

# Transition du Map vers le Flot dans un oscillateur opto-électronique à retard

L. Larger<sup>1</sup>, D. Fournier<sup>2</sup>, P. Lacourt<sup>1</sup>, & S. Poinsot<sup>1</sup>

<sup>1</sup> FEMTO-ST, UMR 6174, Univ. de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

<sup>2</sup> Groupe SYD, LESIA, DGEI, INSA, 135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 4 FRANCE

laurent.larger@univ-fcomte.fr

**Résumé.** Nous présentons un montage expérimental permettant d'obtenir, en fonction d'un paramètre temporel, une dynamique temporelle non linéaire qui est soit de type discret (application  $x_{n+1} = f(x_n)$ ), soit de type continu (flot  $\dot{x} = f(x, t)$ ). L'interprétation physique de ce nouveau type de montage permet de répondre à la problématique de la validité de l'approximation singulière du Map (aussi appelé approximation adiabatique) posée dans le cas des dynamiques à retard.

**Abstract.** We report a new experimental setup, which allows for the observation of a discrete time dynamic (map  $x_{n+1} = f(x_n)$ ) or a continuous time one (flow  $\dot{x} = f(x, t)$ ), depending on a particular time parameter. The physical interpretation of this new kind of setup enables to answer to the non-validity of the singular limit map (or adiabatic) approximation well known for delay differential dynamics.

Les systèmes dynamiques à retard possèdent cette particularité étrange de pouvoir générer des comportements chaotiques de grande complexité évoluant dans un espace des phases de dimension infinie [1], à l'aide d'une simple équation dynamique scalaire :

$$\tau \dot{x}(t) + x(t) = f[x(t - \tau_R)]. \quad (1)$$

Dans le cas où les composantes fréquentielles d'une trajectoire solution  $x(t)$  sont limitées à des basses fréquences (comparées à la fréquence caractéristique liée au temps de réponse physique  $\tau$  ( $f_c = 1/(2\pi\tau)$ )), une approximation courante consiste à négliger le terme différentiel  $\tau \dot{x}(t)$  dans (1), et à considérer que la trajectoire solution est constituée d'une succession de valeurs constantes sur des intervalles de temps correspondant au retard  $\tau_R$ . Cette approximation appelée *adiabatique* dans la littérature, ou encore *limite singulière du Map*, conduit à une simplification assez radicale de (1) en une application d'ordre 1 :

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ avec } x_n = x(n\tau_R + t) \text{ pour } t \in [0, \tau_R]. \quad (2)$$

Bien que rude, cette approximation conduit dans le cas des grands retards ( $\tau_R \gg \tau$ ) à de très bons accords de comportements dynamiques entre les solutions de l'application (2), celles de la simulation numérique de (1), et celles qui sont observées dans des systèmes physiques réalisant des dynamiques non linéaires à retard [2,3]. Ce très bon accord est toutefois limité aux solutions de faible complexité, de type point fixe ou cycle limite d'ordre peu élevé, précisément ceux pour lesquels les composantes fréquentielles sont principalement de l'ordre de  $1/\tau_R$ , rendant ainsi le terme différentiel négligeable dans l'équation (1).

Pour les régimes de plus grande complexité, ceux pour lesquels le poids des non linéarités devient significatif dans le processus dynamique, générant ainsi de plus en plus de hautes fréquences en  $1/\tau$ , le flot à retard commence effectivement à occuper le grand nombre de degrés de libertés de son espace des phases infini (taille des conditions initiales pour le flot à retard : une fonctionnelle  $x(t)$  pour  $t \in [-\tau_R, 0]$ , donc une infinité de valeurs; alors que dans le cas de l'application, il s'agit bien sûr d'une condition initiale de dimension 1 :  $x_{n=0}$ ). Cette différence importante entre flot et application –parmi d'autres– retire beaucoup de crédibilité à l'approximation adiabatique, malgré la simplicité et l'efficacité relative de celle-ci. Le travail présenté ici a pour but de proposer une vision alternative d'interprétation du flot à retard par une application à temps discret, en faisant appel à un schéma qui préserve la grande dimension lors du passage de l'un à l'autre [4].

## 1 Oscillateur opto-électronique à temps discret ou continu

Le schéma expérimental à la base de ce travail est directement lié à une application récente des dynamiques chaotiques et de leur possible synchronisation : la cryptographie par chaos [5,6]. Le développement de cette application dans le domaine de l'optique a été particulièrement conséquent, du fait du potentiel de sécurisation qui peut être proposé au niveau de la couche physique, et du fait de la très grande rapidité de cryptage qui peut être obtenue (au delà de ce que peuvent faire les techniques algorithmiques classiques). Une démonstration sur un réseau installé a même pu être faite récemment [7] à un débit supérieur au Gb/s, et sur une distance de plus de 100 km. Dans ce contexte de communications optiques par chaos, les dynamiques non linéaires à retard ont joué un rôle central pour fabriquer la porteuse chaotique. Un retard pur (i.e. avec une très faible dispersion pour l'ensemble des composantes fréquentielles du chaos) est en effet très facilement réalisé par une simple longueur d'un milieu de propagation (la fibre optique).

Cependant, les porteuses chaotiques utilisées pour l'instant sont issues d'un flot à retard, et correspondent donc à des comportements en temps continu difficilement compatibles avec la plupart des systèmes de communication modernes, qui opèrent sur la base du rythme régulier d'une horloge, donc à temps discret. À partir de cette problématique, nous avons cherché les moyens expérimentaux de produire un comportement dynamique chaotique en amplitude, mais discret en temps, de manière à pouvoir envisager une interface de communication compatible avec les systèmes en temps discret des communications numériques.

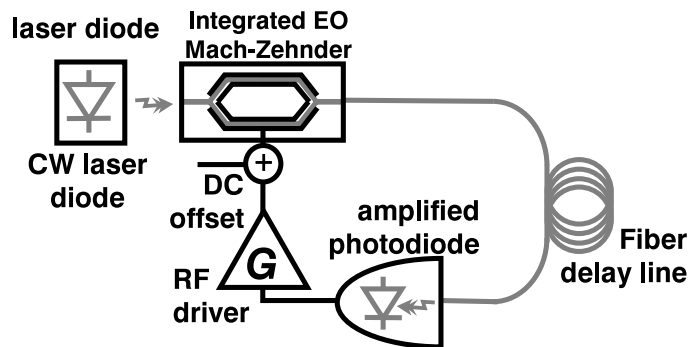


Fig.1. Oscillateur opto-électronique non linéaire, large bande, à retard.

Le schéma de la figure 1 représente un des oscillateurs chaotiques de [7] produisant un comportement chaotique très large bande d'une porteuse optique, destinée à masquer un message optique à haut débit. Le flot chaotique de l'intensité optique de sortie est produit de la manière suivante : le faisceau laser continu qui entre dans un interféromètre électro-optique de Mach-Zehnder, est modulé de manière non linéaire par une tension de commande d'amplitude largement supérieure à celle permettant de passer d'une interférence constructive à une interférence destructive. La fonction de transfert de modulation en question est celle d'une interférence à deux ondes de contraste unité, elle correspond à la fonction  $f(x) = \beta \sin^2(x)$  dans l'équation (1). Le résultat optique de cette transformation non linéaire est ensuite retardé dans le temps par une durée  $\tau_R$ , puis détecté par une photodiode, amplifié, et filtré par le processus dynamique limitant de la partie électronique de la boucle d'oscillation. Le signal résultant correspond alors à la commande même de modulation non linéaire de la lumière par l'interféromètre en optique intégrée. Lorsque le gain de la boucle d'oscillation est suffisant, on observe effectivement un comportement chaotique de grande complexité, dont le spectre est quasi plat sur une large gamme de fréquences liée à la bande passante de la partie électronique (près de 10 GHz en pratique, ce qui correspond dans (1) à  $1/(2\pi\tau)$ ). Cet oscillateur non linéaire est typiquement à grand retard, puisque les quelques mètres de fibre optique conduisent à  $\tau_R = 45$  ns de retard temporel, alors que le temps de réponse électronique est de l'ordre de  $\tau \simeq 40$  ps.

À l'image des principes de communications numériques RZ (Return-to-Zero), nous avons eu l'idée assez simple de remplacer la source laser continue par une source laser impulsionnelle qui rythme ha-

bituellement les communications optiques de type RZ. Les impulsions irriguant alors le modulateur de Mach–Zehnder, sont caractérisées par une largeur d’impulsion  $\tau_p$ , et une période de répétition des pulses  $T_r$ . Pratiquement, les impulsions ont une largeur très petite devant le temps de réponse électronique  $\tau$ , alors que la période de répétition est réglable à des valeurs soit largement supérieures soit légèrement supérieures à  $\tau$ , de 400 ps à 100 ps (resp. 2,5 GHz à 10 GHz).

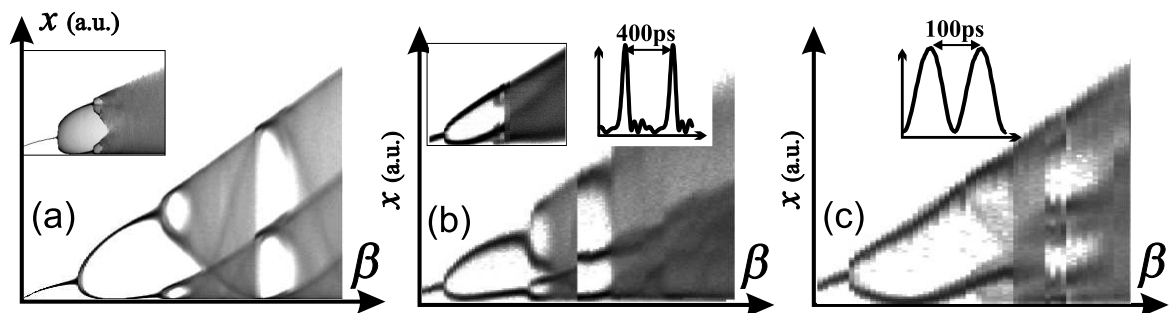
Si l’on ajuste précisément le retard temporel de la boucle d’oscillation à un multiple entier  $N$  de la période des pulses optiques, chacun de ces pulses est modulé non linéairement par la même fonction de transfert de modulation du Mach–Zehnder. Le résultat retardé de ces pulses optiques modulés en amplitude est ensuite détecté par la photodiode, amplifié et filtré par la contre-réaction électronique. Ce filtrage va avoir pour effet d’élargir l’image électrique des impulsions optiques, selon la réponse impulsionnelle de cette partie électrique (caractérisée par la constante de temps  $\tau$ ). Selon la largeur temporelle de la réponse impulsionnelle par rapport à la période de répétition des impulsions optiques, les impulsions électriques sont soit indépendantes si elles sont bien séparées temporellement, soit en interaction via la superposition temporelle de deux impulsions électriques successives. Une première approche de modélisation d’un tel système donne l’application en temps discret suivante :

$$x_n = \beta \cdot \sin^2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (h_k \cdot x_{n-N-k}) + \Phi_0 \right], \quad (3)$$

où les  $h_k$  peuvent être interprétés comme les échantillons de la réponse impulsionnelle électronique échantillonnée par les impulsions optiques. L’indice  $N$  représente le nombre d’impulsions optiques stockées pendant un tour dans la cavité opto-électronique. Lorsque les impulsions électriques successives sont bien séparées, cela signifie que seul  $h_0$  peut-être conservé dans la sommation infinie, et l’application en temps discret est d’ordre 1. Plus les impulsions sont proches, et plus il faut considérer un grand nombre d’échantillons de la réponse impulsionnelle.

## 2 Résultats expérimentaux

La figure 2 représente des diagrammes de bifurcation numériques et expérimentaux obtenus en faisant varier continûment, et lentement, le gain de la boucle d’oscillation. Une coupe verticale de chacun de ces diagrammes représente la densité de probabilité de la variable dynamique codée en niveaux de gris, pour un gain fixé, donc pour un régime dynamique fixé. Lorsque le gain augmente, on observe une route progressive vers le chaos.



**Fig.2.** Diagrammes de bifurcation ; a : simulation numérique, b :  $T_r = 400$  ps, c :  $T_r = 100$  ps.

La figure 2a représente le résultat de la simulation numérique effectuée à partir de (3) pour un modèle discret ; l’insert de cette figure correspond à une simulation dans des conditions très similaires, mais à partir d’un modèle de flot du type de (1). On remarque une différence caractéristique entre le flot et le modèle discret, la présence d’une fenêtre de périodicité (période 3) à l’intérieur des zones chaotiques dans le cas du temps discret uniquement.

La figure 2b correspond au relevé expérimental dans le cas où les impulsions optiques sont suffisamment éloignées pour pouvoir être séparées lors de leur conversion / amplification électrique ( $T_r = 400$  ps). L'insert de gauche représente également le même diagramme de bifurcation, du même système expérimental, mais dans le cas d'un laser continu (auquel correspond un oscillateur en temps continu). À nouveau, on peut remarquer que l'expérience confirme la présence d'une fenêtre de périodicité de période 3 dans le cas du temps discret uniquement.

Enfin, la figure 2c illustre un début de transition du temps discret vers le temps continu, lorsque la séparation des impulsions électriques ne peut plus être faite aussi nettement. Ce diagramme correspond à un taux de répétition des impulsions optiques de 100 ps seulement. L'insert représente l'allure dans le domaine électrique des impulsions optiques détectées; cette image des impulsions optiques apparaît nettement comme une variation quasi-continue (de type sinusoïdal), alors que dans la figure précédente, les impulsions électriques ont toujours un aspect impulsionnel. On remarque aussi dans le diagramme de bifurcation, que la fenêtre de périodicité tend à se fermer et à disparaître, du fait de la transition du comportement dynamique du temps discret vers le temps continu.

### 3 Conclusion

Nous avons présenté un montage expérimental en opto-électronique dont on peut ajuster la nature temps continu ou temps discret du comportement dynamique, en fonction de l'utilisation d'une source laser continue ou impulsionnelle. Le comportement en temps continu du système dynamique semble pouvoir être retrouvé à partir de l'utilisation d'une source impulsionnelle, lorsque l'on augmente la cadence de répétition des impulsions optiques, comparativement au temps de réponse électronique de l'oscillateur : la transition temps discret / temps continu est définie par la résolution, ou la non-résolution des impulsions optiques par la partie électronique. Ce mécanisme de transition, contrairement à la limite singulière du Map, conserve la grande dimension des dynamiques à retard. En effet, en temps discret, deux impulsions successives sont résolues et indépendantes, et le nombre de degrés de liberté est alors lié au nombre d'impulsions stockées dans l'oscillateur à retard. De plus, lorsque les impulsions utilisées ont un taux de répétition de plus en plus élevé, cette dimension n'augmente pas indéfiniment; elle est en effet limitée par le temps de réponse physique  $\tau$  de l'oscillateur. Cette limitation de dimension par le rapport  $\tau_R/\tau$  est tout à fait connu dans le cas du calcul de dimension de Lyapounov des dynamiques à retard [8].

### Références

1. T. ERNEUX, Les dynamiques non linéaires à retard, *Compte-Rendus de la 8ème Rencontre du Non Linéaire*, pp. 73–78 (2005).
2. K. IKEDA, Multiple-Valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System, *Optics Communications*, **30** (3), 257–261 (1979).
3. H. M. GIBBS, F. A. HOPF, D. L. KAPLAN & R. L. SHOEMAKER, Observation of chaos in optical bistability, *Physical Review Letters*, **46** (7), 474–477 (1981).
4. L. LARGER, P.-A. LACOURT, S. POINSOT, M. HANNA, From flow to map in experimental high dimensional electro-optic nonlinear delay oscillator, *Physical Review Letters*, **95** (4), 043903 (2005).
5. L. M. PECORA & T. L. CARROLL, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64** (8), 821–824 (1990).
6. K. M. CUOMO & A. V. OPPENHEIM, Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications, *Physical Review Letters*, **71** (1), 65–68 (1993).
7. A. ARGYRIS, D. SYVRIDIS, L. LARGER, V. ANNOVAZZI-LODI, P. COLET, I. FISCHER, J. GARCIA-OJALVO, C. R. MIRASSO, L. PESQUERA, K. A. SHORE, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **437**, 343–346 (2005).
8. B. DORIZZI, B. GRAMMATICOS, M. LE BERRE, Y. POMEAU, E. RESSAYRE & A. TALLET, Statistics and dimension of chaos in differential delay systems, *Physical Review A*, **35** (1), 328–328 (1987).