatif est conçu en cas d'utilisation de systèmes nonlinéaires dépendant de paramètres inconnus. Nous utilisons le système (3) et nous cherchons à concevoir un observateur adaptatif pour synchroniser les deux systèmes chaotiques.

### 4.1 Cryptage

Considérons le système (4). Le système peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = A(u)\zeta + \varphi(u, y) + \Phi m \\ y = C\zeta \end{cases} \quad (7)$$

avec :  $C = [1 \ 0 \ 0]$ , où les éléments de la matrice  $A(u)$  et les vecteurs  $\varphi(u, y)$  sont des fonctions continues dépendantes de  $u$  et  $y$  et uniformément bornées, et  $m$  est le message inconnu.

### 4.2 Décryptage

L'observateur adaptatif dédié au système (7) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{Z} = Az + \varphi(u, y) + \phi\hat{m} + \{AS_m^{-1}A^TC^T + S_z^{-1}C^T\}(\zeta_1 - Z_1) \\ \dot{\hat{m}} = S_m^{-1}A^TC^T(\zeta_1 - Z_1) \\ \dot{S}_z = -\rho_z S_z - A^T S_z - S_z^T A + C^T C \\ \dot{S}_m = -\rho_m S_m + A^T C^T C A + \Phi \\ \dot{\Lambda} = \{A - S_z^{-1}C^T C\} \Lambda + \Phi \end{cases} \quad (8)$$

dans lequel  $S_z(0) > 0$ ,  $S_m(0) > 0$  et  $\rho_z, \rho_m$  sont des constantes positives et suffisamment grandes.

**Lemme 1.** *Considérons le système (7). Le système (8) est alors un observateur adaptatif pour le système (7). De plus, le vecteur d'erreur d'estimation ( $e_z = Z - \zeta$ ,  $\epsilon_m = \hat{m} - m$ ) converge exponentiellement à zéro à une vitesse de convergence contrôlée par  $\rho = \min(\rho_z, \rho_m)$  [3].*

## 5 Résultats de simulation

Les états et le message reconstruits par chaque observateur sont montrés dans les figures 3 et 4. D'après ces figures, nous constatons la convergence plus rapide et plus précise de l'observateur à modes glissants, dûes à la convergence en temps fini de celui-ci, tandis que l'observateur adaptatif possède la propriété de convergence exponentielle [3]. Par contre, l'observateur à modes glissants fonctionne étape par étape, alors que l'observateur adaptatif synchronise tous les états en même temps.

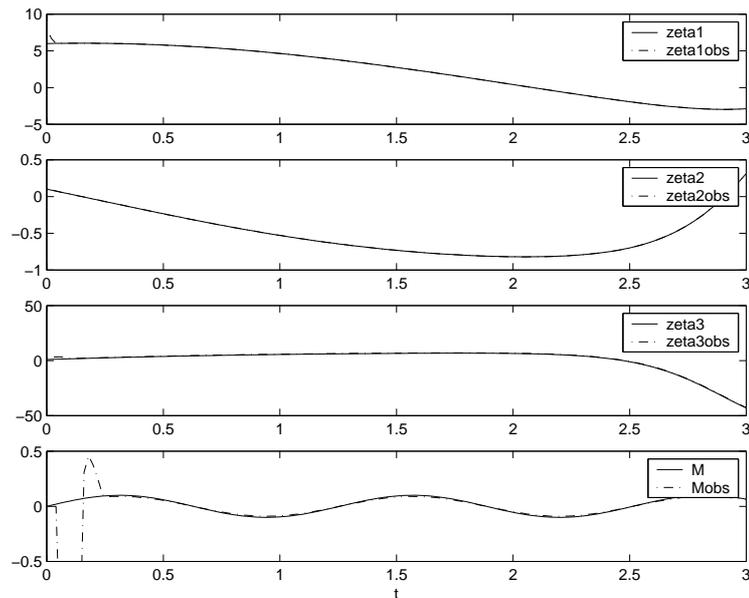


Fig.3. Les états et le message reconstruits par l'observateur à modes glissants

## 6 Conclusion

Un système de communication sécurisée est réalisé à l'aide des méthodes de la cryptographie chaotique. L'émetteur est un oscillateur de Colpitts chaotique dans lequel le message est injecté en utilisant la méthode par inclusion. Deux observateurs sont proposés comme récepteur : un observateur à modes glissants, et un observateur adaptatif. Ces observateurs utilisent deux méthodes différentes pour reconstruire tous les états de l'émetteur, ainsi que le message. Les résultats de simulation sont présentés et les deux observateurs sont comparés. Il est à noter que la réalisation pratique de l'observateur à modes glissants a été faite au laboratoire ECS-EA3649. Les résultats présentés ici sont seulement pour le but de démontrer qu'un grand nombre d'observateurs peuvent être employés comme récepteur dans un problème de synchronisation chaotique. Le principal problème restant est de choisir le plus robuste et le plus facile observateur à réaliser.

## Références

1. L. BOUTAT-BADDAS, Sliding Mode Observers and Observability Singularity in Chaotic Synchronization, *Mathematical problems in engineering*, **53** (1), 11-31 (2004).
2. L. BOUTAT-BADDAS, *Analyse des singularités d'observabilité et de détectabilité : Application à la synchronisation des circuits électroniques chaotiques*, Thèse de doctorat de l'Université de Cergy-Pontoise, (2002).

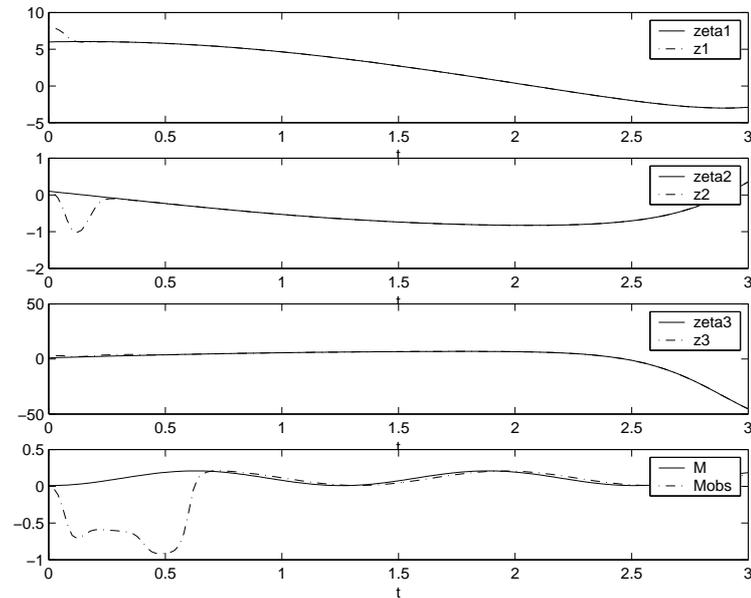


Fig.4. Les états et le message reconstruits par l'observateur adaptatif

3. G.BESANÇON, On adaptive observers for state affine systems and application to synchronous machines, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, USA, (2003).
4. T.M. CARROLL, Synchronizing chaotic circuits, *IEEE Transactions on circuits and systems*, **38** (4), (1991).
5. L.C. DE SOUZA MARQUES, Commande par Modes Glissants de la Machine Asynchrone : appliquée au Benchmark Manutention Horizontale, *Action Nationale Inter-GDR « Commande de machines »*, (1999).
6. M.S. ISLAM, Design and Analysis of Sliding-Mode Observers for Sensorless Operation of Switches Reluctance Motors, *IEEE Transactions On Control Systems Technology*, **11** (3), 383-389 (2003).
7. M. L'HERNAULT, Chaotic Frequency Modulation in Cryptography, *International Workshop on Electronics and System Analysis*, Espagne, (2004).
8. GIAN MARIO MAGGIO, Nonlinear Analysis of the Colpitts Oscillator and Applications to Design, *IEEE Transactions on circuits and systems-I*, **46** (9), (1999).
9. N. MAXIMOV, Chaotic oscillators design with preassigned spectral characteristics, *ECCTD'01 — European Conference on Circuit Theory and Design*, Epsou, Finland, (1999).
10. G. MYKOLAITYS, Experimental demonstration of chaos from Colpitts oscillator in VHF and UHF ranges, *Electronics Letters*, **40** (4), (2004).
11. U. PARLITZ, Transmission of digital signals by chaotic synchronization, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **2** (4), 973-977 (1992).
12. W. PERRUQUETTI, Observability Bifurcations : Application to Cryptography, *Chaos in Automatic Control*, M. Dekker, (2005).
13. W. PERRUQUETTI, *Sliding Mode control in Engineering*, M. Dekker, (2002).
14. A. RODRIGUEZ, on Adaptive Observer for a P-Class of Chaotic Systems, accepted for publication in *Chaos, Solitons & Fractals*.
15. N.F. RULKOV, Synchronization Methods for Communication with Chaos ove Band-Limited Channels, *International journal of Circuit Theory and Applications*, **27**, 555-567.
16. T. YANG, Cryptography based on chaotic systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, **44** (5), 469-471 (1997).
17. Q. ZHANG, Implicit Adaptive Observers for a Class of Nnlinear Systems, *Proceedings of the American Control Conference* (2001).