

Modes globaux non linéaires et instabilité absolue des écoulements ouverts en milieu poreux chauffé par le bas.

A. Delache¹, N. Ouarzazi¹, G. Labrosse² & M. Combarous³

¹ Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, Université de Lille 1, Boulevard Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq

² Laboratoire d'Informatique et de Mécanique pour les Sciences de l'Ingénieur, UPR CNRS 3251, Bât. 508, Université Paris-Sud, 91405 Orsay-Cedex

³ Laboratoire TREFLE (TRansferts Ecoulements FLuides Energétique), UMR CNRS 8508, ENSAM, Esplanade, des Arts et Métiers F-33405 Talence Cedex, France

a.delache@ed.univ-lille1.fr

Résumé. Cette communication concerne l'étude analytique et numérique des structures thermo-convectives en milieu poreux chauffé par le bas, refroidi par le haut et soumis à un écoulement horizontal. C'est un système ouvert où la croissance spatiale et temporelle des instabilités doit être prise en compte. On distingue les instabilités convectives (le système amplifie les composantes spectrales du bruit ambiant) et les instabilités absolues (le système oscille avec une fréquence propre indépendante du bruit) en fonction des deux paramètres adimensionnels du problème, le nombre de Rayleigh de filtration Ra et le nombre de Péclet Pe . Les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilité sont comparées à des données expérimentales. Il en ressort que les seuils d'instabilité absolue de l'état conductif correspondent parfaitement aux seuils de la transition observée expérimentalement par l'un des auteurs [2] entre des rouleaux transversaux oscillatoires et des rouleaux longitudinaux stationnaires.

Ensuite des simulations numériques directes de ce problème ont été réalisées par une méthode de collocation pseudo-spectrale (polynômes de Tchebychev). Les objectifs recherchés des essais numériques sont : 1°) identifier les solutions non linéaires du problème en fonction des paramètres Ra et Pe . 2°) comparer l'amplitude saturée des structures thermo-convectives aux mesures expérimentales. 3°) comparer les fréquences d'oscillations et les vitesses de propagation du mode global avec la théorie linéaire d'instabilité absolue.

Le résultat le plus marquant qui se dégage de ces essais numériques est que les oscillations du mode global dans le domaine pleinement non linéaire, s'avèrent identiques aux oscillations déterminées par le critère linéaire d'instabilité absolue.

Abstract. This communication deals with analytical and numerical studies of thermo-convective instabilities in porous media heated from below and subjected to a horizontal through flow. Since it's a open system, we distinguish convective instability (the system amplify the spectral component of ambient noise) from the absolute instability (the system oscillate with a noisy independent frequency) according to two parameters of the problem, namely the filtration Rayleigh number Ra and the Péclet number Pe . We compared the linear characteristics of two kind of instabilities with the experimental data obtained by one of us [2]. It is shown that the threshold of the absolute instability of the conduction state corresponds to a set of parameters for which an experimentally observed transition occurs between moving transversal rolls and stationary longitudinal rolls.

In a second time, we performed direct numerical simulations of this problem with pseudo-spectral collocation method (Tchebychev polynomial). The aim of this numerical work is to : i) identify the nonlinear solutions of the problem in terms of Pe and Ra . ii) compare the finite amplitude of thermo-convective instabilities with the experimental data. iii) compare the frequency of oscillations, and phase velocity of the global mode with the linear theory of absolute instability. The most important result stemming from numerical runs is that oscillations of global mode in nonlinear domain, coincide with oscillations determined by the linear criterion of absolute instability.

1 Introduction

Nous nous intéressons aux écoulements filtrants, dits de convection mixte, induits dans une couche poreuse horizontale par un gradient vertical de température interagissant avec un écoulement moyen. La convection mixte en milieu poreux est documentée par des données expérimentales ([2], [3]). Ces données

ont montré qu'en régime laminaire et pour des faibles vitesses, les cellules de convection se présentent sous la forme de rouleaux transversaux (R.T) dont l'axe est perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Les périodes des oscillations de ces R.T ont été déterminées en fonction de la vitesse intersticielle. Pour des vitesses plus élevées, les cellules se présentent sous la forme de rouleaux longitudinaux fixes (R.L), d'axe orienté dans le sens de l'écoulement.

Le présent travail a pour objectifs d'une part de déterminer les caractéristiques des instabilités absolues de cet écoulement et d'autre part de présenter les résultats de simulations numériques. L'ensemble des prédictions théoriques et numériques est comparé aux données expérimentales.

2 Formulation, stabilité linéaire et expérience

Soit une couche poreuse horizontale infinie, de section droite rectangulaire (de hauteur H , de largeur aH), isotrope et saturée. Le bord inférieur est porté à la température T_0 , supérieure à celle du bord supérieur T_1 . Le milieu poreux est soumis à un écoulement horizontal de vitesse de filtration V^* . Les équations régissant ce problème sont adimensionnées avec les grandeurs de références suivantes : H pour la longueur, $H^2(\rho c)^*/\lambda^*$ pour le temps, $T_0 - T_1$ pour la température, $\lambda^*/(H(\rho c)_f)$ pour la vitesse et $\lambda^*\mu/(K(\rho c)_f)$ pour la pression. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy corrigée par un terme non linéaire de Forchheimer, ce système physique est gouverné par les équations non dimensionnées :

$$\vec{V} + \mathcal{F}\|\vec{V}\|\vec{V} = -\vec{\nabla}P + RaT\vec{e}_z \quad (1)$$

$$\partial T/\partial t = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}T + \vec{\nabla}^2T \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Le nombre de Rayleigh de filtration est $Ra = Kg\alpha H(T_0 - T_1)(\rho c)_f/(\lambda^*\nu)$ où K , λ^* , g , α , $(\rho c)_f$, $(\rho c)^*$ et ν désignent respectivement la perméabilité et la conductivité thermique du milieu, l'accélération de la pesanteur, le coefficient d'expansion thermique, la chaleur volumique du fluide, la chaleur volumique du milieu et la viscosité cinématique du fluide. Le coefficient \mathcal{F} des termes d'inertie dans (1) est $\mathcal{F} = c [K^{1/2}\lambda^*/(H\nu(\rho c)_f)]$ où c est une constante qui dépend de la géométrie du milieu.

Les parois verticales latérales étant supposées adiabatiques, les conditions aux limites sont :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_z = 0 \text{ en } z = 0, 1 ; \vec{V} \cdot \vec{e}_y = 0 \text{ en } y = 0, a \text{ et } \int_0^a \int_0^1 \vec{V} \cdot \vec{e}_x dy dz = a Pe \quad (3)$$

$$T = 1 \text{ en } z = 0 ; T = 0 \text{ en } z = 1 \text{ et } \partial T/\partial y = 0 \text{ en } y = 0, a \quad (4)$$

où Pe est le nombre de Péclet défini par : $Pe = V^*H(\rho c)_f/\lambda^*$.

Le système (1)-(4) admet une solution stationnaire, que nous appelons état de conduction, pour toutes les valeurs de Ra , de Pe et de Re_K :

$$\vec{V}_0 = Pe \cdot \vec{e}_x ; T_0 = 1 - z \text{ et } P_0 = Ra (z - z^2/2) - Pe (1 + Re_K) x \quad (5)$$

avec $Re_K = \mathcal{F}Pe = c(V^*K^{1/2}/\nu)$.

Le système (1)-(4) linéarisé autour de la solution de conduction (5) conduit à un système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fluctuations de température, de pression et du champ de vitesse. Une analyse en mode normaux vérifiant les conditions aux limites du problème conduit à l'équation de dispersion :

$$D_\Phi(\omega, k) = -i\omega + ikPe + k^2 + \pi^2(1 + m^2/a^2) - \frac{Ra}{1 + Re_K} \left(\frac{k^2(1 + Re_K) + (m^2/a^2)\pi^2(1 + 2Re_K)}{\pi^2(1 + m^2/a^2)(1 + 2Re_K) + k^2(1 + Re_K)} \right)$$

où ω est la fréquence, k est le nombre d'onde dans la direction de l'écoulement moyen ; $\Phi = [m/a, Ra, Re_K, Pe]$ représente les paramètres du problèmes où $(m/a)\pi$ représente le nombre d'onde dans la direction transverse y avec m entier et a le rapport de forme du milieu. L'étude temporelle de stabilité linéaire a été largement développée dans [4]. De même l'étude détaillée de stabilité spatio-temporelle de ce problème

a fait l'objet d'un article soumis pour publication [5]. Ici, nous nous restreignons à énoncer quelques résultats concernant la transition du système d'une instabilité convective à une instabilité absolue et à discuter la pertinence de cette transition au regard des résultats expérimentaux.

Le concept d'instabilité absolue et convective est décrit dans [7]. Brièvement, on montre que la réponse linéaire du système à une perturbation localisée se présente sous la forme d'un paquet d'ondes s'amplifiant dans le temps et l'espace, et limité par un front arrière et un front avant. On dit alors que l'instabilité est convective (I.C) lorsque les deux fronts se propagent dans le sens de l'écoulement principal. Par contre, on parle d'instabilité absolue (I.A) lorsque le front arrière se propage dans le sens contraire à l'écoulement principal : le paquet est amplifié, une partie est convectée vers l'aval alors que l'autre partie remonte vers l'amont, le paquet d'onde envahit alors tout le domaine. La condition mathématique nécessaire pour que l'instabilité soit absolue est qu'il existe un point col k^* dans le plan complexe relié à une fréquence ω telle que :

$$D_{\Phi}(k^*, \omega(k^*)) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega(k^*)}{\partial k} = 0 \quad (7)$$

$$\text{avec } \omega_i(k^*) \geq 0 \quad (8)$$

De plus, une condition suffisante impose que les branches spatiales dans le plan complexe k suivent un processus de pincement.

Le seuil absolu Ra_A qui représente alors la frontière entre I.A et I.C est obtenu en imposant $\omega_i(k^*) = 0$. Ce seuil a été déterminé pour tous les modes instables. Il en résulte que le seuil de transition à une I.A des rouleaux propagatifs purement transversaux ($m = 0$ et noté R.T) est inférieur à celui des autres structures instables, et ce indépendamment de Pe . Cela signifie que dans le régime d'I.A le système sélectionne plutôt des R.T, les autres structures tridimensionnelles ainsi que les R.L quittent le domaine d'observation expérimentale à des temps asymptotiquement grands.

Sur la figure 1, nous avons indiqué, dans le plan (Pe, Ra) , les différents motifs thermo-convectifs observés dans [2,3]. Sur cette même figure, nous avons également tracé la courbe de transition entre I.C et I.A pour les R.T. A travers cette figure, nous constatons que la frontière entre I.A et I.C de l'état de conduction vis à vis des R.T, correspond parfaitement à la transition observée expérimentalement entre les R.L et les R.T

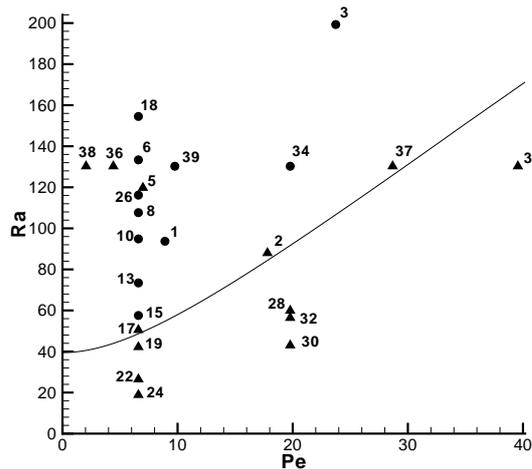


Fig.1. Carte représentant les différents régimes d'écoulement dans le plan (Pe, Ra) pour les structures observées pour la série 6 : les R.T (disque noir) et les R.L (triangle noir). Les essais successifs sont indiqués par leurs numéros. Les nombres manquants indiquent la région turbulente. La courbe représente la frontière entre régime convectif et absolu prédite par la théorie.

3 Analyse des résultats de la simulation numérique

3.1 Description

Nous avons entrepris une simulation numérique directe bidimensionnelle du problème, en utilisant une méthode spectrale de collocation par des polynômes de Tchebycheff dans les deux directions x et z . Les conditions aux limites imposées, par exemple dans un carré $[-1, 1].[-1, 1]$ sont :

$$u(x = \pm 1, z) = Pe, v(x, z = \pm 1) = 0 \quad (9)$$

$$T(x = -1, z) = \frac{(1-z)}{2}, \frac{\partial T}{\partial x}(x = 1, z) = 0, T(x, z = -1) = 1, T(x, z = 1) = 0 \quad (10)$$

Afin de limiter l'influence des conditions aux limites de sortie sur l'écoulement nous avons utilisé une zone tampon proche de la sortie qui permet d'atténuer progressivement tout retour d'onde possible [8].

Chaque essai est obtenu en fixant la valeur de Pe et Ra . Les simulations numériques indiquent que tant que le système est convectivement instable, toute perturbation initiale est amortie et le système, bien qu'instable, retrouve asymptotiquement l'état de conduction. En revanche, lorsque le système devient absolument instable, un mode global apparaît sous forme de R.T d'amplitude finie, reliés à l'état de conduction à l'entrée par un front représenté sur la figure 2. Il est alors possible de déterminer la distribution spatiale de la température à un instant donné (en particulier suivant x pour $z = 0$). On peut également déterminer l'évolution temporelle de la température en différents points de la couche poreuse. Ces suivis temporels montrent aussi des oscillations régulières saturées.

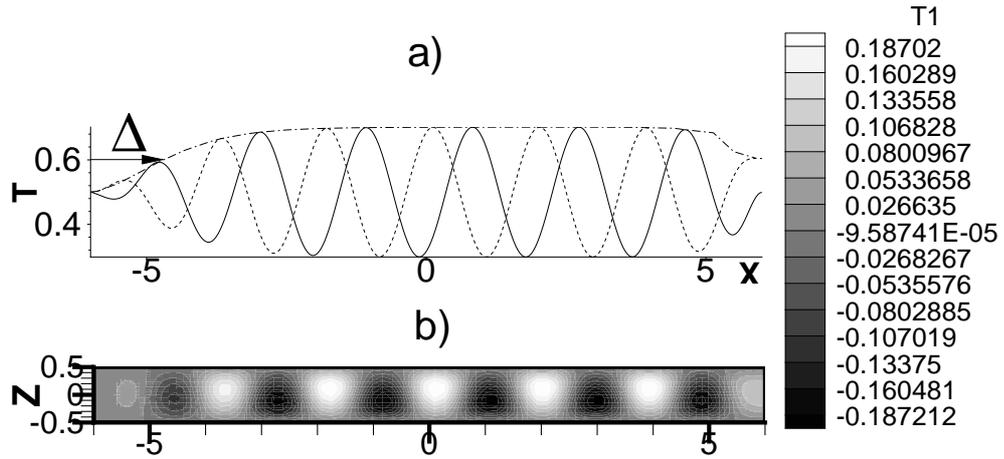


Fig.2. b) : distribution de la perturbation de la température $T_1 = T - T_0$ dans le plan (x, z) . a) : distribution spatiale de la température T suivant x pour $z = 0$ à 2 temps différents (—, ---) où - · - représente l'enveloppe stationnaire des oscillations et Δ représente la distance d'établissement du front. a) et b) sont obtenus avec $Pe = 2$ et $Ra = 45$ ($Ra_A = 40.45$).

3.2 Comparaison avec l'expérience

Nous avons effectué des simulations numériques avec des paramètres adimensionnés équivalents à ceux utilisés dans les expériences [2]. Sur la figure 3, on a représenté les minimas et les maximas de la température obtenus pour différentes hauteurs z avec $Pe = 12.25$ et $Ra = 102$ aussi bien à partir de l'expérience (o) qu'à partir de la simulation équivalente (partie noire). On observe que les maximas obtenus numériquement sont relativement proches de ceux obtenus expérimentalement. Or les minimas obtenus numériquement s'éloignent progressivement des minimas expérimentaux lorsque l'altitude z augmente. Cette tendance est confirmée pour d'autres combinaisons du couple (Pe, Ra)

L'explication possible que nous proposons est liée à la difficulté matérielle de maintenir la plaque inférieure à une température uniforme. Des variations faibles de cette température induiraient inexorablement une dépendance en x de la température de conduction.

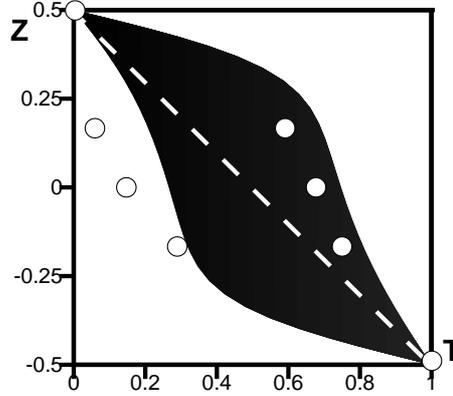


Fig.3. Mesure de la distribution spatiale de la température suivant l'axe z obtenue numériquement pour $Ra = 102$ et $Pe = 12.25$ où la distribution spatiale instantanée de la température adimensionnée est projetée suivant l'axe x sur z (en noire). Les \circ représentent les mesures expérimentales équivalentes à $Ra = 102$ et $Pe = 12.25$ et $--$ représente la température de conduction.

3.3 Fréquence du mode global et instabilité absolue

Certaines caractéristiques des rouleaux transversaux, comme la fréquence des oscillations obtenue à partir du suivi temporel de la température et la vitesse de phase sont comparées avec celles prédites par la théorie linéaire de l'instabilité absolue (T.L.I.A).

Sur la figure 4, nous avons tracé la pulsation adimensionnée ω_{th} (T.L.I.A) et ω_{num} (à partir des simulations numériques (FFT)) en fonction de Ra pour différents Pe . On en conclut que lorsque Ra augmente à Pe fixé $\omega_{th,num}$ augmente la même tendance est observée lorsque Pe augmente à Ra fixé. Par ailleurs, on constate que pour des nombres de Péclet pas trop élevés, ω_{th} coïncide avec ω_{num} . Ce résultat est similaire à celui trouvé dans un problème tout à fait différent du nôtre. Récemment, J.M. Chomaz [1] a analysé les caractéristiques du mode global qui apparaît dans les écoulements parallèles dans le sillage d'un obstacle. Par le biais d'une simulation numérique directe, il a déterminé la fréquence globale d'oscillations dans la région pleinement non linéaire. Cette fréquence globale s'est avérée exactement identique à celle prédite en régime linéaire absolument instable.

Sur la figure 5, sont représentées la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ à partir des données numériques (V_φ^{num}) et à partir de la T.L.I.A (V_φ^{th}). Le nombre d'onde k^{num} est calculé à partir de la distribution spatiale (FFT). On observe que l'on a pratiquement $V_\varphi^{num} \simeq Pe$ et ce quelque soient les valeurs de Pe et Ra . On retrouve ces résultats numériques dans [6], les calculs étant faits pour de faibles valeurs de Pe . Pour la T.L.I.A, on retrouve bien $V_\varphi^{th} \simeq Pe$ quelque soit la valeur de Ra lorsque le débit reste modéré : $Pe \leq 8$. Mais $V_\varphi^{th} \geq Pe \simeq V_\varphi^{num}$ lorsque Pe est plus important. On en conclut que les prédictions de la T.L.I.A sont excellentes lorsque Pe reste modéré et ce indépendamment de la valeur de Ra .

4 Conclusion

Ce travail porte sur une étude théorique et numérique des instabilités spatio-temporelles pouvant se développer dans un fluide confiné en milieu poreux chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal. Une analyse spatio-temporelle de stabilité linéaire a permis de distinguer, dans le plan (Pe, Ra) , la nature

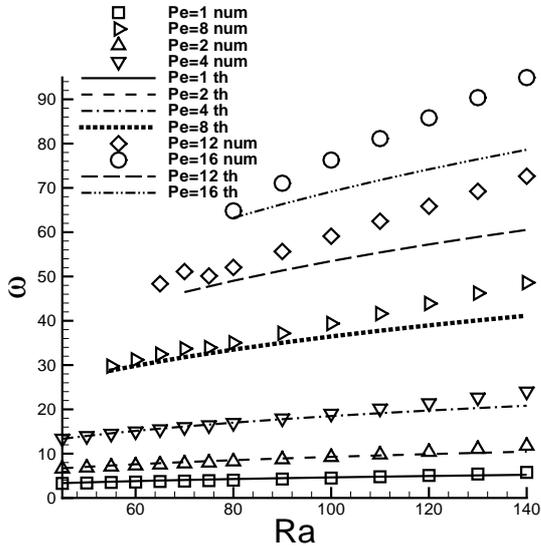


Fig.4. pulsation ω en fonction de Ra pour Pe fixé à différentes valeurs. « num » désigne les résultats numériques et « th » désigne les résultats issus de la T.L.I.A

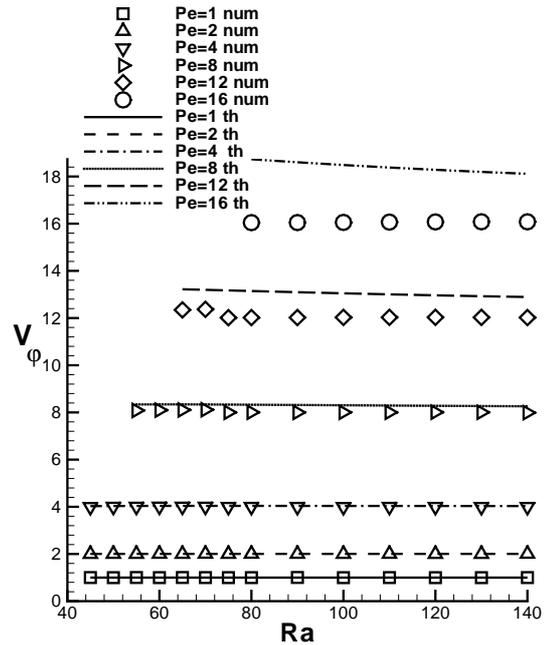


Fig.5. vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ en fonction de Ra pour différents Pe à partir des données numériques (« num ») et à partir de la T.L.I.A (« th »)

convective ou absolue des instabilités. Une comparaison avec des données expérimentales montre que les seuils d'instabilité absolue correspondent aux seuils de la transition observée expérimentalement entre les R.T propagatifs et les R.L fixes. Les simulations numériques directes du problème pour différentes combinaisons de Ra et Pe , mettent en évidence l'émergence d'un mode global non linéaire, composé d'un front reliant l'état de conduction à l'entrée aux R.T propagatifs. Tant que Pe n'est pas trop élevé, les oscillations et les vitesses de propagation des R.T, évaluées numériquement, s'avèrent identiques à celles prédites par le concept linéaire d'instabilité absolue.

Références

1. J.-M. CHOMAZ, Fully non linear dynamics of parallel wakes, *J. Fluid Mech.*, **495**, 57-75 (2003).
2. M. COMBARNOUS, *Convection naturelle et convection mixte en milieu poreux*, Thèse d'état de la Faculté des sciences de l'Université de Paris 6 (1970).
3. M. COMBARNOUS & S. A. BORIES, Hydrothermal convection in saturated porous media, *Advances in Hydroscience*, **10**, 231-307 (1975).
4. A. DELACHE, N. OUARAZI & M. C. NÉEL, Structuration de la convection mixte en milieu poreux confiné latéralement et chauffé par le bas : effets d'inertie, *C. R. Mécanique*, **330**, 885-891 (2002).
5. A. DELACHE, N. OUARAZI, M. COMBARNOUS, *Spatio-temporal instabilities of mixed convection flows in porous media heated from below : Comparison with experiments*, article soumis à *Int. J. of Heat and Mass Transfer*.
6. F. DUFOUR, M.C. NÉEL, Numerical study of instability in a horizontal porous channel with bottom heating and forced horizontal flow, *Phys. Fluids*, **10**, (9), 2198-2207 (1998).
7. HUERRE, P. & P. A. MONKEWITZ, Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, **22**, 473-537 (1990).
8. C.L. STREET & M.G. MACARAEG, Spectral multi-domain for large-scale dynamic simulation, *Applied Numerical Mathematics*, **6**, 123-139 (1989).