

# Mélange topologique et tiges fantômes dans les écoulements bidimensionnels

E. Gouillart<sup>1</sup>, J. -L. Thiffeault<sup>2</sup> & O. Dauchot<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Groupe Instabilités et Turbulence, SPEC/CEA, Bâtiment 772, Orme des Merisiers — CEA/Saclay 91191 Gif sur Yvette cedex

<sup>2</sup> Department of Mathematics, Imperial College London, London SW7 2AZ  
emmanuelle.gouillart@cea.fr

**Résumé.** Le chaos topologique repose sur le mouvement topologiquement complexe d'obstacles dans un écoulement bidimensionnel. Ce mouvement provoque un étirement exponentiel des lignes matérielles, et donc un mélange efficace. Boyland *et al.* [P. L. BOYLAND, H. AREF, AND M. A. STREMLER, *J. Fluid Mech.* **403**, 277 (2000)] ont étudié un mouvement périodique spécifique d'agitateurs en forme de tiges dans un fluide visqueux qui présente du chaos topologique. Dans cet article, nous montrons qu'il est possible d'étendre ce formalisme à des cas où le mouvement des agitateurs est topologiquement trivial. Nous considérons pour cela la dynamique de points périodiques particuliers que nous appelons *tiges fantômes*, car ils jouent un rôle comparable à celui des tiges physiques. Le cadre des tiges fantômes fournit une nouvelle technique pour mesurer le chaos et présente sous un nouveau jour les mécanismes qui produisent le chaos et le mélange. Nous examinons également un éventuel prolongement de cette approche aux systèmes ouverts. Nos résultats s'appuient sur des simulations numériques d'écoulements de Stokes et des expériences.

**Abstract.** Topological chaos relies on the topologically complex motion of obstacles in a two-dimensional flow. This motion generates exponential stretching of lines, and hence efficient mixing. Boyland *et al.* [P. L. BOYLAND, H. AREF, AND M. A. STREMLER, *J. Fluid Mech.* **403**, 277 (2000)] have studied a specific periodic motion of rod-shaped stirrers that exhibits topological chaos in a viscous fluid. In this work, we show that it is possible to extend this formalism to cases where the motion of the stirring rods is topologically trivial by considering the dynamics of special periodic points that we call *ghost rods*, because they play a similar role to stirring rods. The ghost rods framework provides a new technique for measuring chaos and gives insight into the mechanisms that produce chaos and mixing. We also investigate a possible extension of this approach to open flows. Numerical simulations for Stokes flow and experiments support our results.

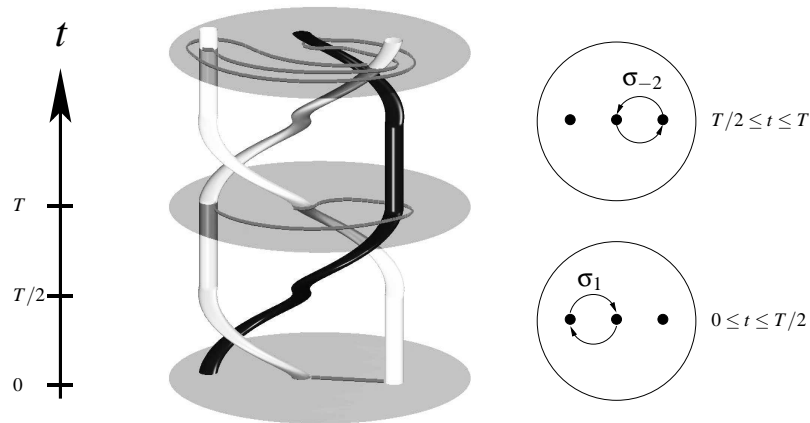
## 1 Introduction

Le mélange de fluides visqueux dans des écoulements à faible nombre de Reynolds peut sembler problématique : en l'absence de turbulence, il est difficile de créer des petites échelles pour accélérer l'action de la diffusion. Il s'agit pourtant d'un problème crucial pour de nombreux procédés industriels, de l'agro-alimentaire au traitement des polymères. Il est en fait possible de réaliser un bon mélange grâce à l'*advection chaotique* [1], c'est-à-dire grâce à des écoulements qui malgré une dépendance temporelle simple peuvent tout de même générer des trajectoires lagrangiennes chaotiques. L'*advection chaotique* a été étudiée dans de nombreux systèmes (voir [2] pour une revue détaillée).

Le mélange topologique est un aspect particulier de l'*advection chaotique* où on s'intéresse au mouvement périodique d'obstacles dans des écoulement bidimensionnels. Cette approche a été introduite par Boyland *et al.* [3], qui ont étudié le mouvement périodique de trois tiges dans un fluide bidimensionnel à partir d'une combinaison élégante d'expériences simples et d'analyse mathématique. Ils ont caractérisé deux protocoles de mélange différents uniquement à partir de leur topologie. Pour cela, ils ont considéré les tresses formées par les trajectoires spatio-temporelles des tiges (voir Fig. 1) et caractérisé le mélange à partir des invariants topologiques de ces tresses. Ils ont ainsi pu proposer des critères de mélange qui dépendent uniquement de la topologie du mouvement des agitateurs et non des détails de l'écoulement.

Dans cet article nous présentons une extension de ces travaux à des cas où le mouvement des tiges est topologiquement trivial, mais où nous considérons le mouvement de structures périodiques de l'écoulement que nous appelons *tiges fantômes* [4] car elles jouent un rôle similaire à celui des tiges physiques. Nous expliquons ainsi comment réaliser du chaos topologique avec des écoulements beaucoup plus simples que celui proposé par Boyland *et al.* [3].

Nous présentons en section 2 le mélange topologique, puis nous introduisons les tiges fantômes et nous mettons en évidence leur rôle dans le mélange en section 3. La section 4 est consacrée à une discussion et à l'application de ces résultats aux systèmes ouverts.



**Fig.1.** Les trajectoires de  $N$  agitateurs définissent une tresse à  $N$  brins dans un espace spatio-temporel (ici  $N = 3$ ). Le mouvement périodique des agitateurs pour un protocole particulier est représenté sur les deux figures à droite : d'abord (en bas) les deux tiges de gauche sont échangées dans le sens des aiguilles d'une montre, puis (en haut) les deux tiges de droite sont échangées dans le sens contraire. La tresse en 3D représente deux périodes de ce protocole. Il s'agit du protocole mélangeant étudié dans [3].

## 2 Systèmes dynamiques et tresses

Nous nous intéressons dans cette section à des écoulements provoqués par le mouvement périodique de tiges dans un domaine bidimensionnel rempli de fluide, et nous exposons comment il est possible de caractériser le mélange dans ces écoulements uniquement à partir de la *topologie* du mouvement des tiges. Notre description est volontairement imagée et peu rigoureuse sur le plan mathématique : le lecteur intéressé par le formalisme mathématique sous-jacent peut se référer à [3,4].

Considérons tout d'abord l'écoulement schématisé en Fig. 1 où trois tiges évoluent périodiquement dans un domaine circulaire. Les deux tiges de gauche sont d'abord échangées dans le sens des aiguilles d'une montre, puis pendant la deuxième moitié de la période on échange les deux autres tiges dans le sens contraire. Boyland *et al.* [3] ont montré expérimentalement et justifié théoriquement que cet écoulement mélangeait beaucoup mieux qu'un écoulement apparemment comparable où pendant la deuxième demi-période on échangeait les deux tiges de droite cette fois-ci également dans le sens horaire. En effet, la topologie de ces deux protocoles de mélange est différente. Si l'on représente la trajectoire des tiges dans un diagramme spatio-temporel comme en Fig. 1, on voit que ces trajectoires forment les brins d'une tresse. La différence entre les deux protocoles peut se voir au niveau des tresses : la tresse représentée en Fig. 1 est topologiquement complexe, en ce sens qu'on ne peut pas la défaire en la déformant juste à ces bouts (par isotopie en termes mathématiques), alors que la tresse du deuxième protocole (non représentée) n'est en fait qu'une torsion d'ensemble des brins qu'on peut défaire à un bout [3]. Le cas

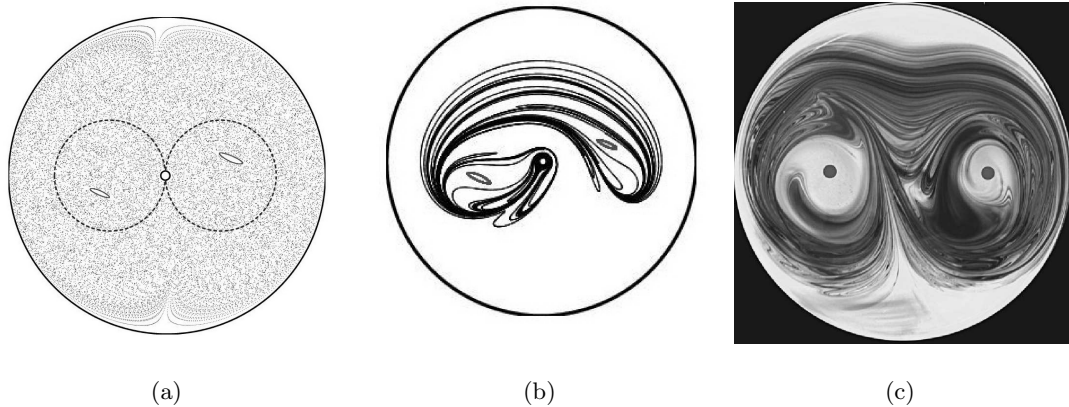
intéressant pour le mélange est celui des tresses topologiquement complexes, car on peut prouver [3] que dans ce cas l'écoulement induit est chaotique. De plus une ligne matérielle comme celle représentée en Fig. 1 est étirée par le mouvement des tiges, et dans le cas d'une tresse complexe on peut montrer qu'une telle ligne est étirée de façon exponentielle avec un exposant caractéristique de l'écoulement, l'*entropie topologique* de l'écoulement  $h_{\text{top}}$  [5]. L'entropie topologique de l'écoulement est un bon critère de mélange, puisqu'elle caractérise l'étirement des lignes (la frontière entre deux produits à mélanger par exemple). Tout l'intérêt de la description des écoulements avec les tresses réside dans la propriété suivante : une tresse possède également une entropie topologique, qui caractérise la manière dont un "élastique" est étiré de façon minimale par les brins de la tresse, et l'entropie topologique de la tresse formée par les tiges est une borne inférieure *universelle* de l'entropie topologique de l'écoulement, quelles que soient les autres caractéristiques de cet écoulement. On sait par exemple que si on déplace des tiges selon le protocole périodique représenté en Fig. 1, une ligne matérielle va voir sa longueur augmenter exponentiellement comme  $l(t) \sim \exp(h_{\text{top}}t)$  avec  $h_{\text{top}} \geq h_{\text{braid}} \sim 0.96$  où  $h_{\text{braid}}$  est l'entropie topologique de la tresse représentée en Fig 1.

### 3 Mise en évidence de tiges fantômes

Il est en fait possible d'étendre ces résultats en remarquant que toute structure périodique de l'écoulement est un obstacle topologique au même titre qu'une tige physique, et qu'une ligne matérielle doit donc s'enrouler autour d'elle [4]. La Fig. 2 illustre cette remarque. Nous avons réalisé une simulation numérique de l'advection d'un traceur passif dans un écoulement de Stokes induit par le mouvement d'une tige sur une trajectoire en huit. L'écoulement est caractérisé par le rayon du domaine,  $a_{\text{out}} = 1$ , la taille de la tige,  $a_{\text{in}} = 0.04$ , et le rayon d'une boucle du huit,  $a = 0.35$ . Il y a une seule tige, donc la tresse à un brin formée à partir de son mouvement est topologiquement triviale. Nous allons cependant montrer que l'écoulement présente du chaos topologique. On a représenté en Fig. 2(a) une section de Poincaré pour cet écoulement, c'est-à-dire la position d'une particule toutes les périodes pour trois conditions initiales différentes. On remarque la présence d'une large région chaotique, mais aussi de deux petits îlots elliptiques au centre des boucles du huit. Ces îlots sont des obstacles topologiques, et on peut voir sur la Fig. 2(b) qu'une ligne matérielle s'enroule bien autour de la tige « physique » et des deux îlots. De plus la tresse formée par la tige et les deux îlots est topologiquement non triviale et son entropie topologique est une borne inférieure de l'étirement exponentiel d'une ligne. Nous appelons donc *tiges fantômes* de telles structures responsables du mélange topologique.

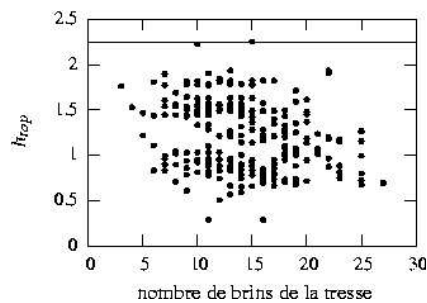
Nous avons également observé des tiges fantômes dans une expérience "de coin de table" où on a réalisé ce même protocole de mélange en déplaçant à la main un agitateur dans un cristalliseur rempli d'un fluide visqueux. Une tache d'encre déposée à la surface a été étirée par le mouvement de la tige, et remplit une région importante du domaine, sauf les deux îlots elliptiques dont la position approximative a été représentée par deux disques gris sur la Fig. 2(c). La forme des îlots n'est pas exactement la même dans la simulation et dans l'expérience, elle dépend en effet des détails de l'écoulement (taille de la tige, rapport des tailles du domaine et du huit, ...) mais pour le chaos topologique la seule présence de ces îlots, quelle que soit leur forme ou leur taille, permet de donner une même borne inférieure à l'entropie topologique de ces écoulements.

Il est possible de proposer des bornes inférieures encore meilleures en considérant non seulement les îlots elliptiques, mais également les points périodiques instables de l'écoulement (il y en a une infinité dans un écoulement chaotique) qui sont également des obstacles topologiques et avec lesquels on peut construire des tresses. Ces points périodiques instables sont d'autant plus difficiles à détecter dans une simulation qu'ils sont instables, mais nous avons en fait constaté [4] qu'il est possible d'obtenir de très bonnes approximations de l'entropie topologique de l'écoulement avec un faible nombre de points périodiques (cf. Fig. 3). Les algorithmes pour détecter les points périodiques et construire des tresses à partir de ces points sont décrits en détail dans [4]. Boyland [6] a en fait montré qu'il est possible de construire une suite d'orbites périodiques d'un difféomorphisme du disque dont les tresses ont une entropie topologique qui converge vers l'entropie topologique du difféomorphisme, c'est-à-dire que "tout chaos est topologique" : toute la complexité de l'écoulement peut être déduite du mouvement de tiges fantômes. Ces résultats



**Fig.2.** (a) Section de Poincaré pour un écoulement de Stokes créé par le mouvement d’une tige sur une trajectoire en huit (pointillés). La région chaotique remplit presque tout le domaine, mais deux petits îlots au centre des boucles du huit jouent le même rôle que des tiges fixes au même endroit : ce sont des « tiges fantômes ». (b) Simulation de l’advection d’un petit « blob » initialement placé autour de la tige. La ligne est étirée exponentiellement et s’enroule autour de la tige et des tiges fantômes. (c) Même protocole de mélange réalisé sur une expérience modèle. Une tache d’encre a été dispersée dans la région chaotique et permet de discerner “en négatif” deux tiges fantômes, c’est-à-dire deux îlots elliptiques représentés par les deux disques gris.

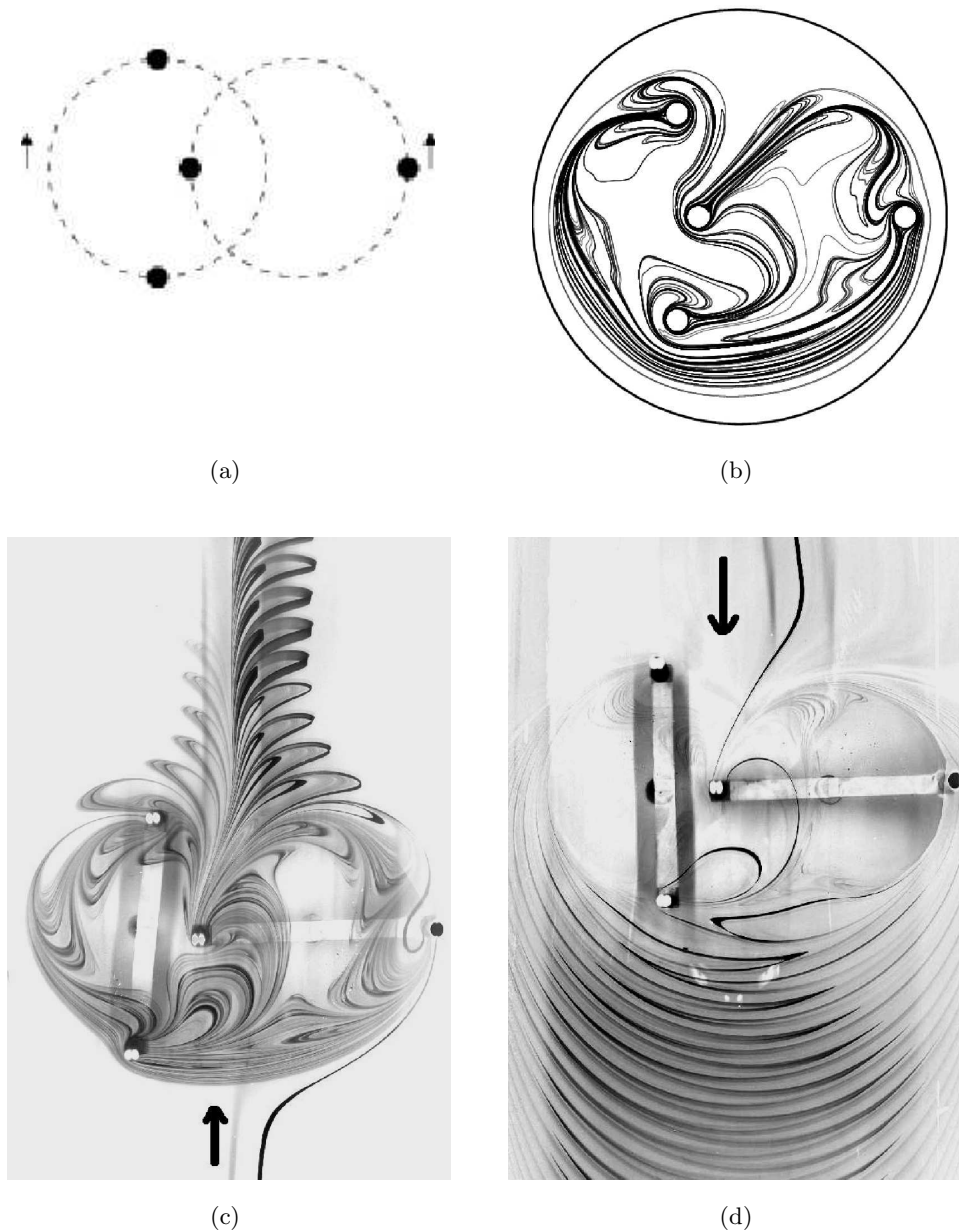
permettent d’envisager le mélange sous un nouvel angle : une ligne matérielle est repliée et étirée car elle est entraînée et “tressée” par les tiges fantômes, qui sont en quelque sorte les moteurs du mélange.



**Fig.3.** Pour le protocole en huit de la Fig. 2, on forme des tresses avec la trajectoire de l’unique tige et des paires d’orbites périodiques instables de l’écoulement. On a représenté l’entropie topologique des tresses non triviales en fonction du nombre de brins de la tresse (dépendant de la période des orbites choisies). La ligne pleine représente l’entropie topologique de l’écoulement  $h_{top} = 2.25$  (L’entropie de l’écoulement a été calculée en faisant évoluer une ligne matérielle et en calculant sa longueur.). On constate qu’il est possible d’obtenir une très bonne borne inférieure de  $h_{top}$  à partir de peu d’orbites périodiques.

#### 4 Discussion : application aux écoulements ouverts

Nous avons caractérisé le chaos dans les écoulements périodiques bidimensionnels en considérant les tresses formées par des points périodiques et en calculant leur entropie topologique. Nous avons montré le rôle des points périodiques dans le mélange, et nous les avons appelés tiges fantômes car leur mouvement étire les lignes matérielles comme le feraient de vraies tiges. D’autres domaines, comme l’étude des oscillateurs paramétriques optiques [7], utilisent également les tresses formées à partir de points périodiques pour quantifier le chaos, mais les tiges fantômes ont une signification physique particulière en mécanique



**Fig.4.** (a) Protocole de mélange « batteur à œufs » où deux couples de tiges tournent à vitesse constante, et dans des sens opposés, sur des cercles qui se coupent. (b) Simulation numérique de l'étirement d'un petit blob initialement placé autour d'une tige. Pour ces valeurs des paramètres de l'écoulement, les simulations montrent que l'écoulement est chaotique et possède deux îlots chaotiques au centre des cercles sur lesquels les tiges évoluent (pas de ligne). (c) Réalisation expérimentale du même protocole de mélange en écoulement ouvert. Le dispositif expérimental est constitué d'un canal rempli d'un fluide visqueux (du sucre de canne) auquel on impose un écoulement stationnaire « de bas en haut » en amont de la région de mélange où les tiges agitent le fluide. On injecte en continu du colorant en un point en amont de la région de mélange. Le colorant est mélangé par les tiges : la figure de mélange est qualitativement semblable à la simulation, avec notamment la présence des deux îlots elliptiques. A chaque période, une partie de la ligne semblable au haut de (b) se détache et s'en va avec l'écoulement, créant ainsi la figure de mélange observée en aval. (d) Même dispositif expérimental, mais avec un écoulement de haut en bas. Cette fois-ci, la partie de la ligne « qui s'en va » correspond au bas de (b) et est donc beaucoup plus homogène : le mélange est bien meilleur qu'en (c).

des fluides, puisque les points périodiques de l'espace des phases sont des particules fluides "réelles" qui entraînent le fluide environnant.

Le formalisme des tiges fantômes est une extension de la cinématique topologique introduite par Boyland *et al.* [3]. Cette théorie et ses futurs développements devraient permettre de mieux comprendre le mélange. Il reste en effet plusieurs points à creuser pour mieux comprendre les tiges fantômes. Il faudrait par exemple expliquer pourquoi certaines tiges fantômes tressent mieux que d'autres (i.e. ont une plus grande entropie topologique) et quelle est donc la signification physique des "meilleures" tiges fantômes.

Il est également intéressant de se demander comment cette approche topologique du mélange résiste au passage d'un écoulement dans un domaine fermé à un écoulement ouvert. On peut par exemple imaginer un écoulement, constant à l'infini, où des particules traversent une région de mélange où des tiges bougent selon des protocoles qui créeraient du chaos topologique dans un domaine fermé, et se demander si ces écoulements vont bien mélanger. Comme il y a une advection moyenne de l'amont vers l'aval de la région de mélange, une particule va rester en moyenne un nombre de périodes  $\alpha$  dans cette zone de mélange ( $\alpha$  est proportionnel au rapport entre la vitesse des tiges et la vitesse de l'écoulement à l'infini). L'intuition suggère que la qualité du mélange augmente avec  $\alpha$ . Cependant une description plus fine est nécessaire. Nous présentons ici une courte discussion qualitative qui compare des simulations numériques d'un écoulement fermé et des expériences d'écoulement ouvert pour le même protocole de mélange. Le protocole en question est celui du "battre à oeufs" : quatre tiges tournent deux par deux dans des sens opposés sur des cercles qui se coupent (cf. Fig. 4(a)). Nos simulations numériques (Fig. 4(b)) montrent que cet écoulement est chaotique en domaine fermé et qu'il y a des îlots elliptiques au centre des deux cercles : ces tiges fantômes forment une tresse complexe avec les tiges. On peut noter que cet écoulement présente une dissymétrie "haut/bas" (sur la Fig. 4(b)) : les portions de la ligne "en bas" ont été étirées de façon très homogène, alors que celles "du haut" présentent des repliements et un étirement inhomogène. Cette dissymétrie se traduit dans les expériences d'écoulement ouvert. Dans celles-ci on injecte un colorant dans un canal où le fluide traverse la région de mélange où des tiges se déplacent selon 4(a) et on regarde comment le colorant est mélangé au reste du fluide par les tiges. Ces expériences correspondent à  $\alpha \sim 4$ . Les figures 4(c) et 4(d) correspondent respectivement à un écoulement moyen vers le haut, et vers le bas. La similarité entre l'aspect de la région de mélange dans 4(c) et 4(d) avec la simulation en fermé 4(b) montre l'intérêt des comparaisons ouvert/fermé. Cependant, la qualité du mélange en aval de la région de mélange est bien différente selon le sens de l'écoulement moyen. Cela s'explique à nouveau grâce à la simulation numérique, car on peut décrire grossièrement l'écoulement ouvert par l'écoulement fermé auquel vient se superposer un flux de fluide qui rentre et sort continuellement aux deux bouts de la région de mélange. La partie qui "sort" ressemble ainsi au haut de 4(b) pour 4(c), et au bas de 4(b) pour 4(d). L'inhomogénéité de l'étirement dans l'écoulement fermé est donc traduite de manière spectaculaire dans les écoulements ouverts : le mélange est très différent dans 4(c) et 4(d). La compréhension du mélange en système ouvert peut donc très clairement bénéficier de celle du mélange en système fermé.

## Références

1. H. AREF, Stirring by chaotic advection, *J. of Fluid Mech.*, **143**, 1 (1984).
2. J. M. OTTINO, The kinematics of mixing : stretching, chaos, and transport, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1989).
3. P. L. BOYLAND, H. AREF, AND M. A. STREMLER, Topological fluid mechanics of stirring, *J. Fluid Mech.*, **403**, 277 (2000).
4. E. GOUILLART, J.-L. THIFFEAULT AND M. D. FINN, Topological Mixing with Ghost Rods, *Phys. Rev. E*, *in press*, [arXiv :nlin.CD/0510076](https://arxiv.org/abs/nlin.CD/0510076).
5. P. BOYLAND, Topological methods in surface dynamics, *Topology Appl.*, **58**, 223 (1994).
6. S. NEWHOUSE AND T. PIGNATARO, On the estimation of topological entropy, *J. Stat. Phys.* **72**, 1331 (1993).
7. A. AMON AND M. LEFRANC, Topological signature of deterministic chaos in short nonstationary signals from an optical parametric oscillator, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 094101 (2004).