

Approximation des équations 3D de la magnétohydrodynamique par une méthode spectrale-éléments finis nodaux

R. Laguerre

LIMSI (CNRS-UPR 3251), BP 133, 91403, Orsay, France
laguerre@limsi.fr

Résumé. Ce projet s'inscrit dans le développement d'un code de résolution des équations de la MHD. L'objet de cet article est de présenter une nouvelle méthode de résolution des équations de Maxwell dans un milieu hétérogène, utilisant des éléments finis de Lagrange et une technique de pénalisation de type Galerkin discontinue pour imposer les continuités nécessaires. Cette méthode s'est montrée satisfaisante pour des cas simples. Nous proposons dans cet article des résultats en rapport avec l'effet dynamo, pour une configuration bien connue (dynamo de Ponomarenko), puis pour un projet expérimental en cours de développement (dynamo de Perm).

Abstract. The Maxwell equations in the MHD limit are solved in heterogeneous domains by using Lagrange finite elements and by enforcing continuities across interfaces using an interior penalty technique. Comparisons show good agreement with analytical solutions or previously published numerical solutions. We show in this paper some results dealing with dynamo action.

1 Introduction

Le but du présent article est de présenter et de valider une nouvelle méthode numérique de résolution des équations de la magnétohydrodynamique (MHD) en trois dimensions. Une des principales difficultés numériques à surmonter dans ce type de problème est l'hétérogénéité du domaine de calcul. Il est composé d'un domaine conducteur et d'un domaine isolant, généralement du vide. Les équations de Maxwell dans ces deux domaines ne s'expriment pas de la même façon. La loi d'Ohm ne s'applique plus dans le vide. Certaines conditions de passage sont alors à respecter au niveau de l'interface entre les deux milieux, et des conditions aux limites acceptables doivent être imposées sur les bords du domaine numérique, de manière à respecter une décroissance du champ magnétique en $1/r^3$ lorsque l'on s'éloigne des sources de perturbation du champ magnétique.

Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ce type de problème. L'une d'elles consiste à considérer le domaine isolant comme un domaine très faiblement conducteur et ensuite à éliminer le champ électrique \mathbf{E} des équations de Maxwell [4]. Une autre approche consiste à considérer le champ électrique \mathbf{E} à l'extérieur du domaine comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de rotationnel nul du champ magnétique \mathbf{H} dans le vide [2]. Cette méthode s'est avérée être efficace en deux dimensions en utilisant des éléments finis mixtes [3]. Mais son extension à trois dimensions d'espace, en gardant les deux champs \mathbf{E} et \mathbf{H} , deviendrait très coûteuse. C'est ce qui nous a amené à choisir une formulation utilisant le potentiel magnétique.

L'approche que nous avons choisie pour résoudre les équations de la MHD est largement présentée dans [5] pour la résolution des équations de Maxwell. Cette approche consiste à exprimer le champ magnétique à rotationnel nul dans le domaine isolant comme le gradient d'un potentiel scalaire ϕ . De cette façon, le nombre de variables est réduit. Une autre approche, utilisant des éléments de frontière, permet également de réduire le nombre de variables. Cette méthode s'est avérée efficace dans le cas de la diffusion ohmique [6]. Nous utilisons des éléments finis de Lagrange pour approcher \mathbf{H} et ϕ et utilisons une méthode de pénalisation de Galerkin (IPG) pour imposer la continuité entre H et $\nabla\phi$. Cette méthode apparaît satisfaisante dans le cas de Benchmark 3-D et de dynamo.

L'article se divise en deux parties. Nous présentons dans la première les équations à résoudre ainsi que la méthode de résolution. Dans la seconde, il s'agit de présenter des résultats obtenus dans notre cadre d'intérêt, l'effet dynamo.

2 Equations et méthode numérique

Les équations complètes de la MHD se composent des équations de Navier-Stokes incompressibles et des équations de Maxwell. Ces deux ensembles d'équations interagissent par l'intermédiaire de la loi d'Ohm, responsable des effets d'induction, et de la force Laplace, qui traduit la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse. Dans cet article, on s'intéresse à la résolution des équations de Maxwell uniquement, en considérant un champ de vitesse figé qui ne sera pas influencé par la force de Laplace. Dans cette partie, nous dérivons une formulation $\mathbf{H}-\phi$ des équations de Maxwell, par élimination du champ électrique et nous introduisons la méthode de pénalisation, permettant d'imposer la continuité du champ magnétique à l'interface.

2.1 Formulation $\mathbf{H}-\phi$ des équations de Maxwell

Dans le cas de la MHD, les équations de Maxwell sont résolues dans l'approximation des courants de Foucault, le terme de courant de déplacement de l'équation de Maxwell-Faraday est négligé. Une étude asymptotique de cette approximation est présentée dans [1]. L'approximation est valable tant que la vitesse caractéristique de déplacement du fluide reste faible devant la vitesse de la lumière. Les équations à résoudre deviennent :

$$\begin{cases} \mu \partial_t \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mu \mathbf{H}) + \mathbf{j}^s, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{a}, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0, \end{cases} \quad (1)$$

avec \mathbf{H} le champ magnétique, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{u} le champ de vitesse, \mathbf{j}^s un éventuel courant source, σ la conductivité électrique et μ la perméabilité magnétique du milieu. Les deux premières équations sont à résoudre dans l'ensemble du domaine de calcul, que nous appellerons Ω . Le problème est muni d'une condition initiale \mathbf{H}_0 , et des conditions limites découlant de la formulation faible du problème, à savoir l'imposition des composantes tangentielles du champ électrique sur la frontière Γ du domaine.

Pour les problèmes que nous voulons traiter, le domaine Ω se compose de deux milieux différents. Il y a un milieu conducteur Ω_c et un milieu isolant Ω_v . Dans le domaine isolant, la loi d'Ohm ne s'applique pas et le champ magnétique est à rotationnel nul. Il peut donc s'exprimer comme le gradient d'un champ scalaire ϕ , à condition que Ω_c soit simplement connecté. Des conditions de passage sont à respecter au niveau de l'interface Σ entre les deux milieux. Les composantes tangentielles des champs magnétique et électrique doivent être continues :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^c \times \mathbf{n}^c + \mathbf{E}^v \times \mathbf{n}^v)|_\Sigma &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H}^c \times \mathbf{n}^c + \mathbf{H}^v \times \mathbf{n}^v)|_\Sigma &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2)$$

où les exposants c et v signifient que le champ est pris dans Ω_c ou Ω_v et les vecteurs \mathbf{n}^c et \mathbf{n}^v sont les normales extérieures à leurs domaines respectifs. Dans notre méthode, \mathbf{E} est éliminé et les conditions de passage à l'interface Σ s'expriment comme la continuité entre les composantes tangentielles de \mathbf{H} et de $\nabla\phi$, et la continuité entre les composantes normales de $\mu^c \mathbf{H}$ et de $\mu^v \nabla\phi$. On aboutit à un système d'équations pour \mathbf{H} et pour ϕ , couplées par les conditions de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} \mu_c \partial_t \mathbf{H}^c = -\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \mathbf{u} \times \mu^c \mathbf{H}^c \right), & \text{dans } \Omega_c, \\ \mu_v \partial_t \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega_v, \\ (\nabla \times \mathbf{H}^c - \sigma \mathbf{u} \times \mu^c \mathbf{H}^c) \times \mathbf{n}^c = \sigma \mathbf{a} + \mathbf{j}^s \times \mathbf{n}^c & \text{sur } \Gamma_c, \\ \mu_v \partial_{\mathbf{n}^v} (\partial_t \phi) = -\mathbf{n}^v \cdot \nabla \times (\mathbf{n}^v \times \mathbf{a}), & \text{sur } \Gamma_v, \\ \mathbf{H}^c \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi \times \mathbf{n}^v = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \mu_c \mathbf{H}^c \cdot \mathbf{n}^c + \mu_v \nabla \phi \cdot \mathbf{n}^v = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{H}^c|_{t=0} = \mathbf{H}_0^c, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0. \end{cases} \quad (3)$$

où Γ_c et Γ_v sont les bords de Ω_c et Ω_v ne contenant pas la frontière Σ . Nous retrouvons une équation d'évolution pour \mathbf{H}^c et une autre pour ϕ .

2.2 Méthode de pénalisation Galerkin discontinue

Nous approchons la solution du système (3) à l'aide d'une méthode éléments finis. Nous utilisons des éléments de Lagrange de degré 1 pour le champ magnétique dans le domaine conducteur, et des éléments de degré 2 pour le champ potentiel ϕ dans le domaine isolant. Il y a différentes façons d'imposer les continuités à respecter au niveau de l'interface. Il est possible de l'imposer directement dans l'espace des fonctions d'approximation, en utilisant des éléments de Nédélec [1]. Nous avons choisi d'imposer les continuités des champs à l'aide d'une méthode de pénalisation de type Galerkin discontinue. Cette méthode consiste à rajouter un terme de pénalisation théoriquement nul dans la formulation faible des équations (3). La résolution du problème consiste alors à trouver les champs \mathbf{H}_h et ϕ_h tels que, pour toutes les fonctions tests \mathbf{b} et ψ suffisamment régulières :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_h|_{t=0} = \mathbf{H}_{0,h}, & \phi_h|_{t=0} = \phi_{0,h}, \\ \int_{\Omega_c} \mu^c \partial_t \mathbf{H}_h \cdot \mathbf{b} + \int_{\Omega_v} \mu^v \nabla \partial_t \phi_h \cdot \nabla \psi + a_h((\mathbf{H}_h, \phi_h), (\mathbf{b}, \psi)) = J(\mathbf{H}_h; \mathbf{b}, \psi), \end{cases} \quad (4)$$

Le terme source J se décompose en un terme de forçage éventuel dû à un courant imposé et un terme traduisant l'influence des conditions aux limites. Dans la forme bilinéaire a_h , on retrouve un terme de dissipation, un terme assurant la consistance du schéma numérique et un terme ajouté de pénalisation qui s'exprime de la manière suivante :

$$Pen((\mathbf{H}_h, \phi_h), (\mathbf{b}, \psi)) = \int_{\Sigma} \frac{\beta}{h} (\mathbf{H}_h \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi_h \times \mathbf{n}^v) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \psi \times \mathbf{n}^v). \quad (5)$$

Théoriquement, ce terme est bien nul, et on observe qu'il est pondéré par une constante β ajustable, h étant le pas d'espace. Il force la quantité $\frac{\beta}{h} (\mathbf{H}_h \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi_h \times \mathbf{n}^v)$ à rester faible sur l'interface. Cette méthode est stable et convergente lorsque β est assez grand.

Techniquement, nous avons choisi d'écrire l'ensemble des équations dans un repère cylindrique, et de décomposer toutes les variables en séries de Fourier suivant la direction azimutale. De ce fait, la géométrie du problème doit être axisymétrique (sphère, cylindre, ellipsoïde,...). L'avancée temporelle est discrétisée à l'aide d'un schéma semi explicite (BDF2) d'ordre 2. Enfin, les conditions limites peuvent être imposées de deux manières. La première consiste à imposer les valeurs des composantes tangentielles de \mathbf{E} , ce qui revient à imposer le flux de $\partial_t \phi$ sur Γ_v (conditions limites de Neumann). La seconde solution est d'imposer directement la valeur de ϕ sur Γ_v (conditions limites de Dirichlet), ce qui revient à imposer la composante tangentielle du champ magnétique.

3 Résultats : Effet dynamo

Dans le but de valider notre méthode, nous avons abordé des cas simples, tels que la diffusion dans la sphère ou le cylindre périodique, qui admettent des solutions analytiques, puis la diffusion dans un cylindre fini et une ellipse. Nous avons ensuite abordé des problèmes d'induction tels que le rotor placé dans un champ uniforme. Les résultats obtenus sont satisfaisants [9]. Pour plus de clarté, nous ne présenterons ici que les résultats relatifs à l'effet dynamo. Le paramètre de contrôle de l'instabilité dynamo est le nombre de Reynolds magnétique, défini par :

$$R_m = \frac{UL}{\eta}, \quad (6)$$

avec U et L des valeurs caractéristiques d'une vitesse et d'une longueur, et η la diffusivité magnétique. Ce nombre adimensionné compare le temps caractéristique d'advection et le temps caractéristique de diffusion du champ. L'étude des problèmes de dynamo que nous allons présenter consiste à obtenir les valeurs critiques R_m^c , ainsi que d'autres valeurs pertinentes, pour lesquelles le taux de croissance du champ magnétique devient positif.

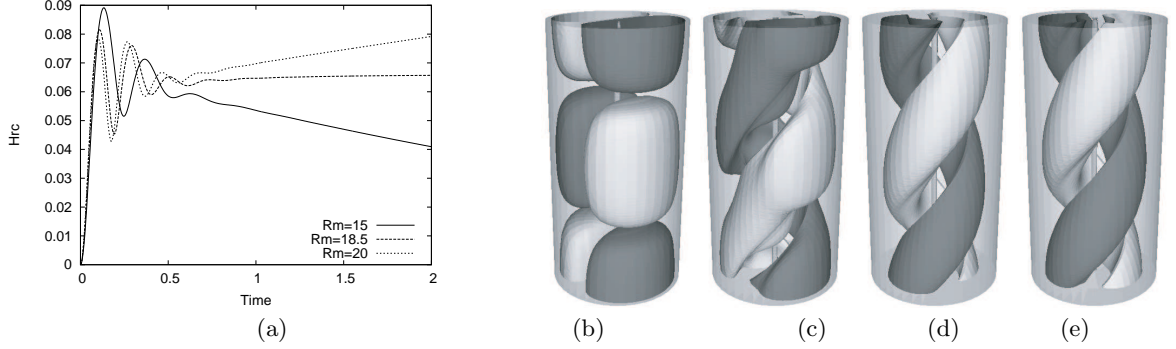


Fig.1. Dynamo de Ponomarenko dans un cylindre périodique : (a) Evolution temporelle de la partie réelle de H_r pour différents nombres de Reynolds magnétique; isosurfaces de la composante axiale de \mathbf{H} avec 25% du maximum (en noir) et 25% du minimum (en blanc), (b) à l'instant initial, (c) pendant le régime transitoire, et pendant le régime asymptotique, (d) à $t = 0.7$ et (e) à $t = 1$.

3.1 La dynamo de Ponomarenko

Nous avons choisi cette configuration afin de simuler un problème bien connu en trois dimensions [10,11] et qui a donné lieu à l'observation de l'effet dynamo en laboratoire. Dans sa version analytique, la configuration consiste en un écoulement hélicoïdal de fluide conducteur dans un cylindre de rayon R_i ($u_r = 0$, $u_\theta = r\omega$, $u_z = \chi R_i \omega$), placé dans un milieu conducteur infini et au repos. Dans ces conditions, le mode propre critique associé au plus bas nombre de Reynolds magnétique $R_m^c = 17.73$, correspond à $\chi = 1.3$, $k = -0.39$ et $m = 1$, où k et m sont les nombres d'onde axial et azimutal respectivement.

Dans notre étude, l'écoulement est entouré de conducteur immobile jusqu'à $R_o = 2R_i$ et l'ensemble est plongé dans du vide avec $R_v = 8R_i$. Afin de comparer nos résultats avec [7], nous prenons $\chi = 1$ et $L_z^c = L_z^v = 8$ et nous prenons la même définition du nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu\sigma R_i^2 \omega$, basé sur la vitesse de rotation ($\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$). L'écoulement est axisymétrique et périodique en z et le terme de couplage, $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H})$, est linéaire en \mathbf{H} . La solution initiale doit donc être excitée en mode azimutal $m = 1$ et être axialement périodique, de période L_z^c (nombre d'onde axial $k_n = 2\pi n/L_z^c$). La condition initiale utilisée s'écrit :

$$\begin{aligned} H_r(r, \theta, z, t = 0) &= 0, \\ H_\theta(r, \theta, z, t = 0) &= -J_2(j_2 r/R_o) k_1 \cos(\theta) \sin(k_1 z), \\ H_z(r, \theta, z, t = 0) &= J_2(j_2 r/R_o) \sin(\theta) \cos(k_1 z)/r, \end{aligned} \quad (7)$$

où $j_2 = 5.135662\dots$ est la première racine de la fonction de Bessel J_2 . Le potentiel extérieur est nul à $t = 0$. La figure 3(b) présente cet état initial.

La figure 3(a) montre l'évolution de la partie réelle de la composante H_r pour $R_m = 15$, $R_m = 18.5$ et $R_m = 20$. Nous obtenons, par interpolation linéaire des taux de croissance, une approximation du nombre de Reynolds magnétique critique qui vaut $R_{mc} = 18.5$. On observe que l'évolution de la composante, qui est nulle à $t = 0$, présente un régime transitoire d'un temps de l'ordre de la période de rotation ($2\pi/R_m$). La fréquence axiale, obtenue à partir de la période axiale, vaut environ $0.11R_m$. Ces résultats sont en accord avec [7]. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est pris au dessus du seuil, on observe sur la figure 3(c)(d)(e) que la source du mode instable est localisée sur la discontinuité du champ de vitesse en $r = 1$, là où le cisaillement est maximum. Le mode instable est alors en forme d'hélice.

Cet exemple valide le code dynamo pour des conductivités du fluide et du conducteur immobile identiques. Nous sommes en train de tester le code en imposant un saut de conductivité électrique entre le domaine de fluide en mouvement et le domaine conducteur au repos.

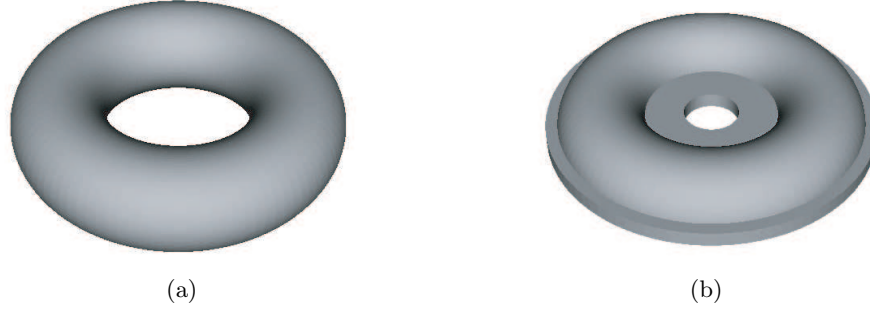


Fig.2. Représentation des deux configurations utilisées pour la modélisation de la dynamo de Perm. Le rayon au centre vaut $R = 4$, le rayon intérieur d'une section est $r_0 = 1.2$, et le rayon extérieur $r_1 = 1.6$. La conductivité du matériau constituant ces tores vaut cinq fois celle du fluide ($\sigma_{shell} = 5\sigma$). (a) cas 'Tore'; (b) cas 'Perm' plus proche de la réalité.

3.2 La dynamo de PERM

Nous ne sommes pas encore capables de simuler des problèmes de tokamak, mais il est possible d'étudier des écoulements de fluide conducteur dans des tores, comme c'est le cas dans l'expérience de Perm [8]. L'idée de l'expérience est d'engendrer un effet dynamo au sein d'un écoulement instationnaire hélicoïdal dans un container toroïdal. Ce tore est mis en rotation rapide et est brusquement freiné. Pour modéliser ce problème, nous considérons un écoulement stationnaire élicoïdal dans un tore de rayon au centre $R_i = 4$, de rayon de section $r_0 = 1.2$ et d'épaisseur $e = r_1 - r_0 = 0.4$. La conductivité électrique du tore est 5 fois celle du fluide ($\sigma_{sh} = 5\sigma_{fl}$). Deux configurations différentes ont été étudiées et sont montrées sur la figure 3.2 : la première (*Tore*) consiste en un tore simple, et la seconde (*Perm*) est plus proche de l'expérience avec un manchon rajouté au tore initial. L'écoulement dans les deux configurations, pour un rayon de section r_0 est :

$$\begin{cases} u_r = -\chi(R_m/r_0)\frac{Rz}{r_0r} \\ u_\theta = R_m/r_0 \\ u_z = \chi(R_m/r_0)\frac{R(r-R)}{r_0r} \end{cases} \quad (8)$$

où χ est le rapport entre vitesses poloidale et toroidale et R_m le nombre de Reynolds magnétique défini par $R_m = \mu\sigma r_0 U$. Nous avons pris $\chi = 1$ comme dans [8]. Pour la même raison que dans le cas de la dynamo de Ponomarenko, la condition initiale doit contenir l'ensemble des modes à tester. Nous voulons a priori tester tous les modes à part le mode $m = 0$ car l'écoulement est axisymétrique, auquel cas la dynamo serait impossible. La condition initiale consiste à allumer une boucle de courant purement toroïdale ($\mathbf{j}^s = j_0 \mathbf{e}_\theta$) pendant un temps court, pour l'ensemble des modes azimutaux. Nous avons effectué ces simulations pour différents R_m et nous trouvons que le mode instable est le mode $m = 3$, correspondant aux nombres de Reynolds critiques $R_{mc}(Perm) = 16 \pm 0.5$ et $R_{mc}(Torus) = 17.5 \pm 0.5$. Ces valeurs critiques sont plus faibles que celles obtenues dans [8] pour $(r_1 - r_0)/r_0 = 0.33$ dans le cas d'un cylindre périodique ($R/r_0 \rightarrow 0$) similaire au cas d la figure 3. Cette différence pourrait provenir de l'effet de courbure introduit dans le problème. Pour $R_m = 17 > R_{mc}(Perm)$, on observe sur la figure 3.2 que la source du mode instable se situe également au niveau du cisaillement fort du champ de vitesse.

4 Conclusion

Nous avons montré que notre méthode de résolution des équations de Maxwell est satisfaisante pour des cas de dynamo cinématique. Cette méthode donne également de bons résultats pour des cas plus simple de diffusion ou d'induction [5,9].



Fig.3. Isosurfaces de la composante azimutale de \mathbf{H} avec 25% du maximum (en noir) et 25% du minimum (en blanc), pour le cas 'Tore' à deux instants : (a) $t = 1$ et (b) $t = 2 \sim 1 + T/4$ avec T la période.

Cette méthode présente pour l'instant une limitation, qui est qu'elle s'applique seulement à des cas pour lesquels le champ magnétique dans le domaine isolant peut s'exprimer sous la forme d'un potentiel. Cela est vérifié lorsque la circulation du champ magnétique sur tout circuit fermé dans le domaine isolant est nulle. Ainsi, nous ne sommes pas encore capables de modéliser des tokamak, mais le code de calcul peut être utilisé pour d'autres applications telles que le chauffage par induction dans des formes axisymétriques, ou des mesures de résistivité électrique.

Notre objectif est maintenant de coupler la résolution des équations de Maxwell à la résolution des équations de Navier-Stokes. Le code hydrodynamique éléments finis est prêt. Il nous sera alors possible d'étudier des problèmes non linéaires et plus réalistes de MHD en trois dimensions.

Références

1. A. BOSSAVIT *Electromagnétisme en vue de la modélisation*, SMAI/Springer-Verlag, Paris (1993).
2. J.-L. GUERMOND AND P.D. MINEV, Mixed Finite element approximation of an MHD problem involving conducting and insulating regions : the 2D case, *modél. Math. Anal. Numér. (M2AN)*, **36** (3), 517-536 (2002).
3. J.-L. GUERMOND, J. LÉORAT AND C. NORE, A new Finite Element Method for magneto-dynamical problems : two-dimensional results, *Eur. J. Mech./Fluids*, **22**, 555-579 (2003).
4. K. H. CHAN, K. ZHANG, J. ZOU AND G. SCHUBERT, A non-linear, 3-D spherical α^2 dynamo using a finite element method, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **128**, 35-50 (2001).
5. J.-L. GUERMOND, R. LAGUERRE, J. LÉORAT AND C. NORE, A Discontinuous Galerkin Method for the MHD equations in heterogeneous domains, En préparation, (2006)
6. A. B. ISKAKOV, S. DESCOMBES AND E. DORMY, An integro-differential formulation for magnetic induction in bounded domains : boundary element-finite volume method, *J. Comput. Phys.*, **197** (2), 540-554 (2004)
7. R. KAISER AND A. TILGNER, Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor, *Phys. Rev. E*, **60** (3), 2949-2952 (1999)
8. W. DOBLER, P. FRICK AND R. STEPANOV, Screw dynamo in a time-dependent pipe flow, *Phys. Rev. E*, **67**, 056309 (2003)
9. R. LAGUERRE, C. NORE, J. LÉORAT AND J.-L. GUERMOND, Induction effects in isolated axisymmetric conductors using a new finite element method, à paraître dans proceedings of MHD Summer Program 2006.
10. F. PÉTRÉLIS, Instabilité Dynamo : Etude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique, PhD Thesis, Ecole normale supérieure (2002).
11. YU. B. PONOMARENKO, Theory of the hydromagnetic generator, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **14**, 775 (1273)