

Les sauts de mode tronquent la dynamique des oscillateurs paramétriques optiques

Axelle Amon¹ & Marc Lefranc²

¹ Laboratoire PALMS, UMR CNRS 6627, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

² Laboratoire PhLAM, UMR CNRS 8523, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
axelle.amon@univ-rennes1.fr

Résumé. Les études théoriques de la dynamique des oscillateurs paramétriques optiques (OPO) supposent généralement que les désaccords en fréquence des champs par rapport aux modes de cavité sont des paramètres libres. Or, ces désaccords sont susceptibles de changer sous l'effet de sauts de mode. Nous montrons que les limitations imposées par ce phénomène peut empêcher l'apparition de certaines instabilités.

Abstract. Theoretical investigations of dynamical behavior in optical parametric oscillators (OPO) have generally assumed that the cavity frequency detunings of the interacting fields are free parameters. However, detunings can change as mode hops occur. We show that limitations imposed by this phenomenon can prevent the occurrence of some instabilities.

1 Introduction

Les OPO sont des sources de lumière cohérente largement accordables. Leur utilité est aussi bien liée à cette accordabilité (spectroscopie) qu'aux propriétés quantiques propres au système (génération d'états comprimés, photons jumeaux). D'autre part, en tant que système non-linéaire, les OPO sont susceptibles de présenter une grande richesse de phénomènes dynamiques temporels et spatio-temporels. Il est donc surprenant de constater que très peu des instabilités identifiées sur le plan théorique aient à ce jour été mises en évidence expérimentalement. Ainsi, le modèle le plus simple de l'OPO triplement résonnant, le modèle champ moyen monomode dégénéré, prévoit l'apparition d'un comportement périodique par une bifurcation de Hopf [1] suivi d'une transition vers le chaos par dédoublement de période [2]. Or, bien que ces résultats théoriques soient connus depuis vingt-cinq ans et qu'il ait été vérifié expérimentalement que le modèle reproduisait bien les observations à faible taux de pompage [3], la bifurcation de Hopf du modèle monomode n'a, à notre connaissance, jamais été observée expérimentalement. Il est généralement avancé que c'est la limitation expérimentale du taux de pompage qui empêche d'observer ces instabilités en raison, soit de la puissance du laser de pompe lui-même, soit de l'apparition de comportement multimode à forte puissance.

Nous montrons dans cet article que dans les configurations expérimentales les plus communes, l'impossibilité d'observer la bifurcation de Hopf est due à la limitation du désaccord en fréquence du signal et non au niveau de pompage. En effet, on sait qu'un OPO sélectionne spontanément un point de fonctionnement correspondant à un petit désaccord [4]. Contrairement aux hypothèses de nombreux articles théoriques, le désaccord du signal d'un OPO n'est donc pas un paramètre contrôlable du système mais une variable dynamique. Les restrictions que lui impose le phénomène des sauts de mode peut interdire l'observation d'instabilités prédites pour des grandes valeurs du désaccord.

Dans une première partie nous rappelons les grandes lignes du modèle champ moyen monomode dégénéré d'un OPO triplement résonnant (TROPO) et nous donnons l'expression analytique à pompe infinie du plus petit désaccord pour lequel la bifurcation de Hopf peut se produire. Dans une deuxième partie nous donnons l'expression du désaccord maximal autorisé par les sauts de mode. Nous comparons ces deux limites pour des valeurs typiques des paramètres, et montrons leur incompatibilité dans de nombreuses configurations. Nous présentons dans une dernière partie des simulations numériques à valeur

finie du taux de pompage confirmant que dans la plupart des dispositifs expérimentaux, les sauts de mode empêchent d'observer la bifurcation de Hopf, et que les configurations pour lesquelles cette observation serait possible semblent difficiles à mettre en oeuvre.

2 Instabilité de Hopf du modèle champ moyen monomode dégénéré

Rappelons tout d'abord les équations gouvernant la dynamique d'un TROPO. Dans un tel système, deux champs sous-harmoniques (le signal et le complémentaire) sont générés à partir d'un champ pompe A_p par interaction paramétrique dans un cristal non linéaire placé dans une cavité résonante pour les trois champs. Le modèle le plus simple pour décrire ce système est un modèle champ moyen monomode dégénéré dans lequel l'amplitude du champ du signal A_s décrit l'évolution commune des champs générés :

$$\dot{A}_s = -(1 + i\Delta_s)A_s + A_s^*A_p, \quad (1)$$

$$\dot{A}_p = \gamma [-(1 + i\Delta_p)A_p - A_s^2 + E], \quad (2)$$

où Δ_s et Δ_p sont les désaccords des champs signal et pompe, et E le taux de pompage. L'unité de temps est le temps de décroissance du champ du signal dans la cavité et γ est le rapport entre les temps de vie des photons du signal et ceux de la pompe dans la cavité. Le seuil d'émission paramétrique

$$E_{seuil}^2 = (1 + \Delta_p^2)(1 + \Delta_s^2). \quad (3)$$

correspond au taux de pompage au-dessus duquel les équations (1) et (2) admettent des solutions stationnaires non nulles [2]. Ces solutions se déstabilisent par une bifurcation de Hopf donnant naissance à des solutions périodiques au-delà d'un taux de pompage donné par

$$E_H^2 = \left[\frac{\gamma^2(1 + \Delta_p^2) + 4(1 + \gamma)}{-2(1 + \gamma)^2 \left[1 + \frac{2(1 + \Delta_p \Delta_s)}{\gamma(1 + \Delta_p^2)} \right]} - (\Delta_p \Delta_s - 1) \right]^2 + (\Delta_p + \Delta_s)^2, \quad (4)$$

à condition que les désaccords vérifient l'inégalité :

$$\Delta_p \Delta_s < - \left[1 + \frac{\gamma(1 + \Delta_p^2)}{2} \right]. \quad (5)$$

A taux de pompage plus élevé, une cascade de doublement de période conduit à un régime chaotique.

L'inégalité (5) assure que E_H soit fini, ce dernier tendant vers l'infini lorsqu'on s'approche de l'égalité. Or, il est généralement admis que les instabilités prévues dans les OPO ne sont pas observées expérimentalement parce qu'elles apparaissent à des taux de pompage trop élevés. Comme nous voulons au contraire étudier le rôle joué par les désaccords dans l'apparition des instabilités, nous considérerons dans un premier temps que la puissance de pompe disponible est infinie. Dans ces conditions, l'égalité dans (5) peut être atteinte, et délimite à elle seule les régions de l'espace des paramètres à l'intérieur desquels l'instabilité de Hopf est susceptible de se produire.

La figure 1 représente pour différentes valeurs de γ les courbes du plan (Δ_p, Δ_s) où l'équation (5) est une égalité, les zones où la bifurcation de Hopf peut se produire étant situées du côté des grands désaccords. Cette figure montre clairement que la bifurcation ne peut apparaître que pour des valeurs non nulles des désaccords. On peut notamment calculer la valeur minimale que le désaccord du signal doit prendre :

$$\Delta_s^{\min} = \min\{|\Delta_s|\} = \sqrt{\gamma(\gamma + 2)}, \quad (6)$$

qui correspond à un désaccord de la pompe $|\Delta_p| = \sqrt{(\gamma + 2)/\gamma}$.

Nous voyons donc que de même qu'il existe un seuil sur le taux de pompage pour observer des instabilités, il existe un seuil sur les désaccords. Le problème est que pour atteindre cette valeur expérimentalement, la dextérité du manipulateur ne suffit pas. En effet les désaccords ne sont pas des paramètres contrôlables du système mais des variables dynamiques : l'oscillateur paramétrique optique cherche constamment à minimiser le désaccord du signal. Dans la partie suivante nous donnons donc une expression analytique de la limite supérieure que ce mécanisme impose aux valeurs prises par les désaccords.

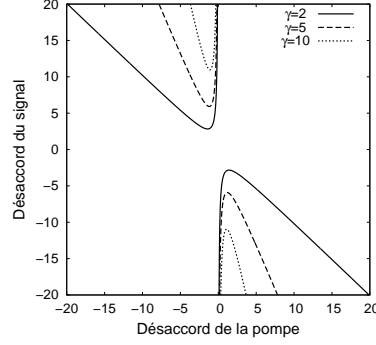


Fig.1. Carte (Δ_p, Δ_s) des domaines d'instabilités à pompe infinie pour différentes valeurs du paramètre γ .

3 Sélection de mode dans un OPO

Nous rappelons ici le principe de la sélection d'un mode d'oscillation dans l'OPO, plus précisément d'un couple de modes signal/complémentaire. La manière dont l'OPO "choisit" spontanément sa fréquence a été étudiée en détail dans les travaux consacrés à l'accord en fréquence des OPO (voir par exemple [4]), c'est à dire l'évolution des fréquences générées lorsqu'on fait varier un paramètre de contrôle. Cette évolution est discontinue : elle comporte des sauts de modes. En effet, l'OPO choisit parmi tout un peigne de modes de fonctionnement celui qui conduira au seuil le plus bas. Quand le peigne se déplace à cause de l'ajustement d'un paramètre, un nouveau mode peut devenir plus favorable. Le système bascule alors sur ce nouveau mode avec un saut de fréquence. Ces sauts peuvent se faire entre des modes adjacents sur le peigne ou entre des modes plus éloignés. Nous nous intéresserons uniquement au premier cas, le deuxième étant d'une part plus rare, et d'autre part leur prise en compte ne changeant pas nos conclusions.

Le désaccord du champ du signal (resp. du complémentaire) est défini par $\Delta\omega_{s(c)} = \omega_{s(c)} - \omega_{s(c)}^R$, où $\omega_{s(c)}^R$ est une fréquence de résonance de la cavité pour le champ du signal (resp. du complémentaire) et $\omega_{s(c)}$ les fréquences des champs. Ces dernières sont reliées à la fréquence de la pompe par la relation de la conservation de l'énergie : $\omega_s + \omega_c = \omega_p$. On peut définir le désaccord total du mode :

$$\Delta\omega = \Delta\omega_s + \Delta\omega_i = \omega_p - \omega_s^R - \omega_i^R. \quad (7)$$

Si $\delta\omega_{s(c)}$ est l'intervalle spectral libre de la cavité pour le champ du signal (resp. du complémentaire), il existe un nombre entier $N_{s(c)}$ tel que $\omega_{s(c)}^R = N_{s(c)}\delta\omega_{s(c)}$. Lorsque $|\delta\omega_s - \delta\omega_c| \ll \delta\omega_{s,c}$, les sauts de modes se font entre modes adjacents et correspondent à des variations d'une unité et opposées des nombres N_s et N_c . Les modes de cavité impliqués dans le saut de mode ont donc comme fréquences :

$$\omega_s^R = (N_s \pm 1)\delta\omega_s, \quad (8)$$

$$\omega_i^R = (N_i \mp 1)\delta\omega_i. \quad (9)$$

Si on considère les désaccords totaux de deux modes adjacents notés respectivement $\Delta\omega$ et $\Delta\omega'$:

$$\Delta\omega = \omega_p - N_s\delta\omega_s - N_i\delta\omega_i,$$

$$\Delta\omega' = \omega_p - (N_s + 1)\delta\omega_s - (N_i - 1)\delta\omega_i,$$

la différence $\Delta\omega' - \Delta\omega = \delta\omega_i - \delta\omega_s$ entre les deux désaccords est alors indépendante du couple de modes considéré, et le désaccord le plus proche de zéro sera nécessairement dans l'intervalle $[-\frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{2}, \frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{2}]$. La valeur la plus grande atteignable avant un saut de mode est donc la valeur absolue des extrémités de cet intervalle :

$$\Delta\omega_{max} = \frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{2}. \quad (10)$$

Notons que cette valeur peut être retrouvée à partir de l'expression du désaccord total donnée par Eckardt *et al.* [4] si on se place dans le cas particulier du désaccord maximal.

Pour comparer cette limite à celle obtenue en (6), nous allons exprimer $\Delta\omega_{max}$ avec la même normalisation. Si les finesesses de la cavité pour les champs signal et complémentaire peuvent être considérées comme égales, et qu'on note cette valeur \mathcal{F}_s , on peut montrer que

$$\Delta_s = \frac{2\mathcal{F}_s\Delta\omega}{\delta\omega_s + \delta\omega_i}. \quad (11)$$

La valeur maximale du désaccord autorisé est alors donnée par

$$|\Delta_{max}| = \mathcal{F}_s \frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{\delta\omega_s + \delta\omega_i}, \quad (12)$$

ou de manière équivalente par

$$|\Delta_{max}| = 2\mathcal{F}_s \frac{|\delta n|l_c}{[L]}, \quad (13)$$

où L_{cav} est la longueur de la cavité, l_c celle du cristal, $n_{s(c)}$ les indices respectifs des champs et c la célérité de la lumière dans le vide. $[L]$ est la longueur optique moyenne d'un aller-retour dans la cavité : $[L] = 2(L_{cav} + (\frac{n_s+n_i}{2} - 1)l_c)$ et $\delta n = \frac{|n_s-n_i|}{2}$.

Le désaccord maximal augmente donc avec la finesse de la cavité pour le signal ou la biréfringence. Par contre la taille de la cavité doit être choisie la plus petite possible pour maximiser les intervalles spectraux libres. Sur la figure 2, la courbe en trait plein donne Δ_{max} en fonction de la taille de la cavité pour nos conditions expérimentales ($n_s = 1.75$, $n_c = 1.83$, $l_c = 15mm$ et $\mathcal{F}_s = 500$).

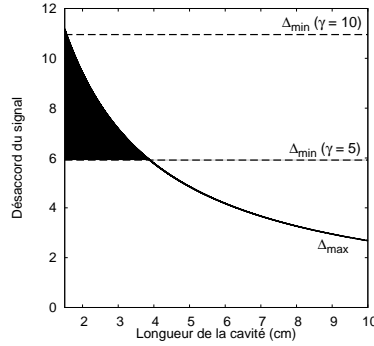


Fig.2. Courbes donnant le désaccord maximal autorisé par les sauts de mode (trait plein) et les désaccords minimaux pour observer l'instabilité (traits pointillés).

Il ne nous reste plus qu'à confronter ces valeurs limites à celles obtenues en (6) pour déterminer si les domaines instables existent toujours quand on restreint Δ_s à l'intervalle $[-\Delta_{max}, \Delta_{max}]$. Sur la figure 2, les droites pointillées horizontales correspondent à $\Delta_s = \Delta_{min}$ pour deux valeurs de γ différentes. La plus haute correspond à $\gamma = 10$, une valeur expérimentale typique. Le domaine de valeurs de Δ_s compris entre cette droite et la courbe en trait plein est quasiment vide : il n'est pas possible de trouver une configuration de l'OPO permettant d'observer la bifurcation de Hopf, et cela quelle que soit la puissance de pompe disponible. Dans cette configuration, ce sont donc les sauts de mode, et non la puissance de la pompe, qui limitent l'exploration de l'espace des paramètres. La droite pointillée la plus basse correspond à $\gamma = 5$. Le domaine de valeurs du désaccord autorisées par la sélection de mode et remplissant les conditions de bifurcation apparaît en noir sur la figure. Il est donc possible, pour des cavités suffisamment courtes et des faibles valeurs de γ de remplir ces conditions à pompe infinie. Cependant diminuer $\gamma = \mathcal{F}_s/\mathcal{F}_p$ en

gardant \mathcal{F}_s constant pour ne pas modifier Δ_{max} oblige à augmenter \mathcal{F}_p ce qui rend le fonctionnement de l'OPO plus difficile comme nous le décrirons plus loin.

Dans cette partie, nous avons donc donné l'expression du désaccord maximal autorisé par les sauts de mode, et montré que cette limite peut empêcher d'atteindre le domaine d'instabilité, et ce même en considérant une pompe infinie. Le taux de pompage n'est donc pas le seul facteur limitant l'observation d'instabilités dans les OPO.

4 Cas d'un taux de pompage fini

Nous cherchons maintenant à déterminer comment sont modifiées nos conclusions à pompe finie. Tout d'abord, nous estimons qualitativement l'influence de la réduction du taux de pompage sur nos valeurs limites des désaccords. Ensuite nous explorons numériquement quelques cas pour illustrer nos propos.

L'expression de Δ_{min} donnée en (6) a été calculée à partir du cas d'égalité de la relation 5. Ce cas correspond à une valeur infinie du seuil de la bifurcation de Hopf. Pour une valeur finie de la pompe, la relation 5 doit pour faire descendre le seuil d'instabilité s'éloigner de l'égalité, et donc les domaines d'instabilité de la figure 1 rétrécissent et s'éloignent de l'origine. La valeur minimale du désaccord du signal à pompe finie sera donc supérieure à Δ_{min} .

En ce qui concerne la limitation par la sélection de mode, celle-ci ne fait pas intervenir le taux de pompage. Cependant, il faudra tenir compte pour un taux de pompage fini E du seuil d'oscillation paramétrique donné par l'équation 3 : il pourra exister des situations dans lesquelles le désaccord est inférieur à Δ_{max} mais où l'amplitude du signal sera nulle car le taux de pompage est inférieur à $\frac{E_{seuil}}{L}$. La valeur maximale du désaccord sera donc donnée par la plus petite des deux valeurs Δ_{max} et $\sqrt{\frac{E^2}{1+\Delta_p^2} - 1}$.

Au total, la prise en compte d'une pompe finie augmente Δ_{min} et diminue Δ_{max} , restreignant encore plus l'intervalle de valeurs du désaccord du signal dans lequel l'observation de la bifurcation est possible. La figure 3 montre les zones d'instabilité observées dans quatre simulations numériques. Elles ont été effectuées pour une même puissance de laser de pompe (4 W) et une même taille de cavité (3 cm), mais pour différentes valeurs des finesses de cavité signal et pompe. Ces résultats confirment entièrement nos prédictions. Sur la figure 3(a), on constate que le taux de pompage accessible expérimentalement ne permet pas d'obtenir des zones instables. Sur les figures 3(b) et (c) des zones instables à pompe finie existent mais elles sont presque entièrement en dehors de l'intervalle autorisé par les sauts de mode. Enfin, sur la figure 3(d) les zones instables ont une taille raisonnable, d'environ 17% de la surface comprise entre les droites $\pm\Delta_{max}$. On remarquera que dans les cas des figures 3(b), (c) et (d) les zones instables à pompe finie (en noir) sont bien approchées par les courbes à pompe infinie (tirets) près du désaccord minimal. On en conclut que s'il n'y avait pas de limites sur les désaccords, notre puissance de pompe expérimentale serait tout à fait suffisante pour atteindre la zone instable.

Il faut noter que si le cas de la figure 3(d) semble favorable à l'observation de la bifurcation de Hopf, il correspond en fait à des valeurs des finesses peu réalistes. En effet, un TROPO requiert une finesse de la cavité pour la pompe beaucoup plus faible que la finesse du signal de manière à ce que la condition de triple résonance ne soit pas trop critique à réaliser. Or les domaines instables à l'intérieur de l'intervalle $\pm\Delta_{max}$ ne deviennent de taille non négligeable que pour de faibles valeurs de γ c'est-à-dire quand les finesses de la pompe et du signal sont du même ordre. Ceci rend le dispositif délicat à manier, il nécessite notamment une grande stabilité de la taille de la cavité. Comme d'autre part l'OPO est très sensible aux effets thermiques [5], et qu'une augmentation des finesses de la cavité engendre une forte augmentation des puissances intra-cavité, le risque d'instabilités thermiques et de dérive de la taille de la cavité sera d'autant plus important dans un tel dispositif. Les configurations de l'OPO pour lesquelles la bifurcation de Hopf du modèle monomode serait observable ne sont donc absolument pas naturelles.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons donc montré dans un exemple simple, la bifurcation de Hopf du modèle champ moyen monomode dégénéré, que les sauts de mode peuvent tronquer la dynamique d'un TROPO.

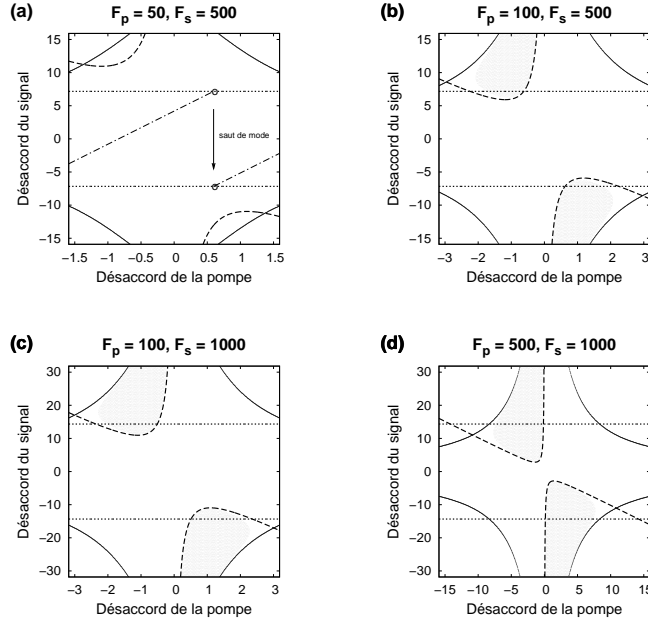


Fig.3. Cartes (Δ_p, Δ_s) pour différentes valeurs de \mathcal{F}_p et \mathcal{F}_s . Les courbes en trait plein aux quatre coins délimitent la zone à l'intérieur de laquelle l'émission paramétrique a lieu, les deux courbes en tirets en haut à gauche et en bas à droite correspondent aux courbes de la figure 1 (égalité de la relation (5)). Les droites parallèles horizontales indiquent l'intervalle $[-\Delta_{max}, \Delta_{max}]$. Enfin, les zones noircies correspondent aux zones d'instabilité à pompe finie. (a) : la ligne en points et tirets montre un exemple d'évolution possible des désaccords lorsqu'on accorde la cavité : le basculement d'un segment à un autre lorsque la valeur limite est atteinte correspond à un saut de mode.

Nous avons d'abord étudié ce modèle à taux de pompage infini, et nous avons obtenu l'expression du plus petit désaccord du signal nécessaire à l'observation de l'instabilité. Nous avons ensuite montré à partir de l'étude des mécanismes des sauts de mode qu'il existe une valeur maximale que les désaccords peuvent prendre. En comparant ces deux valeurs, nous en avons déduit que l'existence de cette limite supérieure peut empêcher d'atteindre les conditions requises pour observer la bifurcation de Hopf, même à pompe infinie. Nous avons ensuite présenté des simulations numériques à pompe finie renforçant nos conclusions. Même s'il existe des configurations expérimentales pour lesquelles la bifurcation de Hopf devrait être observable, celles-ci nous semblent correspondre à des dispositifs expérimentaux peu praticables. Pour conclure, nous soulignons que si notre étude s'est attachée à détailler le cas d'une bifurcation d'un modèle particulier, l'analyse devrait pouvoir se généraliser à de nombreuses études d'instabilités dans les OPO.

Références

1. P. DRUMMOND, K. MCNEIL AND D. WALLS, Non-equilibrium transitions in sub/second harmonic generation I. Semiclassical theory, *Optica Acta*, **27**, 321 (1980).
2. L. A. LUGIATO, C. OLDANO, C. FABRE, E. GIACOBINO AND R. J. HOROWICZ, Bistability, self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators, *Il Nuovo Cimento*, **10D**, 959 (1988).
3. C. RICHY, K. I. PETSAS, E. GIACOBINO, C. FABRE AND L. LUGIATO, Observation of bistability and delayed bifurcation in a triply resonant optical parametric oscillator, *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**, 456 (1995).
4. R. ECKARDT, C. NABORS, W. KOSLOVSKY AND R. BYER, Optical parametric oscillator frequency tuning and control, *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**, 646 (1991).
5. P. SURET, D. DEROZIER, M. LEFRANC, J. ZEMMOURI AND S. BIELAWSKI, Self-pulsing instabilities in an optical parametric oscillator : Experimental observation and modeling of the mechanism, *Phys. Rev. A*, **61**, 021805(R) (2000).