Grandes déviations et erreurs de transmission par solitons dans les fibres optiques

E. Gautier[1,2] & A. Debussche[1]

[1] IRMAR — ENS Cachan, antenne de Bretagne, Avenue Robert Schumann, 35170 Bruz
[2] CREST - INSEE, 3 avenue Pierre Larousse, 92240 Malakoff
eric.gautier@bretagne.ens-cachan.fr

Résumé. Nous considérons des perturbations aléatoires de l'équation de Schrödinger non linéaire en dimension 1 avec une non linéarité cubique focalisante. Cette équation intervient comme modèle de propagation d'enveloppes de paquets d'ondes dans les fibres optiques. Les bruits additifs ou multiplicatifs sont induits par une amplification qui compenserait exactement la perte dans la fibre. Nous les supposerons blancs en espace et colorés en temps. Dans le cas du bruit additif nous considérerons la limite où les corrélations temporelles du bruit tendent vers 0. Du fait du bruit, de petite amplitude, des erreurs de transmission par solitons peuvent se produire. Nous déduisons de résultats de grandes déviations pour les trajectoires des solutions, l'asymptotique de petit bruit des queues de l'énergie et du temps d'arrivée du signal. La fluctuation de ces deux grandeurs est supposée être la source principale d'erreur de transmission. Nous étudions plus particulièrement les ordres de grandeur en la longueur de la fibre et en l'amplitude de la donnée initiale profil de soliton.

Abstract. We consider random perturbations of the focusing cubic one dimensional nonlinear Schrödinger equation. This equation is a model for the propagation of wave packets in optical fibers. The noises, either additive or multiplicative, are induced by certain amplification procedures which would compensate exactly for loss in the fiber. We consider noises which are white in space and colored in time. In the additive case, we consider the limit where the correlations in time tend to zero. Due to the small amplitude noise, error in soliton based transmission may occur. We deduce from large deviations results at the level of the paths of the solutions, the small noise asymptotic of the tails of the energy and arrival time of the pulse. The fluctuation of these quantities is assumed to be the main source of error in transmission. We study in more details the qualitative behavior of these tails with respect to the length of the fiber and the amplitude of the initial datum when it is a soliton profile.

L'équation de Schrödinger non linéaire faiblement amortie, en dimension 1, avec non linéarité cubique et défocalisante, est un modèle de propagation d'enveloppes de paquets d'ondes dans les fibres optiques. Elle s'écrit,

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+|u|^2u,\quad \alpha>0,\quad u\in \mathrm{H}^1\left(t\in\mathbb{R},\mathbb{C}\right):=\mathrm{H}^1,\quad u(t,0)=u_0,\quad x\in[0,L]. \tag{1}$$

Lorsque $\alpha=0$, des ondes solitaires sont solutions de l'équation. Elles s'écrivent sous la forme

$$\sqrt{2}A\mathrm{sech}(A(t-t_0))\exp\left(-iA^2x+i\theta_0\right), \tag{2}$$

où $A>0$ est l'amplitude, t_0 et θ_0 sont respectivement le temps et la phase initiale. Il a été suggéré d'utiliser ces solutions, localisées en temps, pour transmettre des bits à très haut débit sur de longues distances. Une donnée initiale profil de soliton $u_0=\Psi_A^0(t)=\sqrt{2}A\mathrm{sech}(At)$ permettrait de coder un 1, une donnée initiale nulle un 0. Afin de compenser la perte dans la fibre, qui empêche la propagation sur de longues distances, typiquement L de l'ordre de 1000 km, plusieurs amplification sont envisageables. Nous supposons que les amplifications compensent exactement l'amortissement et qu'alors $\alpha=0$.

D'après le principe d'incertitude d'Heisenberg, l'amplification est accompagnée d'une incertitude sur le signal représentée par un terme de bruit Gaussien. Pour des amplificateurs dopés à l'Erbium, régulièrement espacés le long de la fibre, ou des amplificateurs distribués, une bonne approximation du bruit est un bruit additif. Le bruit est représenté par un terme supplémentaire $+\sqrt{\epsilon}\eta$ dans (1). La fonction η est fonction du temps et de l'espace, à valeurs complexes. Dans le cas d'une amplification de Raman ou par mélange paramétrique de 4 ondes, le bruit est multiplicatif réel. Il est représenté par un terme $+\sqrt{\epsilon}\eta \circ u$ dans (1), η est cette fois à valeurs réelles et $\circ$ le produit Stratonovich. Dans ce cas, la norme L^2 en temps est constante le long de la fibre. Dans le cas du bruit additif complexe, cette norme fluctue aléatoirement. Le coefficient $\sqrt{\epsilon}$ est l'amplitude du bruit, elle est supposée petite.

Le bruit η s'exprime sous la forme $\frac{\partial W}{\partial x}$ où $(W_x)_{x>0}$ est un processus de Wiener dans un espace de Sobolev basé sur L^2, pour la variable de temps, de type H^s. L'EDP stochastique a un sens sous forme intégrale. Dans le cas du bruit additif, nous considérons l'espace H^1, dans le cas du bruit multiplicatif nous considérons l'espace $\mathrm{H}^s(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où $s > 3/2$. Pour des raisons de sommabilité, le processus de Wiener doit avoir des corrélations en temps. Néanmoins, lorsque le semi-groupe associé à l'opérateur linéaire possède des propriétés de régularisation globale, ce qui n'est pas le cas du groupe de Schrödinger, et lorsque l'on s'intéresse à des solutions faibles, il est parfois possible de traiter le cas du bruit blanc. Sous les hypothèses précédentes le problème de Cauchy est globalement bien posé (si nous faisons comme si la variable x indiçait le temps) dans H^1, *c.f.* [2].

A l'extrémité de la fibre, un récepteur mesure l'énergie du signal sur une fenêtre en temps qui s'exprime en fonction de la période inter émission des bits

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left|u^{\epsilon,u_0}(t,L)\right|^2 dt, \ u_0 = 0 \text{ ou } u_0 = \Psi_A^0.$$

où u^{ϵ,u_0} est la solution des équations avec petit bruit additif ou multiplicatif. Lorsque la quantité mesurée excède un seuil I_d, il est décidé que le signal émis était un 1, sinon qu'il s'agissait d'un 0. Du fait du bruit, des erreurs de transmission peuvent se produire.

Deux grandeurs sont particulièrement pertinentes lorsque l'on s'intéresse aux erreurs de transmission : l'énergie

$$\mathbf{N}\left(u^{\epsilon,u_0}(L)\right) = \int_{\mathbb{R}} \left|u^{\epsilon,u_0}(t,L)\right|^2 dt, \ u_0 = 0 \text{ ou } u_0 = \Psi_A^0$$

et le temps d'arrivée

$$\mathbf{Y}\left(u^{\epsilon,\Psi_A^0}(L)\right) = \int_{\mathbb{R}} t\left|u^{\epsilon,\Psi_A^0}(t,L)\right|^2 dt$$

défini pour des solutions dans l'espace de Hilbert

$$\Sigma^{1/2} = \left\{f \in \mathrm{H}^1 : \ t \mapsto \sqrt{|t|}f(t) \in \mathrm{L}^2\right\}, \text{ muni de } \|f\|^2_{\Sigma^{1/2}} = \|f\|^2_{\mathrm{H}^1} + \left\|t \mapsto \sqrt{|t|}f(t)\right\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Dans le cas d'un bruit additif, le taux d'erreur sur les bits s'exprime alors sous la forme $\mathbb{P}(1|0)p(0) + \mathbb{P}(0|1)p(1)$ où $\mathbb{P}(1|0)$ est la probabilité que le circuit décide de manière erronée qu'un 1 a été émis alors qu'un 0 était émis (on définit de manière analogue $\mathbb{P}(0|1)$) ; $p(0)$ et $p(1)$ sont les probabilités de transmettre 0 et 1. Lorsque le nombre de bits du message est élevé on suppose que $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$. L'obtention de cette grandeur nécessite de connaître les probabilités conditionnelles et donc les queues de la loi de la quantité mesurée en l'extrémité de la fibre pour une donnée initiale nulle ou profil de soliton. L'approximation Gaussienne est souvent utilisée en pratique et cette pratique est critiquable. En pratique, lorsque la donnée initiale est nulle, le bruit peut créer un signal d'énergie importante. On peut alors décider par erreur qu'un 1 a été émis. Lorsque qu'un 1 a été émis, il est communément admis que la fluctuation de l'énergie et du temps d'arrivée sont les causes principales de la perte du signal. Nous considérons donc les queues de l'énergie pour des données initiales nulles et profils de solitons ainsi que les queues du temps d'arrivée pour des données initiales profils de solitons. Nous intéressons à l'influence de la longueur de la fibre et de l'amplitude (cas du temps d'arrivée seulement) sur ces grandeurs.

Si le bruit est multiplicatif, l'énergie est conservée et une erreur correspond à la perte d'un 1. Cette erreur est due à une fluctuation du temps d'arrivée.

Dans l'essentiel des articles les solutions sont approchées par solutions particulières de type ansatz où un nombre fini de paramètres fluctuent aléatoirement selon un système de diffusions couplées. Des articles étudient la variance de la loi du temps d'arrivée ([1,6,10,11]), d'autres la distribution de l'énergie ou de la loi jointe de l'énergie et de la position ([5,7,12]), enfin des méthodes numériques ont aussi été étudiées ([3,13]).

Dans cet article, nous utilisons des techniques de grandes déviations au niveau des trajectoires des solutions afin d'encadrer les limites de petits bruits du logarithme des queues de l'énergie et du temps d'arrivée. Nous ne ferons pas l'approximation par une solution ansatz.

1 Des résultats de grandes déviations

Lorsque le bruit tend vers 0, les lois des trajectoires des solutions se concentrent vers un dirac en la solution déterministe, un résultat de grandes déviations nous renseigne sur, l'échelle, la vitesse et le taux auxquels la probabilité d'un évènement des queues (qui ne contient pas la solution déterministe) tend vers zéro. Dans [8,9] nous avons prouvé des principes de grandes déviations (PGDs) pour des bruits additifs ou multiplicatifs. Ces résultats se transportent par image directe par des applications continues. Nous souhaitons donc que l'énergie et le temps d'arrivée en l'extrémité de la fibre soient continues en la solution en l'extrémité de la fibre. Si nous définissons $W = \Phi W^c$ où W^c est le processus de Wiener cylindrique ideal (sans corrélations temporelles),

$$\Sigma = \left\{ f \in \mathrm{H}^1 : \ t \mapsto tf(t) \in \mathrm{L}^2 \right\} \text{ muni de la norme } \|f\|_\Sigma^2 = \|f\|_{\mathrm{H}^1}^2 + \|t \mapsto tf(t)\|_{\mathrm{L}^2}^2 ,$$

$\mathbf{S}^{a,u_0}(h)$ l'unique solution faible du problème de contrôle

$$\begin{cases} i\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + \Phi h, \\ u(0) = u_0 \ \in \Sigma \text{ and } h \in \mathrm{L}^2\left(0, L; \mathrm{L}^2\right), \end{cases} \tag{3}$$

et $\mathbf{S}^{m,u_0}(h)$ l'unique solution faible du problème de contrôle où l'équation contrôlée est

$$i\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + u\Phi h, \tag{4}$$

nous avons le le résultat qui suit, *c.f.* [4], qui permet de traiter le temps d'arrivée.

Théorème 1. *Supposons que Φ soit Hilbert-Schmidt de L^2 dans Σ dans le cas additif et de L^2 dans $\mathrm{H}^s(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $s > 3/2$ dans le cas multiplicatif. Supposons que u_0 appartienne à Σ. Alors, les solutions de l'équation (1) perturbées par le petit bruit sont presque sûrement dans $\mathrm{C}([0,L];\Sigma^{1/2})$. Elles définissent des variable aléatoires à valeurs dans $\mathrm{C}([0,L];\Sigma^{1/2})$ et leurs lois $\left(\mu^{u^{\epsilon,u_0}}\right)_{\epsilon>0}$ satisfont un PGD de vitesse ϵ et de fonction de taux*

$$I^{u_0}(w) = \frac{1}{2} \inf_{h \in \mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2): \ w = \mathbf{S}(u_0,h)} \|h\|_{\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2)}^2,$$

où $\mathbf{S}(u_0,\cdot) = \mathbf{S}^{a,u_0}(\cdot)$ dans le cas additif et $\mathbf{S}(u_0,\cdot) = \mathbf{S}^{m,u_0}(\cdot)$ dans le cas multiplicatif, avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Cela signifie que, pour chaque Borélien B de $\mathrm{C}\left([0,L];\Sigma^{1/2}\right)$, nous avons la borne inférieure

$$- \inf_{w \in Int(B)} I^{u_0}(w) \le \underline{\lim}_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mathbb{P}\left(u^{\epsilon,u_0} \in B\right)$$

$Int(B)$ désigne l'intérieur, et la borne supérieure

$$\overline{\lim}_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mathbb{P}\left(u^{\epsilon,u_0} \in B\right) \le - \inf_{w \in \overline{B}} I^{u_0}(w).$$

De plus les ensembles $\{w : \ I^{u_0}(w) \le r\}$ pour r positif sont compacts $(*)$.

Nous pouvons en déduire que les lois de l'énergie et du temps d'arrivée du signal en l'extrémité L satisfont des PGDs de vitesse ϵ et de bonnes (la propriété $(*)$ est satisfaite) fonctions de taux respectivement

$$I_N^{u_0}(n) = \tfrac{1}{2} \inf_{h \in \mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2): \ \mathbf{N}(\mathbf{S}^{a,u_0}(h)(L)) = n} \left\{ \|h\|_{\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2)}^2 \right\},$$
$$I_Y^{u_0}(y) = \tfrac{1}{2} \inf_{h \in \mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2): \ \mathbf{Y}(\mathbf{S}(u_0,h)(L)) = y} \left\{ \|h\|_{\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2)}^2 \right\}, \quad \mathbf{S}(u_0,\cdot) = \mathbf{S}^{m,u_0}(\cdot) \text{ ou } \mathbf{S}(u_0,\cdot) = \mathbf{S}^{a,u_0}(\cdot).$$

La stratégie utilisée pour minorer et majorer l'asymptotique de petits bruits du logarithme d'un événement des queues est la suivante. Considérons par exemple l'événement $D_\epsilon = \left\{\mathbf{Y}\left(u^{\epsilon,\Psi_A^0}(L)\right) \in [a,b]\right\}$ où $[a,b]$ est un intervalle qui ne contient pas 0. Le PGD donne

$$-\inf_{y\in(a,b)} I_Y^0(y) \leq \underline{\lim}_{\epsilon\to 0}\epsilon \log \mathbb{P}\left(D_\epsilon\right) \leq \overline{\lim}_{\epsilon\to 0}\epsilon \log \mathbb{P}\left(D_\epsilon\right) \leq -\inf_{y\in[a,b]} I_Y^0(y).$$

Afin d'obtenir une borne inférieure nous cherchons un contrôle h tel que $\mathbf{Y}(S(u_0,h)(L)) \in (a,b)$ et $c = \frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2)}$ est aussi petit que possible. Alors nous avons

$$-c \leq \underline{\lim}_{\epsilon\to 0}\epsilon \log \mathbb{P}\left(D_\epsilon\right).$$

La seconde étape consiste à utiliser des identités d'énergie pour l'équation contrôlée. Elles donnent une minoration de la norme L^2 minimum du contrôle h pour que le temps d'arrivée de la solution contrôlée soit dans l'intervalle $[a,b]$ en T au lieu d'être en 0. Nous obtenons donc une constante $\tilde{c}$ telle que

$$\text{si } \mathbf{Y}\left(S(u_0,h)(L)\right) \in [a,b] \text{ alors } \frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2)} \geq \tilde{c},$$

ce qui implique que

$$\overline{\lim}_{\epsilon\to 0}\epsilon \log \mathbb{P}\left(D_\epsilon\right) \leq -\tilde{c}.$$

La difficulté est d'obtenir des encadrements suffisamment précis pour que c et $\tilde{c}$ soient suffisamment proches et aient le même comportement en la longueur de la fibre et l'amplitude du signal initial.

2 Le cas d'un bruit additif

Afin d'obtenir des bornes inférieures, nous effectuons la minimisation sur l'ensemble des amplitudes paramètrant les solutions ansatz

$$\Psi_A(t,x) = \sqrt{2}A(x)\exp\left(-i\int_0^x A^2(u)du\right)\mathrm{sech}(A(x)t).$$

Pour $D \subset \mathbb{R}_+^*$ nous posons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_D^1 &= \left\{A : [0,L] \to \mathbb{R},\ \exists \tilde{R}\in D :\ A(x) = \tilde{R}\left(\tfrac{x}{2L}\right)^2\right\}\\ \mathcal{A}_D^2 &= \left\{A : [0,L] \to \mathbb{R},\ \exists \tilde{R}\in D :\ A(x) = \left(8-\tilde{R}-4\sqrt{4-\tilde{R}}\right)\left(\tfrac{x}{2L}\right)^2 + \left(-4+2\sqrt{4-\tilde{R}}\right)\tfrac{x}{2L}+1\right\}.\end{aligned}$$

pour $i = 1,2$,

$$\mathcal{C}_D^i = \left\{h \in \mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2),\ \exists A\in\mathcal{A}_D^i :\ h(t,x) = i\tfrac{A'(x)}{A(x)}\Psi_A(t,x) - i\sqrt{2}A'(x)\exp\left(-i\int_0^x A^2(u)du\right)A(x)t\tfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}^2}\left(A(x)t\right)\right\}.$$

Nous obtenons le résultat suivant, *c.f.* [4,8].

Proposition 1. *Pour tout L et R positifs ($R \in (0,4)$ pour (7), D dense dans $[R,R+1]$ et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'opérateurs Hilbert-Schmidt à valeurs dans L^2 tels que pour tout h dans $\mathcal{C}_D^1$, $\Phi_n h \to h$ dans $\mathrm{L}^1\left(0,L;\mathrm{L}^2\right)$ et uniformément bornés comme opérateurs sur L^2 par une constante $C > 1$ indépendente de L, nous avons*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty,\epsilon\to 0}\epsilon\log\mathbb{P}\left(\mathbf{N}\left(u^{\epsilon,0,n}(L)\right)\geq R\right) \geq -\frac{R(12+\pi^2)}{18L} \tag{5}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty,\epsilon\to 0}\epsilon\log\mathbb{P}\left(\mathbf{N}\left(u^{\epsilon,0}(L)\right)\geq R\right) \leq -\frac{R}{8LC^2}; \tag{6}$$

et en remplaçant $\mathcal{C}_D^1$ par $\mathcal{C}_D^2$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty,\epsilon\to 0}\epsilon\log\mathbb{P}\left(\mathbf{N}\left(u^{\epsilon,\Psi_1^0,n}(L)\right)-4<-R\right)\geq-\frac{(2-\sqrt{4-R})^2(12+\pi^2)}{9L}. \tag{7}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty,\epsilon\to 0}\epsilon\log\mathbb{P}\left(\mathbf{N}\left(u^{\epsilon,\Psi_1^0}(L)\right)-4<-R\right)\leq-\frac{R^2}{8LC^2(4+R)}. \tag{8}$$

L'exposant n rappelle que Φ est remplacé par Φ_n. Une telle suite existe, il suffit de prendre des troncatures spectrales.

Nous ne considérons ici que le cas d'une donnée initiale profil de soliton.
Afin d'obtenir des bornes inférieures, nous effectuons la minimisation sur les fonctions $x\mapsto\lambda(x)$ intervenant dans la solution ansatz suivante

$$\begin{aligned}\Psi_{A,\lambda}(t,x)=\sqrt{2}A\mathrm{sech}\left(A\left(t-2\int_0^x\int_0^y\lambda(u)dudy\right)\right)\exp\left(2i\int_0^x\lambda(y)\int_0^y\int_0^u\lambda(v)dvdudy\right)\\ \exp\left[-iA^2x+i\int_0^x\left(\int_0^y\lambda(u)du\right)^2dy-it\int_0^x\lambda(y)dy+2i\left(\int_0^x\lambda(y)dy\right)\left(\int_0^x\int_0^y\lambda(u)dudy\right)\right].\end{aligned}$$

Pour $D\subset\mathbb{R}_+^*$ nous posons

$$\mathcal{H}_{A,L}^D=\{h\in\mathrm{L}^2(0,L;\mathrm{L}^2),\ h(t,x)=\lambda(x)\left(t-2\int_0^x\int_0^y\lambda(u)dudy\right)\Psi_{A,\lambda}(t,x),\ \text{avec } \lambda(x)=\frac{3\tilde{R}(L-x)}{8AL^3},\ \tilde{R}\in D\},$$

Nous obtenons le résultat qui suit, *c.f.* [4].

Proposition 2. *Pour tout L et R positifs ($R\in(0,4)$ pour (7), D dense dans $[R,R+1]$ et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'opérateurs Hilbert-Schmidt à valeurs dans Σ tels que pour tout h dans $\mathcal{H}_{T,A}^D$, $\Phi_n h\to h$ dans $\mathrm{L}^1(0,L;\Sigma)$ et uniformément bornés par un constante $C(A)$ telle que pour A et L grands, il existe α tel que $C(A)\geq\alpha A$ (**), nous avons*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty,\epsilon\to 0}\epsilon\log\mathbb{P}\left(\mathbf{Y}\left(u^{\epsilon,\Psi_A^0,n}(L)\right)\geq R\right)\geq-\frac{\pi^2R^2}{128L^3A^3}, \tag{9}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty,\epsilon\to 0}\epsilon\log\mathbb{P}\left(\mathbf{Y}\left(u^{\epsilon,\Psi_A^0}(L)\right)\geq R\right)\leq-\frac{R^2}{128L^3(1+\frac{2}{L})^2\left(A+\frac{R}{8L+4}\right)C(A)^2}. \tag{10}$$

Nous constatons que pour R de l'ordre de l'unité et L grand, la borne supérieure est de l'ordre de $-\frac{R^2}{128T^3AC(A)^2}$. D'après (**), il n'y a pas de contradiction entre (9) et (10) sur l'ordre en A.

Nous avons finalement prouvé que les queues de la masse pour une donnée initiale nulle ne sont pas Gaussiennes. Elles sont par contre indistingables de queues exponentielles sur une échelle logarithmique. Les queues du temps d'arrivée sont elles indistingables, sur cette échelle, de queues Gaussiennes. Afin d'obtenir les facteurs pré-exponentiels des queues nous pourrions utiliser des grandes déviations précises. En ce qui concerne l'ordre en la longueur de la fibre, nous avons obtenu des bornes inférieures et supérieures du même ordre de grandeur en L. De plus, sur une échelle logarithmique, les queues de la masse sont en $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon T}\right)$, celles du temps d'arrivée sont en $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon T^3}\right)$, ainsi les queues du temps d'arrivée sont beaucoup plus épaisses que celles de la masse. Par conséquent, la fluctuation du temps d'arrivée est beaucoup plus pénalisante que celle de la masse.
L'effet Gordon-Hauss, *c.f.* [10], stipule que la variance du temps d'arrivée est de l'ordre de T^3. Sous l'hypothèse que la loi est effectivement Gaussienne nous obtenons le même résultat.
Dans certains papiers, par exemple [6], l'influence de l'amplitude de la donnée initiale sur le temps d'arrivée est étudiée et de l'ordre de A^3T^3. Nous obtenons que l'ordre est au moins en A^3.
Introduire des éléments de contrôle en ligne peut rendre exponentiellement moins importantes les queues du temps d'arrivée prohibitives, *c.f.* [7]. Il est aussi possible d'optimiser sur ces contrôles à coût limité comme suggéré dans [14].

3 Le cas d'un bruit multiplicatif

Nous considérons ici un bruit de la forme $u^{\epsilon,u_0} \circ \sqrt{\epsilon}\frac{\partial W}{\partial x}(x) + \sqrt{\epsilon} t u^{\epsilon,u_0} \circ \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}(x)$. Dans ce cas, les solutions contrôlées donnent des contrôles dans l'image de Φ dans $\mathrm{H}^s(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus t\mathrm{L}^1(0,L;\mathbb{R})$ et possèdent les propriétés d'intégrabilité que l'on souhaite. Nous obtenons des queues de l'ordre de $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon A^2 L^3}\right)$.

Proposition 3. *Pour tout L, A et R positifs, Φ Hilbert-Schmidt à valeurs dans* $\mathrm{H}^s(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *où* $s > \frac{3}{2}$,

$$\underline{\lim}_{\epsilon\to 0}\epsilon \log \mathbb{P}\left(\mathbf{Y}\left(u^{\epsilon,\Psi_A^0}(L)\right) \geq R\right) \geq -\frac{3R^2}{128A^2L^3},$$

$$\overline{\lim}_{\epsilon\to 0}\epsilon \log \mathbb{P}\left(\mathbf{Y}\left(u^{\epsilon,\Psi_A^0}(L)\right) \geq R\right) \leq -\left(\frac{3}{16}\right)^2 \frac{R^2}{A^2L^3 \max\left(\|\Phi\|^2_{\mathcal{L}_c\left(\mathrm{L}^2,\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)}, 1\right)}.$$

Dans le cas du bruit blanc, problème qui semble mal posé mathématiquement, nous nous attendons, au vu du calcul sur la variance du temps d'arrivée dans [6], à des queues de l'ordre de $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon A^4 L^3}\right)$.

Références

1. C. Brunhuber, F.G. Mertens & Y.B. Gaididei, Thermal diffusion of envelope solitons on anharmonic atomic chains, *Eur. Phys. J. B.*, **42**, 103-112 (2004).
2. A. de Bouard & A. Debussche, The Stochastic Nonlinear Schrödinger Equation in H^1, *Stochastic Anal. Appl.*, **21** (1), 97-126 (2003).
3. P. Del Moral & J. Garnier, Genealogical particle analysis of rare events, *Ann. Appl. Probab.*, **15**, 2496-2534 (2005).
4. A. Debussche & E. Gautier, Small noise asymptotic of the timing jitter in soliton optical transmission, *Document de travail du CREST*, **2005-20** (2005).
5. S.A. Derevyanko, S.K. Turitsyn & D.A. Yakushev, Fokker-Planck equation approach to the description of soliton statistics in optical fiber transmission systems, *J. Opt. Soc. Am. B*, **28**, 2097-2099 (2003).
6. P.D. Drummond & J.F. Corney, Quantum noise in optical fibers. II. Raman jitter in soliton communications, *J. Opt. Soc. Am. B*, **18**, 153-161 (2001).
7. G.E. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, V. Mezentsev & S.K. Turitsyn, Non-Gaussian error probability in optical soliton transmission, *Physica D*, **195**, 1-28 (2004).
8. E. Gautier, Large deviations and support results for nonlinear Schrödinger equations with additive noise and applications, *ESAIM : Probability and Statistics*, **9**, 74-97 (2005).
9. E. Gautier, Uniform large deviations for the stochastic nonlinear Schrödinger equation with multiplicative noise, *Stochastic Process. Appl.*, **115**, (12), 1904-1927 (2005).
10. J.P. Gordon & H.A. Haus, Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission, *Opt. Lett.*, **11**, 665-667 (1986).
11. K.P. Ho, Non-Gaussian statistics of soliton timing jitter induced by amplifier noise, *Opt. Lett.*, **28**, 2165-2167 (2003).
12. C.J. McKinstrie & T.I. Lakoba, Probability-density function for energy perturbation of isolated optical pulses, *Opt. Expr.*, **11**, 3628-3648 (2003).
13. R.O. Moore, G. Biondini & W.L. Kath, Importance sampling for noise-induced amplitude and timing jitter in soliton transmission systems, *Opt. Lett.*, **28**, 105-107 (2003).
14. V.N. Smelyanskiy & M.I. Dykman, Optimal control of large fluctuations, *Phys. Rev. E*, **55**, 2516-2521 (1997).
15. A.N. Yannacopoulos, D.J. Frantzeskakis, C. Polymis & K. Hizanidis, Motion of 2D Schrödinger solitary waves in the presence of random external potentials, *Physica Scripta*, **65**, 363-368 (2002).