

Transmission par bistabilité nonlinéaire

D. Chevriaux

Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules CNRS-UMR5207,
Université Montpellier 2, 34095 Montpellier (France)
dchevria@lpta.univ-montp2.fr

Résumé. La nonlinéarité, induite par la dépendance de l'indice de réfraction à l'intensité, peut être un moyen de concevoir des détecteurs de lumière sensibles à une très faible excitation. Cela provient des propriétés de bistabilité de l'équation de Schrödinger nonlinéaire soumise à des conditions aux bords sur l'intervalle fini. Le détecteur est obtenu en couplant deux guides d'ondes 1D à une tranche de guide d'ondes 2D, avec un choix judicieux des indices. Ce dispositif présente d'inhabituelles propriétés de propagation de la lumière, et en particulier, la possibilité de bifurquer d'un mode évanescent vers un mode intense de sortie, sous l'effet d'un très faible signal. Une description analytique dans le cas conservatif, et des illustrations à l'aide de simulations numériques du modèle avec atténuation, ont permis de comprendre le phénomène de bistabilité.

Abstract. Nonlinearity induced by intensity-dependent refractive indices (Kerr media) can be used as a means to conceive light detectors sensitive to very weak excitation. This property results from the bistability properties of the nonlinear Schrödinger equation submitted to boundary value data on the finite interval. The detector is obtained by coupling two single 1D waveguide to a 2D slab waveguide with adjusted indices. The resulting device then presents unusual light propagation properties and in particular may switch from almost vanishing to intense output under excitation by a weak signal. This is understood by analytical description in the conservative case and illustrated by numerical simulations of the model with attenuation.

1 Introduction

L'effet Kerr optique résulte de la dépendance de l'indice de réfraction à l'intensité. Une des conséquences est la possibilité de former des solitons spatiaux dans des milieux diffractifs. Cet effet d'autofocalisation de la lumière fut proposé en 1964 [1] et mis en évidence dans l'équation de Schrödinger nonlinéaire (NLS) en 1965 [2]. L'autofocalisation fut expérimentalement réalisée dans un milieu diélectrique de guide d'ondes optique plan (liquide CS₂) en 1985 [3] et dans un guide d'ondes en verre en 1990 [4].

Lorsque le champ se propage dans la direction à la variation de l'indice (en référence aux milieux de Bragg), on peut observer des solitons de gap qui ont suscité de nombreuses études depuis leur prédiction en 1979 [5] et leur découverte expérimentale en 1992 [6].

Lorsque le champ se propage dans la direction transverse de variation de l'indice, le milieu périodique devient un coupleur directionnel, et de nouveaux résultats intéressants ont été obtenus. En particulier dans les guides d'ondes optiques diélectriques adjacents qui se couplent par échange de puissance entre modes guidés [7], et qui, déjà dans un contexte linéaire, révèlent des anomalies stupéfiantes de diffraction et de réfraction [8]. Dans un contexte nonlinéaire, les réseaux de guides d'ondes couplés deviennent des générateurs de solitons [7], mis en évidence dans de nombreuses situations physiques intéressantes [9]. Lorsque le réseau fonctionne comme un coupleur directionnel, en régime Kerr, le modèle est le système discret NLS [10], et c'est le couplage entre guides d'ondes adjacents qui joue le rôle de diffraction.

Il a été démontré récemment que des solitons de gap peuvent être générés dans un réseau de guides d'ondes à variation de d'indice optique, en pilotant les conditions aux bords. Le principe est l'utilisation d'un guide d'ondes pilote d'indice n_0 , nourri par un mode guidé et couplé à un réseau d'indice $n_1 < n_0$ par échange de puissance. Résultant de la théorie de supratransmission nonlinéaire, si l'on atteint l'intensité de bifurcation dans le guide d'ondes, des solitons sont émis dans le réseau. Pour des réseaux relativement courts (dans la direction transverse y) et en injectant des deux côtés, comme représenté Fig. 1gauche, il est possible de concevoir *un réseau de guides d'ondes nonlinéaires bistables, détecteur de lumière* [11].

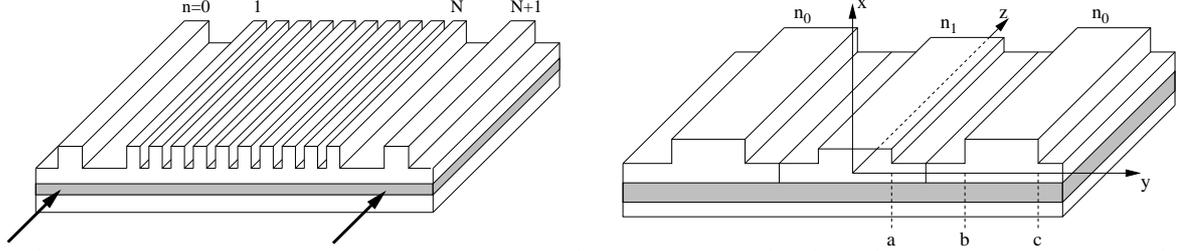


Fig.1. La figure de gauche présente un réseau de guides d'ondes nonlinéaires bistables, détecteur de lumière d'indice n_1 piloté par deux guides d'ondes latéraux d'indice $n_0 \geq n_1$. Les flèches symbolisent l'injection de radiation. La figure de droite montre le coupleur de trois guides d'ondes planaires. La direction de propagation est z , la modulation transverse travaille dans la direction y .

Une question intéressante est de savoir ce qui se passe dans la limite $N \rightarrow 1$ quand le réseau se réduit à un seul guide d'ondes, afin de se rapprocher des *composants optiques*. Avec un seul guide, on doit considérer les effets de la direction transverse y . Nous étudions par conséquent ici la version continue du réseau de guides d'ondes, dessiné en Fig. 1 droite et qui se compose de trois guides d'ondes plans couplés d'indices différents.

2 Le modèle

L'autofocalisation par effet optique est expérimentalement observée par irradiation d'une fibre plane bidimensionnelle avec un faisceau laser, et est observée le long de la propagation (en z). La modulation nonlinéaire contrebalance la dispersion due à la diffraction. Avant de définir le contexte physique et son rôle dans la nature du problème mathématique, on reconsidère ici la dérivation de l'équation de Schrödinger pour l'enveloppe du champ électrique.

2.1 Cadre général

On considère notre système où la variation de l'indice linéaire ne s'opère que dans la direction y . On suppose que le champ électrique est monochromatique de fréquence ω , polarisé et homogène dans la direction x , à savoir le champ transverse électrique (T.E) suivant

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_x (E(y, z)e^{-i\omega t} + c.c.), \quad (1)$$

où $\hat{\mathbf{e}}_x$ est le vecteur unitaire de la coordonnée x . On a $n = n(y)$, et donc le mode T.E. implique $(\nabla n) \cdot \mathbf{E} = 0$. Les équations de Maxwell dans un milieu non magnétique, sans charges libres, peuvent s'écrire, pour le champ électrique, en assumant une réponse instantanée du milieu Kerr (susceptibilité nonlinéaire χ), comme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot E + \frac{\omega^2}{c^2} (n^2(y) + 3\chi |E|^2) E = 0, \quad (2)$$

qui est l'équation d'Helmoltz nonlinéaire. Les termes d'oscillations nonlinéaires rapides ont été écartés car on suppose qu'il n'y pas de phase égale aux troisièmes harmoniques. On donne une solution de l'équation d'Helmoltz linéaire dans la base des modes lineaires guidés $\mathcal{E}_k(y, z)$ définis par

$$\mathcal{E}_k(y, z) = A(y) e^{ikz}, \quad A_{yy} = [k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(y)] A \quad (3)$$

où k est le nombre d'ondes gouverné par la propagation le long de z . L'amplitude $A(y)$ est le mode guidé dans la direction transverse y . C'est le mode propre de la solution du problème spectral, dans le potentiel généré par la variation de l'indice. Dans le cas d'une *gravure peu profonde*, c'est à dire pour de petites variations d'amplitude de l'indice $n(y)$ autour d'une valeur de référence n_0 , on définit un petit paramètre

d'échelle (appelé ϵ^2) par $\frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n^2(y)] = \epsilon^2 V'(y)$. Ainsi l'équation différentielle (3) pour $A(y)$ indique que la variable y devient une *variable lente* échelonnée par ϵ . De même, la variation en z , en référence au nombre d'ondes $k_0 = \omega n_0/c$ se produira naturellement pour de bas modes en énergie, comme ϵ^2 en échelle de z , en accord avec la phase $kz = [k_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2)]z$.

2.2 Modulation nonlinéaire

Regardons maintenant la méthode de développement en série asymptotique [12]. Le petit paramètre ϵ , introduit précédemment, sert à définir une représentation multi-échelle du champ par les variables lentes $y = \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots$, $z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots$ et par son développement

$$E(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j E_j(y_1, \dots, z_0, z_1, \dots), \quad E_j = \sum_{n=1}^{\infty} U_{jn}(y_1, \dots, z_1, \dots) e^{in k_0 z_0}. \quad (4)$$

Cela signifie que l'on restreint notre recherche à un champ lentement variable dans la direction transverse (pas de variable y_0). En considérant que les termes nonlinéaires E^3 provenant de E_1 , agissent uniquement sur la première et troisième harmonique, nous pouvons simplifier en annulant les puissances paires, on a alors $E_{2l} = 0$. L'équation 2 donne

$$(\epsilon) : L_0 E_1 = 0, \quad L_0 = \partial_{z_0}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2, \quad (5)$$

$$(\epsilon^2) : L_1 E_1 = 0, \quad L_1 = 2\partial_{z_0} \partial_{z_1}, \quad (6)$$

$$(\epsilon^3) : L_0 E_3 = -L_2 E_1 - N_3 E_1, \quad L_2 = \partial_{y_1}^2 + \partial_{z_1}^2 + 2\partial_{z_0} \partial_{z_2} - V', \quad N_3 = 3\frac{\omega^2}{c^2} \chi |E_1|^2, \quad (7)$$

Avec la définition (4), l'équation (8) est valable pour $U_{1p} = 0$ pour tout $p > 1$, et l'équation (9) donne alors $\partial U_{11}/\partial z_1 = 0$. On requiert, par la suite, qu'il n'y ait pas de termes séculaires produits dans l'équation (10), ce qui donne

$$2ik_0 \frac{\partial U_{11}}{\partial z_2} + \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial y_1^2} - V' U_{11} + 3\chi \frac{\omega^2}{c^2} |U_{11}|^2 U_{11} = 0. \quad (8)$$

Cette équation est invariante par la transformation inverse vers les dimensions physiques, à savoir $\epsilon y_1 \rightarrow y$, $\epsilon^2 z_2 \rightarrow z$, $\epsilon^2 V' \rightarrow V(y)$, $\epsilon U_{11}(y_1, z_2) \rightarrow \Psi(y, z)$, et donc, (8) devient

$$2ik_0 \Psi_z + \Psi_{yy} + \Gamma |\Psi|^2 \Psi = V(y) \Psi, \quad (9)$$

avec les définitions suivantes $V(y) = \frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n(y)^2]$, $\Gamma = 3\chi \frac{\omega^2}{c^2}$, $k_0 = \omega \frac{n_0}{c}$. On rappelle que le champ électrique est obtenu à partir de la solution Ψ par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_x \Psi(y, z) e^{i(k_0 z - \omega t)} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (10)$$

ou ϵ échelonne la variation de l'indice par rapport à la valeur n_0 .

3 Solutions fondamentales

Nous considérons le dispositif dessiné Fig. 1(b) et étudions ses propriétés intrinsèques de bistabilité. Pour un choix judicieux des paramètres (variations d'indice, longueurs de séparations, dimensions), le pilotage par les guides d'ondes latéraux résulte approximativement en conditions aux bords en $y = -a$ et $y = a$ pour l'enveloppe Ψ du champ à l'intérieur de la fibre centrale.

3.1 Problèmes aux valeurs propres

Le nombre d'onde k_0 définit les modes propres du guide d'ondes plan d'indice n_0 avec une dimension transverse y infinie. Dans le cas où la dimension suivant y est finie, les variations d'indices vont générer une variation δk_0 du nombre d'ondes k_0 . On peut alors considérer une modulation de l'enveloppe $\Psi(y, z)$ de la forme

$$\Psi(y, z) = \Phi(y) e^{-i(\delta k_0)z}, \quad \delta k_0 \sim \epsilon^2. \quad (11)$$

L'amplitude stationnaire $\Phi(y)$ résout alors le problème aux valeurs propres nonlinéaires suivant

$$\Phi_{yy} + [\beta^2 - V(y)] \Phi = -\Gamma |\Phi|^2 \Phi, \quad (12)$$

avec le paramètre spectral $\beta^2 = 2k_0 \cdot \delta k_0 \equiv \delta k_0^2$ qui mesure la variation d'énergie. Dans le cas linéaire $\Gamma = 0$, on retrouve les modes guidés (3) avec $\Phi(y) = A(y)$ et $k^2 = k_0^2 - \beta^2 \sim (k_0 - \delta k_0)^2$.

Il est commode pour la suite de normaliser l'équation (13) en définissant $\psi = \sqrt{\Gamma} \Psi$ et $z = 2k_0 z'$ et l'on obtient (en oubliant les primes)

$$i\psi_z + \psi_{yy} + |\psi|^2 \psi = V\psi. \quad (13)$$

En posant $\psi(y, z) = \phi(y) e^{-i\beta^2 z}$, les solutions stationnaires obéissent à

$$\phi_{yy} + \phi^3 = [V(y) - \beta^2]\phi, \quad (14)$$

où l'on a considéré des solutions $\phi(y)$ à valeurs réelles et où $V(y)$ est un découpage de fonctions constantes (le potentiel $V(y)$ correspondant à la Fig. 1 droite est dessiné en Fig. 2 avec son profil d'indices).

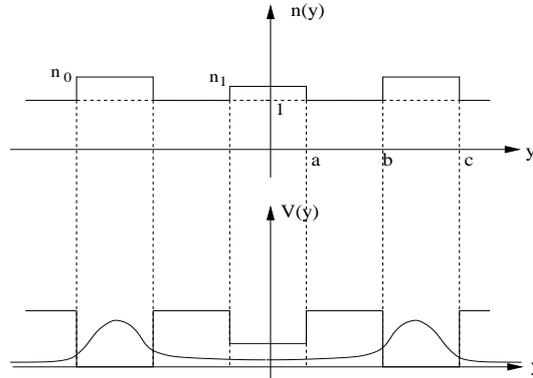


Fig.2. Profil d'indice $n(y)$ et potentiel relatif $V(y)$. Un exemple de mode propre est schématisé sur la figure inférieure, c'est l'amplitude initiale $\Phi(y, 0)$ utilisée pour les simulations numériques.

Les régions $y \in [a, b]$ et $y \in [c, \infty]$, correspondent au vide (ou à de l'air), et donc à une propagation linéaire. D'après les propriétés de symétrie, nous pouvons restreindre notre étude à $y > 0$. En résumé, le système basique, pour la valeur propre β , est

$$y[0, a] \quad \phi_{yy} + \phi^3 = \lambda_1 \phi, \quad \lambda_1 = V_1 - \beta^2, \quad (15)$$

$$y[a, b] \quad \phi_{yy} = \lambda_0 \phi, \quad \lambda_0 = V_0 - \beta^2, \quad (16)$$

$$y[b, c] \quad \phi_{yy} + \phi^3 = \lambda_2 \phi, \quad \lambda_2 = -\beta^2, \quad (17)$$

$$y[c, \infty] \quad \phi_{yy} = \lambda_0 \phi, \quad \lambda_0 = V_0 - \beta^2. \quad (18)$$

3.2 Etats propres nonlinéaires

On détermine maintenant, à partir du problème spectral, les conditions initiales pour l'équation de NLS (13) qui sont des états propres nonlinéaires spécifiques. Ceux-ci sont donnés en termes de fonctions elliptiques de Jacobi comme développé en [13] et appliqué en [14], pour obtenir un effet tunnel nonlinéaire dans un réseau de guides d'ondes couplées.

Il est clair que le signe de chaque constante λ_j est déterminant pour la nature de ces solutions. On s'intéresse au cas particulier où le guide d'ondes central ($y \in [-a, a]$) ne peut propager les modes guidées, provenant des guides d'ondes latéraux pilotes ($V_1 > \beta^2$). Par conséquent, nous avons les conditions $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. On peut montrer que les équations (15,17) possèdent les trois solutions fondamentales suivantes

$$\phi^{(1)}(y) = Bcn[\kappa(y - y_0), \mu], \quad \kappa^2 = \frac{\lambda}{2\mu^2 - 1}, \quad B^2 = 2\kappa^2\mu^2 \quad (19)$$

$$\phi^{(2)}(y) = Bdn[\kappa(y - y_0), \mu], \quad \kappa^2 = \frac{\lambda}{2 - \mu^2}, \quad B^2 = 2\kappa^2 \quad (20)$$

$$\phi^{(3)}(y) = \frac{B}{dn[\kappa(y - y_0), \mu]}, \quad \kappa^2 = \frac{\lambda}{2 - \mu^2}, \quad B^2 = 2\kappa^2(1 - \mu^2) \quad (21)$$

exprimées en termes de fonctions elliptiques de Jacobi d'argument $\mu < 1$. Ci-dessus, λ désigne à la fois λ_1 dans la région centrale et λ_2 dans les régions latérales pilotes. Les quantités B , κ et μ sont des paramètres déterminés de ces solutions (analogues à une relation de dispersion), qui assurent aux fonctions $\phi^{(j)}$ d'être solution de NLS. La phase y_0 est un paramètre libre qui peut être déterminé par les conditions de continuité et les conditions aux bords. Ces solutions fondamentales constituent alors, pour chaque λ donné (ou l'équivalent β^2), un jeu de 2 familles de paramètres, les paramètres étant pour l'exemple B (l'amplitude) et y_0 .

L'existence du comportement de bistabilité dans le cas nonlinéaire provient des remarques suivantes. La solution $\phi^{(1)}$ a actuellement deux réalisations différentes qui dépendent du signe de λ . En fait (19) fournit $\lambda < 0 \iff \mu^2 < \frac{1}{2}$, $\lambda > 0 \iff \frac{1}{2} < \mu^2 \leq 1$. La solution $\phi^{(1)}$ est permise dans les régions latérales $y \in [b, c]$ où $\lambda = \lambda_2 < 0$, et dans la région central $y \in [-a, a]$ où $\lambda = \lambda_1 > 0$. En ce qui concerne la solution $\phi^{(3)}$, la condition $\mu \leq 1$ provenant de (21), impose que la solution n'est possible que dans le cas $\lambda > 0$. La solution $\phi^{(3)}$ est l'analogue d'une onde évanescence linéaire. Par conséquent, le guide d'ondes central où $\lambda = \lambda_1 > 0$ peut contenir les deux types de solutions $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(3)}$. Ce qui constitue précisément les propriétés de bistabilité. On remarque que la solution $\phi^{(2)}$ est généralement instable et elle ne peut donc contribuer à la description des résultats des simulations numériques.

4 Simulations numériques

Eclairer localement la tranche avec un faisceau signifie pour le modèle, de le compléter avec la condition initiale $\Psi(y, 0)$. L'extension transverse du faisceau est une fonction locale lisse et on considère les conditions de bords de Neuman, $\Psi_y \rightarrow 0$, pour tout z aux deux extrémités $y \rightarrow \pm\infty$.

La solution $\phi(y)$ du système nonlinéaire (15,...,18) est soumise aux conditions de continuité en chaque point de discontinuité du potentiel ($y = a, b, c$). La première de ces conditions est la continuité du champ T.E (libre de charges de surfaces), et la seconde, est la continuité de la composante \mathbf{H}_{\parallel} du champ magnétique (surface non conductrice).

On a alors un jeu complet de solutions avec les ondes évanescences, qui connectent les régions latérales au guide d'ondes central, ainsi qu'au milieu extérieur. Ce sont les solutions des équations linéaires (16) et (18), à savoir $\phi^{(0)}(y) = \alpha_1 e^{-\lambda_0 y} + \alpha_2 e^{\lambda_0 y}$. L'utilisation des conditions de continuité aux points $y = a, b, c$, produit pour les 4 solutions $\phi^{(3)}$ dans $[0, a]$, $\phi^{(0)}$ dans $[a, b]$, $\phi^{(1)}$ dans $[b, c]$ et $\phi^{(0)}$ dans $[c, \infty]$, un jeu de 6 relations algébriques. Les conditions de symétrie apportent 2 relations supplémentaires $\phi^{(3)}(-a) = \phi^{(3)}(a)$ et $\phi^{(0)}(\infty) = 0$ et l'on peut ainsi déterminer les 8 paramètres libres. Ces 8 paramètres, incluant l'amplitude B , sont complètement déterminés par le choix de la valeur propre β , qui impose le mode guidé dans

les guides d'ondes latéraux pilotes. Dans la pratique, il est plus commode d'utiliser, à la place de β , l'amplitude $B = B_{in}$, qui représente l'amplitude de l'enveloppe $\phi^{(1)}$ dans la région $[b, c]$. Les conditions de continuité donneront alors une détermination de β . Cette amplitude B_{in} donne le flux d'énergie injecté dans les guides d'ondes pilotes latéraux. La suite de notre approche est donc d'augmenter petit à petit l'amplitude B_{in} , et d'observer la nature du flux lumineux qui émerge du guide d'onde central (amplitude B_{out}).

On présente en Fig. 3 les simulations numériques de notre système, observées dans la direction de propagation z , pour deux valeurs de B_{in} différentes.

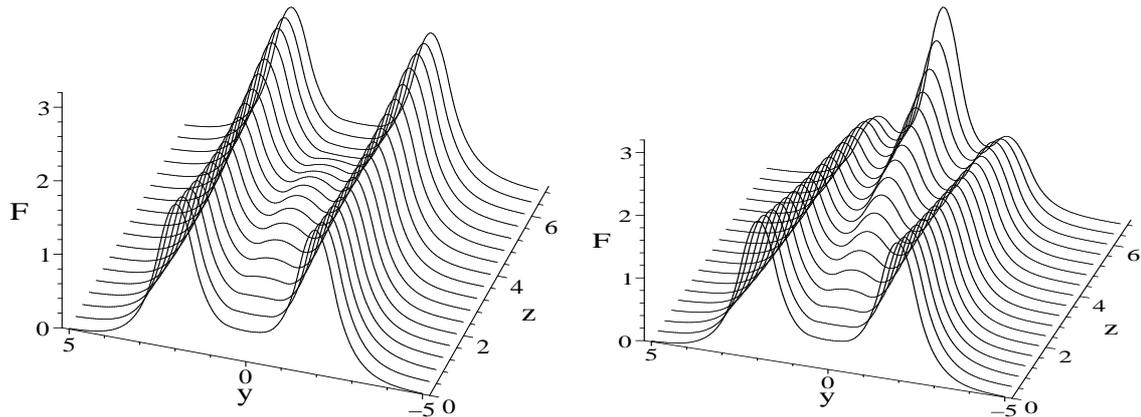


Fig.3. A gauche, $B_{in} = 1.4$ et $B_{out}^2 \approx 0.46$. A droite $B_{in} = 1.48$ et $B_{out}^2 \approx 3.25$. Les paramètres du système sont $a = 0.5$, $b = 1.5$, $c = 2.5$, $V_0 = 2.5$, $V_1 = 2$ et F désigne sur la légende $|\Psi(y, z)|^2$.

On peut montrer, que les solutions numériques tronquées en $[-a, a]$ coïncident avec leur expression analytique $\phi^{(j)}$. Il est aussi intéressant de constater que la bifurcation d'un mode évanescents vers un mode intense, peut être généré par l'injection d'une faible radiation ($\approx B_{in}/100$) dans le milieu central. Ce dispositif se comporterait alors, comme un détecteurs ultra sensibles, et pourrait permettre la conception d'amplificateurs, de commutateurs, de portes logiques ou bien de transistors optiques.

Références

1. R.Y CHIAO, E. GARMIRE, C.H. TOWNES, *Phys Rev Lett*, **13**, 479 (1964).
2. P.L. KELLEY, *Phys Rev Lett*, **15**, 1005 (1965).
3. A. BARTHELEMY, S. MANEUF, C. FROEHLI, *Opt Comm*, **55**, 201 (1985).
4. J.S. AITCHISON, A.M. WEINER, Y. SILBERBERG, M.K. OLOVER, J.L. JACKEL, D.E. LEAIRD, E.M. VOGEL, P.W.E. SMITH, *Opt Lett*, **471**, 15 (1990).
5. H.G. WINFUL, J.H. MARBURGER, E. GARMIRE, *Appl Phys Lett*, **35**, 379 (1979).
6. N.D. SANKEY, D.F. PRELEWITZ, T.G. BROWN, *Appl Phys Lett*, **60**, 1427 (1992).
7. D.N. CHRISTODOULIDES, R.I. JOSEPH, *Optics Lett*, **13**, 794 (1988).
8. T. PERTSCH, T. ZENTGRAF, U. PESCHEL, A. BRAUER, F. LEDERER, *Phys Rev Lett*, **88**, 093901 (2002).
9. A.A. SUKHORUKOV, D. NESHEV, W. KROLIKOWSKI, Y.S. KIVSHAR, *Phys Rev Lett*, **92**, 093901 (2004).
10. M.J. ABLOWITZ AND Z.H. MUSSLIMANI, *Physica D*, **184**, 276 (2003).
11. R. KHOMERIKI, J. LEON, *Phys Rev Lett*, **94**, 243902 (2005).
12. A. JEFFREY, T. KAWAHARA, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory*, Pitman (London 1982).
13. L.D. CARR, K.W. MAHMUD, W.P. REINHARDT, *Phys Rev A*, **64**, 033603 (2001).
14. J. LEON, *Phys Rev E*, **70**, 056604 (2004).