

# Solitons optiques spatio-temporels dissipatifs

Philippe Grellu<sup>1</sup>, Jose M. Soto-Crespo<sup>2</sup>, & Nail Akhmediev<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, UMR 5027 CNRS, 9 avenue A. Savary, 21078 Dijon Cedex

<sup>2</sup> Insituto de Optica, CSIC, Serrano 121, 28006 Madrid

<sup>3</sup> Optical Science Center, The Australian National University, Canberra ACT 0200

philippe.grellu@u-bourgogne.fr

**Résumé.** Afin d'obtenir des solitons spatio-temporels complets, autoconfinés dans les trois dimensions spatiales et dans le domaine temporel, nous proposons une approche nouvelle, fondée principalement sur l'emploi de non-linéarités dissipatives. Cette approche utilise un modèle de Ginzburg-Landau complexe cubique-quintique à coefficients complexes, dans lequel les effets de diffraction sont incorporés avec l'approximation paraxiale. Les simulations numériques conduisent à la démonstration de balles de lumières dissipatives stables. En variant les paramètres du modèle, la formation de structures transversales non stationnaires est également mise en évidence.

**Abstract.** In order to obtain stable spatio-temporal (3+1)D optical solitons, which means solitons self confined in the three spatial dimensions as well as localized in the temporal domain, we propose a novel approach mainly based on the use of dissipative nonlinearities. We perform numerical simulations of pulse propagation using a complex cubic-quintic Ginzburg-Landau equation model, for which diffraction effects are included in the paraxial approximation. Numerical simulations show the existence of stable dissipative light bullets. Varying the parameters of the model, the fomation of non stationary transverse patterns is also shown.

## 1 Introduction

La recherche de solitons spatio-temporels autoconfinés dans les trois dimensions spatiales et dans le domaine temporel, est un problème mythique de l'optique non-linéaire qui a débuté il y a une quinzaine d'années [1]. Le terme de *'balle de lumière'* a été alors employé pour désigner ces solitons complets se formant dans les (3+1) dimensions. Le choix de la non-linéarité permettant un tel autoconfinement et garantissant une solution stable est délicat, et le lien entre la dimensionalité et l'effet non-linéaire utilisé est particulièrement important. Par exemple, un milieu Kerr peut produire un confinement stable si l'on se limite à une dimension transverse, mais ce n'est plus le cas pour des dimensionalités plus élevées. En effet, à partir de deux dimensions transverses, on montre que la non-linéarité Kerr, seule, produit des solutions localisées instables, qui s'autofocalisent ou se dispersent rapidement en présence de bruit. Pour stabiliser les solitons spatio-temporels, des non-linéarités plus élaborées ont été proposées, comme par exemple des non-linéarités d'ordre 3 saturables ou bien des non-linéarités d'ordre 2 couplant deux longueurs d'ondes distinctes, le fondamental et la seconde harmonique [2,3].

Jusqu'au milieu des années 90, les recherches de milieux non-linéaires concernaient presque exclusivement les non-linéarités dispersives. Mais durant les dix dernières années, les solitons de cavité ont fait l'objet d'un nombre croissant de travaux, sur le plan théorique comme au niveau expérimental. Ces solitons de cavité correspondent à des structures transverses stables et localisées qui peuvent se former dans l'environnement dissipatif de cavités laser de grande ouverture, c'est-à-dire fortement multimodes. En particulier, l'emploi de lasers à semiconducteurs a permis la mise en évidence du contrôle de plusieurs solitons, ce qui présente un intérêt pour le développement de fonctions de traitement tout-optiques de l'information [4]. Il s'agit jusqu'à présent de solitons spatiaux localisés transversalement, mais non localisés dans le domaine temporel, puisque les cavités fonctionnent en régime quasi-continu.

La question des solitons dissipatifs spatio-temporels complets a été abordée récemment dans le cas de situations à symétrie sphérique, à la fois numériquement et théoriquement [5,6]. La symétrie sphérique permet de simplifier notablement le problème, cependant elle a de forte chances d'être brisée en réalité,

puisque les variables spatiales et temporelle ne sont pas complètement équivalentes, et que la stabilité ne peut être prouvée de façon satisfaisante qu'en considérant des conditions initiales brisant toute symétrie arbitraire. Nous rapportons dans cet article les résultats de travaux récents obtenus à partir de simulations numériques, sur la base d'un modèle de Ginzburg-Landau cubique-quintique à coefficients complexes, dans lequel les effets de diffraction sont incorporés avec l'approximation paraxiale [7]. Pour certains jeux de paramètres, nous obtenons des solitons spatio-temporels stables qui correspondent ainsi à des *balles de lumières dissipatives*. Le modèle et ses solutions *balles de lumière dissipatives* sont présentés à la section suivante. Nous y mettons en évidence le rôle important joué par le paramètre de contrôle associé au gain non-linéaire. La section 3 traite de situations pour lesquelles les balles de lumières ne sont pas stables, et montre dans ce cas la formation de structures transverses non stationnaires, dont l'énergie croît avec le temps de propagation.

## 2 Balles de lumières dissipatives stables

### 2.1 Présentation du modèle

Notre modèle est fondé sur une extension du modèle de Ginzburg-Landau cubique-quintique à coefficients complexes (CCQGLE). Ce modèle incorpore des non-linéarités dispersives et dissipatives d'ordre trois et cinq, ainsi que la diffraction spatiale. L'équation de propagation normalisée que nous avons employée est la suivante :

$$i\Psi_z + \frac{D}{2}\Psi_{tt} + \frac{1}{2}\Psi_{xx} + \frac{1}{2}\Psi_{yy} + |\Psi|^2\Psi + \nu|\Psi|^4\Psi = i\delta\Psi + i\epsilon|\Psi|^2 + i\beta\Psi_{tt} + i\mu|\Psi|^4\Psi \quad (1)$$

Ce modèle présente un grand intérêt dans le cadre de la modélisation d'un milieu amplificateur laser, car la signification physique de tous les termes est bien établie.

L'enveloppe du champ  $\Psi$  est une fonction des quatre variables spatio-temporelles  $x, y, z$  et  $t$ , où  $t$  est le temps dans le référentiel propre en mouvement avec l'impulsion optique tandis que  $x$  et  $y$  représentent les deux coordonnées spatiales transverses. Le membre de gauche de l'équation contient les termes dispersifs.  $D$  est le paramètre de dispersion chromatique,  $\nu$  est le coefficient de saturation de la non-linéarité Kerr. Dans les simulations qui suivent,  $D$  est pris égal à 1 pour représenter une propagation en régime de dispersion anormale, et la valeur du coefficient de saturation de l'effet Kerr est très faible. Le membre de droite de l'équation contient les termes dissipatifs :  $\delta$  représente le niveau des pertes linéaires ( $\delta \leq 0$ ), tandis que  $\epsilon$  et  $\mu$  représentent l'importance respective du gain non-linéaire ( $\epsilon \geq 0$ ) et de la saturation du gain non-linéaire ( $\mu \leq 0$ ). Le coefficient  $\beta$  représente l'importance du filtrage spectral, qui est toujours à l'oeuvre en pratique car la bande passante du milieu à gain est finie.

### 2.2 Résolution numérique

L'équation de propagation est résolue numériquement au moyen d'une méthode de Fourier à pas divisés : les dérivées partielles secondes sont résolues dans l'espace de Fourier, tandis que les autres termes linéaires et non-linéaires sont résolus avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les simulations présentées ci-après ont été calculées à partir d'un maillage de 512 points dans chaque dimension spatiale transverse, et avec 256 points temporels. Afin d'éviter les artefacts numériques, divers pas spatiaux et temporels ont été testés.

En relation avec les travaux théoriques effectués dans le cas de solitons dissipatifs temporels [8], il est important de rappeler que plusieurs solutions isolées peuvent coexister pour un jeu de paramètres donné, et que ces solutions ne sont pas nécessairement stables.

Ainsi, en fixant par exemple le jeu de paramètres suivants :  $D = 1$ ,  $\nu = -0.01$ ,  $\delta = -0.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\mu = -0.1$ , et en faisant varier le paramètre de non-linéarité du gain  $\epsilon$ , on peut trouver des domaines d'existence relativement étendus pour les solutions localisées, certaines étant stables et d'autres non.

La condition initiale de champ est choisie de la forme suivante :

$$\Psi(x, y, z = 0, t) = 4.e^{-\left(\frac{t}{1.3}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{0.9}\right)^2} \quad (2)$$

Cette condition initiale est choisie elliptique plutôt que cylindrique en  $x$  et  $y$ , afin d'éviter la convergence vers une solution cylindrique instable. La brisure de symétrie initiale est utile afin de discriminer plus rapidement les solutions stables.

Le paramètre de contrôle le plus pertinent pour suivre l'évolution de la solution est l'énergie totale du champ, définie par :

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dt \quad (3)$$

S'agissant d'un système dissipatif, l'énergie n'est évidemment pas une quantité conservée a priori. Lorsque la solution reste localisée, l'énergie varie dans un intervalle borné. Si la solution converge vers un état stationnaire, l'énergie totale converge également, tandis que si le champ se délocalise, l'énergie totale tend vers l'infini. Une autre possibilité est évidemment le cas où le champ se dissipe et tend vers zéro.

### 2.3 Balles de lumière stables

En variant le paramètre de non-linéarité du gain  $\epsilon$ , la figure 1 présente les diverses évolutions obtenues à partir de la condition initiale (2). Lorsque  $\epsilon$  est compris entre 1.0 et 1.4, les solutions tendent rapidement vers des valeurs stationnaires lorsque la distance de propagation est supérieure à 10. Ces solutions stationnaires correspondent à des balles de lumière dissipatives stables, dont les profils spatiaux et temporels sont présentés à la figure 2.

Il faut mentionner que la condition initiale est choisie notablement éloignée des solutions stationnaires, comme l'indique la différence importante des énergies entre l'état initial et les solutions stationnaires.

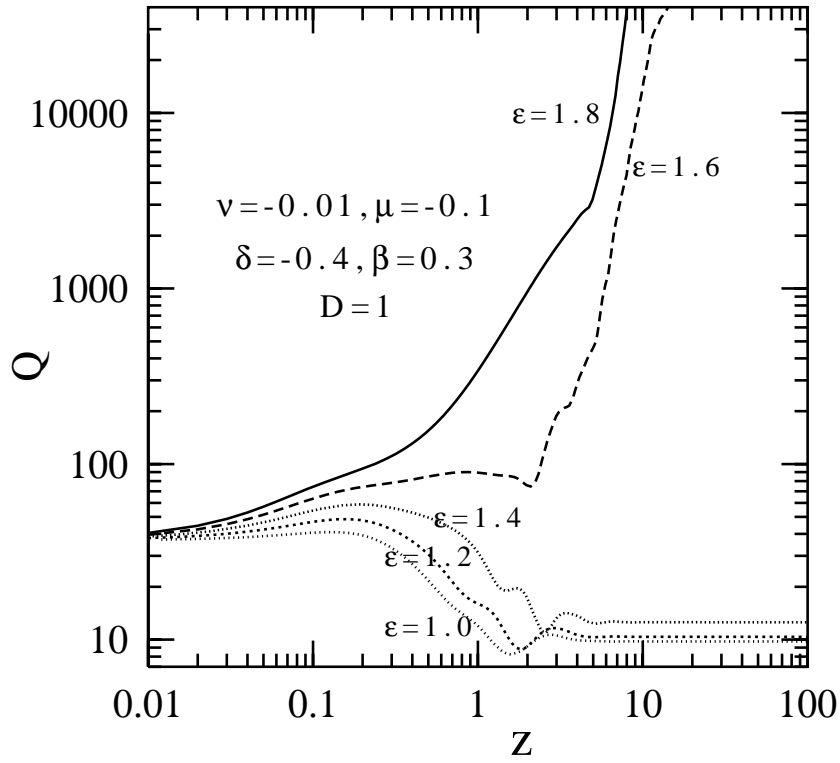
Il est important de souligner que si l'on choisissait une condition initiale très différente de (2), l'évolution pourrait mener à une solution également très différente, et le domaine d'existence des balles de lumière stables par rapport au paramètre  $\epsilon$ , sur lequel s'est porté précédemment notre discussion, en serait sensiblement modifié. Cela provient du fait que les solitons dissipatifs stables sont généralement associés à l'existence d'un bassin attracteur. Tant que les conditions initiales sont suffisamment voisines de l'attracteur, elles se trouvent dans le bassin attracteur et convergent toutes vers une unique solution stationnaire, dont les caractéristiques dépendent des valeurs des paramètres du modèle.

## 3 Structures non stationnaires

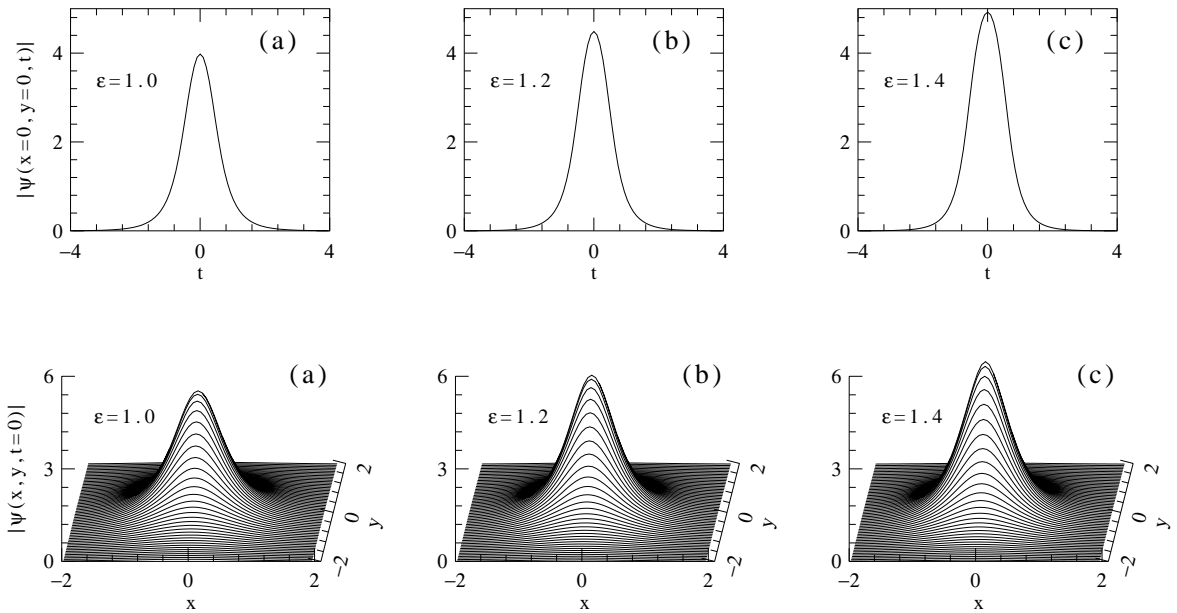
En employant toujours la condition initiale (2), et lorsque le paramètre  $\epsilon$  est pris supérieur ou égal à 1.45, la solution devient instable. Les solutions stationnaires instables peuvent être observées en employant une condition initiale à symétrie cylindrique, par exemple [7]. L'évolution de  $Q$  converge d'abord vers une valeur stationnaire, puis diverge pour des grandes valeurs de  $z$  en raison de l'extrême sensibilité à la brisure de symétrie cylindrique induite par les arrondis numériques.

Lorsque  $\epsilon$  est supérieur à 1.5, l'évolution ne passe plus par un état stationnaire, mais il y a divergence rapide de l'énergie totale  $Q$ . Cette évolution est présentée dans la figure 1, dans le cas où  $\epsilon$  vaut 1.6 ou 1.8, et correspond à une extension de l'onde au cours de la propagation dans le domaine spatial transverse, et éventuellement dans le domaine temporel.

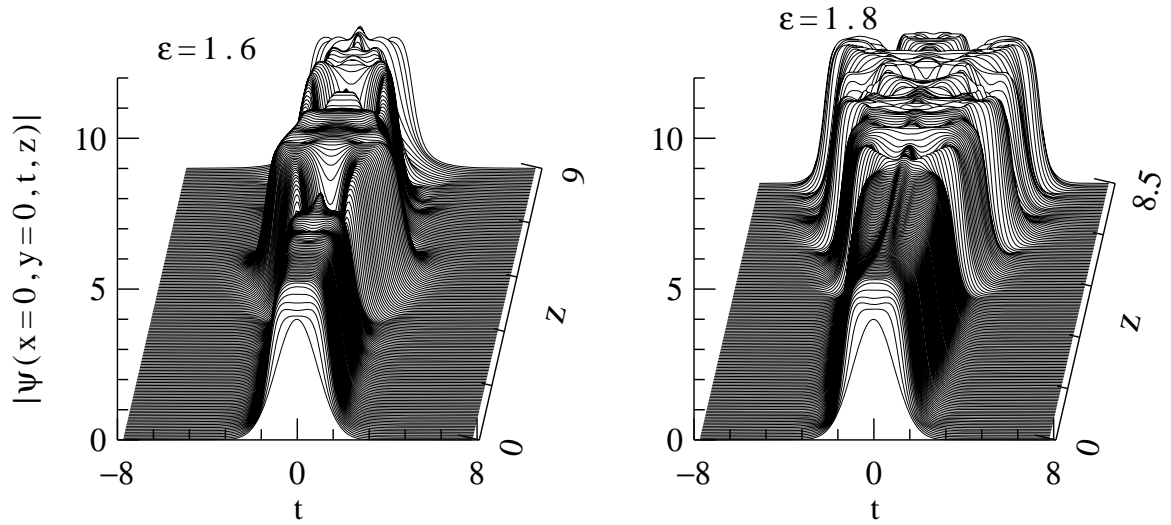
Les figures 3 et 4 rendent compte de ce phénomène. Pour  $\epsilon$  valant 1.6, l'évolution du champ reste bornée dans le domaine temporel, tandis que dans le domaine spatial transverse de nombreuses filamentations apparaissent et remplissent peu à peu le cadre, tandis que pour  $\epsilon = 1.8$ , l'expansion du champ est plus rapide, la durée de l'impulsion diverge et l'extension transverse est beaucoup plus dense. Dans les deux cas présentés, les structures transverses formées ne sont pas stationnaires, et évoluent en se complexifiant.



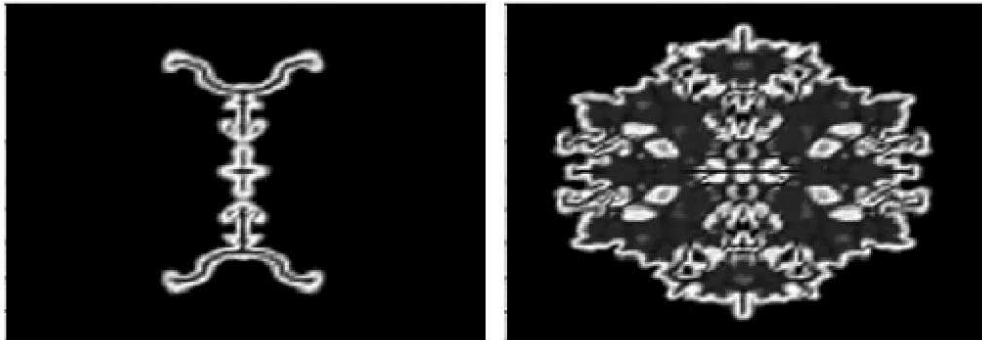
**Fig.1.** Evolution de l'énergie totale  $Q$  avec la distance de propagation  $z$ , pour diverses valeurs du gain non-linéaire  $\epsilon$ . Les valeurs comprises entre 1.0 et 1.4 conduisent à des solutions stationnaires localisées, tandis que les valeurs supérieures ou égales à 1.6 conduisent à des solutions divergentes.



**Fig.2.** Profils temporels (en haut) et spatiaux (en bas) stationnaires de balles de lumière stables obtenues avec les valeurs du gain non-linéaire  $\epsilon$  indiquées sur chaque figure.



**Fig.3.** Profils temporels associés à des évolutions d'énergie totale divergentes ainsi qu'à la formation de structures transverse dont l'extension croît avec le temps. Les valeurs du gain non-linéaire  $\epsilon$  sont 1.6 (à gauche) et 1.8 (à droite).



**Fig.4.** Profils spatiaux transverses obtenus pour une distance de propagation  $z = 8$  dans le cas où  $\epsilon$  vaut 1.6 (à gauche) et 1.8 (à droite).

## 4 Conclusion

Au moyen de simulations numériques, nous avons démontré la possibilité d'existence de balles de lumière dissipatives. Le modèle employé est une équation de propagation de Ginzburg-Landau cubique-quinque à coefficients complexes tenant compte de l'ensemble des dimensions spatio-temporelles. En variant l'un des paramètres essentiels du modèle, à savoir le gain non-linéaire, nous avons mis en évidence diverses situations : balles de lumières stables, balles de lumières instables, ainsi que la non-existence de solutions localisées conduisant à la formation de structures transverses.

## Références

1. Y. SILBERBERG, Collapse of optical pulses, *Optics Letters* 15, 1282 (1990).
2. L. TORNER AND A. BARTHÉLÉMY, Quadratic solitons : recent developments, *IEEE Journal of Quantum Electronics* 39, 22 (2003).
3. Y.F. CHEN ET AL., Criteria for the experimental observation of multidimensional optical solitons in saturable media, *Physical Review E* 70, 046610 (2004).
4. S. BARLAND ET AL., Cavity solitons as pixels in semiconductor microcavities, *Nature* 419, 699 (2002).
5. N. ROSANOV, *Spatial hysteresis and optical patterns* Springer, Berlin (2002).
6. V. SKARKA, N. ALEKSIC, Stability Criterion for Dissipative Soliton Solutions of the One-, Two-, and Three-Dimensional Complex Cubic-Quintic Ginzburg-Landau Equations, *Physical Review Letters* 96, 013903 (2006).
7. PH. GRELU, J.M. SOTO-CRESPO AND N. AKHMEDIEV, Light bullets and dynamic pattern formation in nonlinear dissipative systems, *Optics Express* 13, 9352 (2005).
8. N. AKHMEDIEV AND A. ANKIEWICZ EDS., *Dissipative solitons* Springer, Berlin (2005).